

模式耦合对倾斜校正自适应光学系统的非等晕限制*

饶长辉, 姜文汉, 凌宁

(中国科学院光电技术研究所 成都双流 350 信箱, 610209)

摘要: 分析了当入射信标波前与观测目标不在同一方向且考虑模式之间的耦合时, 倾斜校正自适应光学系统的波前残余误差, 并引入模式耦合因子变量, 分析了模式耦合对倾斜校正自适应光学系统波前校正残余误差的影响。此外还给出了光波水平大气传输时的数值计算结果。

关键词: 自适应光学; 倾斜; 非等晕误差; 模式耦合

中图分类号: O437.1

文献标识码: A

众所周知, 由于受到大气湍流的影响, 天文观测、激光大气传输等光学系统的性能受限, 自适应光学技术由于可以实时测量并且校正大气湍流扰动引起的光学波前畸变^[1~3], 从而在这些领域得到广泛应用。在大气湍流引起的波前畸变中, 波前整体倾斜占绝大部分, 在一些应用场合只要校正大气湍流波前整体倾斜, 就可以取得较好的校正效果。对于倾斜校正自适应光学系统而言, 当观测目标非常微弱时, 波前整体倾斜信息经常需要利用观测目标附近的更亮目标提供信标, 这时系统除了探测噪声和有限带宽引入的误差之外, 还不可避免地存在非等晕误差。

波前倾斜有两种形式: Z 倾斜和 G 倾斜。一般情况下, Z 倾斜对应于波前误差 Zernike 多项式展开中的一阶误差项; G 倾斜为波前平均斜率。在实际自适应光学系统中波前传感器探测到的波前斜率通常为 G 倾斜。对于倾斜校正自适应光学系统, 波前探测器所测量的波前平均斜率被用来校正大气湍流引起的波前误差中的整体倾斜项 Z_2 和 Z_3 。在实际测量中许多高阶项都会被分解成整体倾斜, 这种情况一般被称为模式耦合。对于 G 倾斜, 除波前误差中的整体倾斜项 Z_2 和 Z_3 外, 它还包括高阶误差与其之间的耦合项。具体而言, 除了整体倾斜项 Z_2 外, 三阶误差 Z_3 和高阶误差 Z_{16} 、 Z_{30} 、 Z_{46} 、 Z_{68} 等都会引入到所测量的 x 方向上的平均斜率中。而对于所测量的 y 方向上的平均斜率, 它不仅有整体倾斜项 Z_3 的贡献, 而且还有 Z_7 、 Z_{17} 、 Z_{29} 、 Z_{47} 、 Z_{69} 等高阶误差的贡献。

在国内外有关文献中, 文献[4]对低阶模式(低五阶)完全被校正以及由于有限带宽和探测噪声而造成低阶模式被部分校正时的系统补偿效果进行了较为详细的分析和数值计算, 但均局限于点源目标本身作为信标, 不存在非等晕误差。文献[5]对自适应光学系统低阶模式校正时的非等晕性误差及其对系统补偿效果的影响进行了分析, 但没有考虑模式耦合的影响。为了分析模式耦合对自适应光学系统校正性能的影响, 本文将对倾斜校正自适应光学系统的模式耦合及其它对系统波前校正残余误差的影响展开分析。在本文分析中, 不再考虑探测噪声和有限带宽引入的误差。

1 倾斜校正自适应光学系统的模式耦合

用 Zernike 多项式展开波前 $\phi(Rr)$, 可表示为^[6]

$$\phi(Rr) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j Z_j(r) \quad (1)$$

* 国家 863 激光技术领域和国家自然科学基金(19789301)资助课题
2000年1月14日收到原稿, 2000年6月5日收到修改稿。
饶长辉, 男, 1971年9月出生, 博士生

$$a_j = \int d^2r W(\mathbf{r}) \phi(R\mathbf{r}) Z_j(\mathbf{r}) \quad (2)$$

$$W(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1/\pi, & |\mathbf{r}| \leq 1 \\ 0, & |\mathbf{r}| > 1 \end{cases} \quad (3)$$

式中 R 为观测系统半径(直径为 D); $\mathbf{r} = (x, y)$ 为二维坐标; $Z_j(\mathbf{r})$ 为 Zernike 多项式, j 为模序数; a_j 为大气湍流波前各阶模式系数。

根据 Noll^[6] 所建立的 Zernike 多项式导数矩阵, 对于波前探测器所测量 x 方向和 y 方向上的波前斜率, 可以表示为

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial Z_j(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{j'=1}^{\infty} \gamma_{jj'}^{(x)} Z_{j'}(x, y) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{\partial Z_j(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{j'=1}^{\infty} \gamma_{jj'}^{(y)} Z_{j'}(x, y) \quad (5)$$

式中 $\gamma_{jj'}^{(x)}$ 和 $\gamma_{jj'}^{(y)}$ 是 Zernike 多项式导数矩阵元素。于是所测量的波前平均斜率为

$$\overline{\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{j'=1}^{\infty} \gamma_{jj'}^{(x)} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}) Z_{j'}(\mathbf{r}) \quad (6)$$

$$\overline{\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{j'=1}^{\infty} \gamma_{jj'}^{(y)} \int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}) Z_{j'}(\mathbf{r}) \quad (7)$$

根据 Zernike 多项式的性质, 存在如下关系^[6]

$$\int d\mathbf{r} W(\mathbf{r}) Z_{j'}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & j' = 1 \\ 0, & j' > 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\gamma_{jj'}^{(x)} = \gamma_{jj'}^{(y)} = \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n'+1)}, & m \neq 0 \text{ and } m' \neq 0 \\ \sqrt{2} \sqrt{(n+1)(n'+1)}, & m = 0 \text{ or } m' = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中 j 为与 m, n 对应的模序数; j' 为与 m', n' 对应的模序数。于是

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \gamma_{j1}^{(x)} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,1} \sqrt{(l+1)} \quad (10)$$

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \gamma_{j1}^{(y)} = 2 \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,1} \sqrt{(l+1)} \quad (11)$$

其中 $n=2l+1, m=1, n'=0, m'=0$ 。从(10)、(11)式可以看出, x 方向和 y 方向上的平均斜率是由 $a_{1,1}$ (分别对应于 Z_2 和 Z_3)、 $a_{3,1}$ (分别对应于 Z_8 和 Z_7)、 $a_{5,1}$ (分别对应于 Z_{16} 和 Z_{17})、 $a_{7,1}$ (分别对应于 Z_{30} 和 Z_{29})、 $a_{9,1}$ (分别对应于 Z_{46} 和 Z_{47})、 $a_{11,1}$ (分别对应于 Z_{68} 和 Z_{69}) 等的线性组合而成。

2 自适应光学系统倾斜校正后的波前残余误差及模式耦合因子

假设信标入射波前和望远镜观测目标方向之间的角间距为 α , 则入射波前为 $\phi(R\mathbf{r}, \alpha)$, 因此由所测量的波前平均斜率重构出的波前相位可表示为

$$\tilde{\phi}(R\mathbf{r}, \alpha) = \tilde{a}_2(\alpha) Z_2 + \tilde{a}_3(\alpha) Z_3 \quad (12)$$

$$\tilde{a}_2(\alpha) = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \phi(R\mathbf{r}, \alpha)}{\partial x}} Z_2 = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,1}(\alpha) \sqrt{(l+1)} \right) Z_2 \quad (13)$$

$$\tilde{a}_3(\alpha) = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial \phi(R\mathbf{r}, \alpha)}{\partial y}} Z_3 = \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,1}(\alpha) \sqrt{(l+1)} \right) Z_3 \quad (14)$$

根据(1)式和(12)式可以得到自适应光学系统倾斜校正后的波前残余误差为

$$\epsilon_p^2(1, \alpha) = \langle [\phi(R\mathbf{r}) - \tilde{\phi}(R\mathbf{r})]^2 \rangle = 2 \langle [a_2(0) - \tilde{a}_2(\alpha)]^2 \rangle + \sum_{j=4}^{\infty} \langle [a_j(0)]^2 \rangle \quad (15)$$

式中 $\langle \cdot \rangle$ 表示求整体平均;第二项为高阶未校正波前误差;第一项为倾斜校正非等晕误差,重写为

$$\epsilon_{i_L}^2(1, \alpha) = 2\langle [a_2(0) - \tilde{a}_2(\alpha)]^2 \rangle \quad (16)$$

将(13)式代入(16)式可得倾斜校正非等晕误差为

$$\begin{aligned} \epsilon_{i_L}^2(1, \alpha) = & 2\langle [a_{1,1}(0)]^2 \rangle - 4 \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{(l+1)} \langle a_{2l+1,1}(\alpha) a_{1,1}(0) \rangle \\ & + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sqrt{(l+1)(l'+1)} \langle a_{2l+1,1}(0) a_{2l'+1,1}(0) \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\langle a_{n_1,1}(\alpha) a_{n_2,1}(0) \rangle$ 为Zernike系数角相关函数。与文献[5]的推导类似,对于非Kolmogorov湍流,可将 $\langle a_{n_1,1}(\alpha) a_{n_2,1}(0) \rangle$ 表示为

$$\langle a_{n_1,1}(\alpha) a_{n_2,1}(0) \rangle = 8 \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \pi^{\beta-1} A_{\beta} \left(\frac{D}{\rho_0} \right)^{\beta-2} \frac{\int_0^L dz \Omega_n^2(z) [\chi(z)]^{\beta-2} I'_{n_1+n_2,2} \left(\frac{\alpha z}{R\chi(z)}, \beta \right)}{\int_0^L dz \Omega_n^2(z) [\chi(z)]^{\beta-2}} \quad (18)$$

其中 β 为规格化大气湍流相位谱空间频率的指数下降因子,对于Kolmogorov谱, $\beta=11/3$; $\Omega_n^2(z)$ 为折射率结构常数; A_{β} 为归一化系数; k 为波数, $k=2\pi/\lambda$, λ 为观测波长; ρ_0 类似于大气湍流相干长度 r_0 ,是一个表征大气湍流强度的参数,当 $\beta=11/3$ 时, $\rho_0=r_0$; 对于平面波, $\chi(z)=1$, 对于球面波, $\chi(z)=1-z/L$, L 为光波传播距离。

$$I'_{n_1+n_2,2}(x, \beta) = (-1)^{(n_1+n_2-2)/2} \int_0^{\infty} dt t^{-(\beta+1)} J_{n_1+1}(t) J_{n_2+1}(t) [K_{1,2}^- J_0(xt) + K_{1,2}^+ J_2(xt)] \quad (19)$$

式中 $K_{1,2}^- = \begin{cases} 1, & |j_1 - j_2| = \text{even} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$; $K_{1,2}^+ = \begin{cases} (-1)^{j_1}, & |j_1 - j_2| = \text{even} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 。 $I'_{n_1+n_2,2}(x, \beta)$ 的计算可参考文献[7]。如不考虑模式耦合,自适应光学系统倾斜校正后的非等晕误差相当于(17)式中 $l=0$ 及 $l'=0$ 时的结果。

为了描述模式耦合对倾斜校正自适应光学系统波前校正残余误差的影响,在此引入一个变量——模式耦合因子 ζ ,它定义为由于高阶模式与倾斜模式之间耦合项所引起的波前校正残余误差与不考虑模式耦合时倾斜校正后的波前残余误差之比。根据(15)式和(17)式可将 ζ 表示为

$$\zeta = \frac{2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l'=1}^{\infty} \sqrt{(l+1)(l'+1)} \langle a_{2l+1,1}(0) a_{2l'+1,1}(0) \rangle - 4 \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{(l+1)} \langle a_{2l+1,1}(\alpha) a_{1,1}(0) \rangle}{4\langle [a_{1,1}(0)]^2 \rangle - 4\langle a_{1,1}(\alpha) a_{1,1}(0) \rangle + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \langle [a_{n,0}(0)]^2 \rangle} \quad (20)$$

很显然,模式耦合因子 ζ 越大,表明模式耦合对倾斜校正自适应光学系统波前校正残余误差的影响越严重。

3 光波水平大气传输时的数值计算结果

光波在水平大气中传输时, $\Omega_n^2(z) = \Omega_n^2$ 为一常数,此时Zernike角相关函数变为

$$\begin{aligned} \langle a_{n_1,1}(\alpha) a_{n_2,1}(0) \rangle = & 8 \sqrt{(n_1+1)(n_2+1)} \pi^{\beta-1} A_{\beta} (\beta-1) \times \\ & \left(\frac{D}{\rho_0} \right)^{\beta-2} \int_0^1 dz (1-z)^{\beta-2} I'_{n_1+n_2,2} \left(\frac{\alpha z L}{R(1-z)}, \beta \right) \end{aligned} \quad (21)$$

本文中数值计算参数取为: $D=600\text{mm}$; $L=1000\text{m}$ 。图1给出了湍流功率谱指数 β 分别为40/12、44/12和46/12时系统倾斜校正波前残余误差随角间距 α 变化的关系曲线,其单位为 $(D/\rho_0)^{\beta-2} \text{rad}^2$ 。图中实线为不存在模式耦合时的计算结果;虚线为存在模式耦合时的计算结果。图2为与图1对应的模式耦合因子计算结果曲线。

从图1和图2可以看出:(1)在相同的湍流功率谱指数 β 情况下,与不存在模式耦合相比,高阶模式和倾斜模式之间的耦合使得系统倾斜校正波前残余误差有所增大,并且它还随着信标与目标方向之间

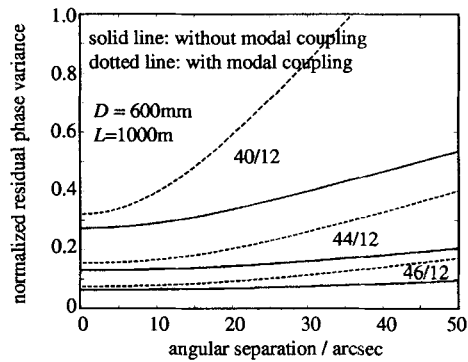


Fig. 1 Residual phase variance after tip-tilt correction vs angular separation α .

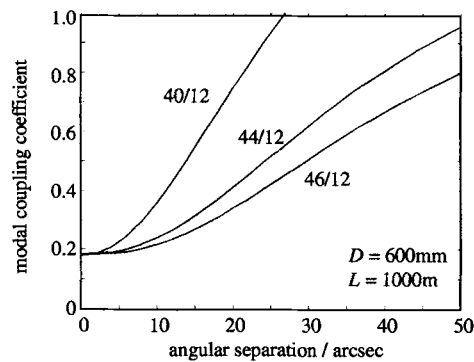


Fig. 2 Modal coupling coefficient vs angular separation α .

图1 倾斜校正后波前残余误差与角间距 α 之间的关系曲线

图2 倾斜校正后模式耦合因子与角间距 α 之间的关系曲线

的角间距的增加而增大。这表明角间距越大,模式耦合对倾斜校正自适应光学系统性能的影响越大;(2)在相同的角间距 α 情况下,湍流功率指数 β 越大,则归一化倾斜校正波前残余误差越小,模式耦合因子也越小。这是由于湍流功率指数 β 越大,波前倾斜模式在大气湍流所引起的波前误差中所占的比重越大,高阶模式和倾斜模式之间的耦合引起的误差所占比重越小的缘故。

4 结论

本文应用 Zernike 多项式展开对考虑模式耦合时倾斜校正自适应光学系统的非等晕误差进行了分析。分析结果表明,与不存在模式耦合相比,高阶模式和倾斜模式之间的耦合使得系统倾斜校正波前残余误差有所增大;角间距 α 越大,湍流功率指数 β 越小,则系统倾斜校正波前残余误差也越大,模式耦合对倾斜校正自适应光学系统波前校正残余误差的影响越大。

参考文献:

- [1] Jiang Wenhan, Li Mingquan, Tang Guomao, et al. Adaptive optics image compensation experiments for star objects[J]. *Opt Eng*, 1995, 34(1):15~20.
- [2] 姜文汉, 严佩英, 李明全. 自适应光学实时大气湍流补偿实验[J]. *光学学报*, 1990, 10(6):558~564.
- [3] 饶长辉, 姜文汉. 2.16m 望远镜红外自适应光学系统的误差和性能分析[J]. *天体物理学报*, 1996, 16(4):428~437.
- [4] 饶长辉, 姜文汉, 凌宁. 低阶模式校正自适应光学系统的补偿效果分析[J]. *光学学报*, 1999, 19(12):1615~1624.
- [5] 饶长辉, 姜文汉, 凌宁. 低阶模式校正自适应光学系统的非等晕限制[J]. *光学学报*, 2000, 20(10), 待出版.
- [6] Noll R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. *J Opt Soc Am*, 1976, 66(3):207~211.
- [7] Molodij G, Rousset G. Angular correlation of Zernike polynomials for a laser guide star in adaptive optics[J]. *J Opt Soc Am (A)*, 1997, 14(8):1949~1966.

EFFECT OF MODAL COUPLING ON ANISOPLANATIC LIMITATION OF TIP-TILT CORRECTION ADAPTIVE OPTICAL SYSTEM

RAO Chang-hui, JIANG Wen-han, LING Ning

Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Science, P. O. Box 350, Shuangliu Chengdu 610209, China

ABSTRACT: The residual phase variance for tip-tilt correction adaptive optical system is analyzed by considering the modal coupling. The modal coupling coefficient, is introduced to analyze the effect of the modal coupling on the anisoplanatism limitation of the tip-tilt correction adaptive optical system. Furthermore, the numerical results for the light beam horizontal atmospheric propagation are presented.

KEY WORDS: adaptive optics; tip-tilt; anisoplanatism error; modal coupling