

# 直流电动机反电动势对其电流脉动频率的影响

袁宝国<sup>1</sup>, 曹镇荣<sup>1</sup>, 王胜国<sup>2</sup>

(1. 上海第二工业大学电子电气工程学院, 上海市 浦东新区 201209;

2. 北卡罗莱纳大学夏洛特分校工程技术学院, 夏洛特 NC 28223-0001 美国)

## Effect of Counter EMF on Ripple Frequency of Current in DC Motor

YUAN Bao-guo<sup>1</sup>, CAO Zhen-rong<sup>1</sup>, WANG Sheng-Guo<sup>2</sup>

(1. Shanghai Second Polytechnic University, Pudongxin District, Shanghai 201209, China;

2. University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, 28223, USA)

**ABSTRACT:** The frequency of the current ripple in the DC motor caused by its counter-EMF is analyzed. It is proved that this frequency is determined not only by its rotation speed, but also by the number of windings in series, the number of pole-pairs, and the number of parallel paths in which current ripple waves do each other. It does not have direct linkage with the number of brush-pairs, the number of commutator bars, and the number of armature slots. This result provides an analytic basis for the sensorless speed estimation of DC motor.

**KEY WORDS:** sensorless speed estimation; DC motor; counter-EMF; superposition of signal

**摘要:** 对由反电动势所造成的直流电动机的电流脉动的频率进行了分析和数学证明, 提出当直流电动机旋转时, 反电动势造成的的电流脉动频率与转速、磁极对数、每个支路串联元件数以及脉动电流不重合的并联支路数有关, 与电刷对数、换向片数、齿槽数无直接的关系。结果对各种类型的直流电动机的无传感器转速测量方法提供了一个进一步分析的基础。

**关键词:** 无传感器测速; 直流电动机; 反电动势; 信号叠加

## 0 引言

电动机的电枢是一个特殊的旋转体, 旋转时有些电气参数会随转速而变。人们可以寻找这些参数, 以测得转速。它摒弃了传统的转速传感器, 在现代的文献中对这种不需要测速传感器的测速方法称为无传感器(sensorless)测速。无传感器更确切地讲应该称为无转速传感器, 一时成了热门<sup>[1-7]</sup>。

直流电动机旋转时在供电回路中的直流电流会出现脉动。单位时间该直流电流脉动的次数(暂且称之为脉动频率)与电动机的转速有关。若在供电回路中采集该脉动信息, 再将其转变为转速信号, 利用这一原理可以实现对直流电动机的转速测量。利用供电回路中的脉动信息实现直流电动机的无传感器测速的工作主要集中在国内。

1978年张文海首先提出用脉动信息来测量直流电动机的转速<sup>[8]</sup>。以后陈稚文对测量方法进行了改进<sup>[9-10]</sup>, 将电阻取样改为电流互感器取样, 将频率计测频改为采用FFT进行数据处理。近年来黄进等进一步采用霍尔元件取样, 然后通过小波变换或SFFT等方法对电动机启动时的非平稳转速信号进行测量<sup>[11-15]</sup>。

对于脉动频率的影响因子一般认为有转速、换向片数和磁极对数(电刷对数), 但是在数学关系的表达上认识不全然一致。

文献[8-10, 16]认为“换向脉冲”频率与换向片数有关, 换向片数为奇数时, 换向脉冲频率 $f=2kn/60$ ; 换向片数为偶数时, 换向脉冲频率 $f=kn/60$ , 式中 $k$ 为换向器片数,  $n$ 为电动机转速, 单位为转/分钟。文献[8]仅公布了2极、换向片数为5的微电机的测试数据; 文献[9-10]仅给出了2极12换向片的直流微型电动机的资料; 文献[16]也仅显示了2极3换向片的直流电动机的数据。

文献[17]认为换向片数为奇数、电刷对数为奇数时, “换向脉冲频率” $f=2kn/60$ ; 换向片数为奇数、电刷对数为偶数时, “换向脉冲频率” $f=kn/60$ , 式中 $k$ 为换向器片数,  $n$ 为电动机转速, 单位为转/分钟。文献称“由于手头缺乏换向片数为偶数的电

动机”，因此没有换向片数为偶数电动机的数据。文献[17]给出了 2 极、换向片数为 5 的永磁直流伺服电机以及 12 极、换向片数为 169 的永磁直流力矩电机的数据。

文献[11-15]公式中出现磁极对数，认为脉动分量的频率满足如下关系： $f = ckn_p/60$ ，式中  $k$  为换向器片数， $n$  为电动机转速， $p$  为磁极对数，系数  $c$  由换向片数的奇偶所决定，当  $k$  为偶数时， $c=1$ ； $k$  为奇数时， $c=2$ 。

文献[18-20]是 2003 年和 2004 年的 3 项美国专利，文中简单地认为转速等于电流脉动频率，没有提及磁极对数问题。

文献[21]是 2006 年的最新文献。该文献认为“转子谐波”的各谱线可表达为  $f_{sh} = n_r N_r / p f_m$ ，式中  $n_r$  为带符号的整数， $f_m$ 、 $N_r$  和  $p$  分别为机械转子频率、转子齿槽的总数以及定子磁极的对数。文献[21]也认为谐波频率与定子的磁极对数有关，但是它的磁极对数  $p$  出现在分母中，文献[21]未对此进行证实，而仅显示了  $p=1$  的电动机数据。

对于直流电动机旋转时电流脉动产生的原因，文献[8,10]认为是因为换向关系。文献[17]也基本认为“从供电电流波形中”提取的是“换向脉冲”。文献[11-14]认为“由于换向的原因，直流电动机的直流电枢电流上会叠加一个高频分量”。文献[14]还认为“电枢绕组的换向引起的绕组波形畸变”。以上文献一致认为供电回路电流产生脉动的原因来自于换向。文献[21]则认为脉动与转子槽谐波 (rotor slot harmonics) 有关。

笔者认为以上各文献作者在认识上的差异来自于缺乏对供电回路电流产生脉动的原因进行详细的分析和讨论。由于对这一方法的机理了解不很透彻，适用条件自然不会清楚。为弥补这一空白，笔者试图撰文对脉动产生的机理作一番详尽的研究与分析。根据电磁学原理，直流电动机电流脉动的原因主要来自 2 个方面，一是来自换向过程，二是来自反电动势。本文只对反电动势的影响进行分析。

### 1 对一个电枢线圈产生的反电动势分析

当直流电动机旋转起来以后，电枢绕组元件切割磁力线，会产生反电动势。

图 1(a)是普通电动机学教科书中常见的一台最简单的 2 极直流电机模型，它的定子上装设了 1 对静止的主磁极。在其转子上装设了电枢铁心。

在电枢铁心上安放了由 A 和 X 两根有效导体连成的一个电枢线圈，线圈的首、末端分别连接到两片圆弧形的铜质的换向片上，换向片固定于转轴上， $B_1$ 、 $B_2$  为一对空间上固定不动的电刷。当电枢旋转时，电枢线圈通过换向片和电刷与外电路接通。

设电机以逆时针方向旋转，在整个电枢线圈中产生的感应电动势

$$e_{XA} = B_{\theta} l v$$

式中： $B_{\theta}$  为导体处于位置  $\theta$  时的磁通密度； $l$  为导体总的有效长度； $v$  为线速度。电枢线圈中产生的感应电动势  $e_{XA}$  正比于  $B_{\theta}$ 。空载时的气隙磁通密度为一平顶波，如图 1(b)。感应电动势  $e_{XA}$  随时间变化的波形应当同  $B_{\theta}$  沿电枢圆周的空间分布曲线，如图 1(c)。从图中可见，该电动势是交流的。由于电刷的整流作用，在电刷  $B_1$ 、 $B_2$  两端可获得脉动的直流电动势  $e_{B1B2}$ ，如图 1(d)。

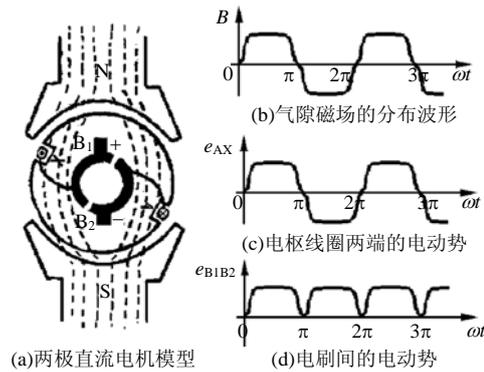


图 1 最简单的两极直流电机工作原理图  
Fig. 1 The operation principle scheme of the simplest two poles DC motor

普通教科书感兴趣的是如何消除该电势的脉动，而本文感兴趣的是如何获得该电势的脉动，进而测得该脉动电势的频率。从图中可以看到，电枢旋转一圈，经过换向器的整流，在电刷间的电势脉动了 2 次。

### 2 对 $m$ 个电枢线圈串联后产生的反电动势分析

图 2 是一直流电动机的展开图。图中  $B(x)$  表示磁通密度的空间分布曲线。为简便起见省略换向片，电刷直接与经过中线的绕组元件相接。假设每个极面下有 10 个绕组元件，并且各个绕组元件均已串联。电刷位于磁极的中心线，则电刷间的电势等于位于电刷间固定位置的各个绕组元件感应电势之和，即可表达为

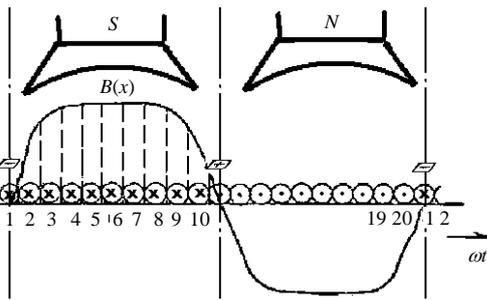


图2 每个极面下10个串联绕组的直流电机展开图  
Fig. 2 DC motor which has 10 winding elements in series under each pole

$$e = \sum_{i=1}^{10} e_i$$

式中 $e_i$ 为各绕组元件的感应电势， $e$ 为各绕组元件的感应电势的叠加，即电刷间的总电势。

同样，感兴趣的还是总电势的脉动频率。当绕组元件转过一对磁极，感应电势脉动2次，可以证明 $m$ 个绕组元件串联产生的电势叠加后将脉动 $2m$ 次。

证明如下：

将周期信号看作一般的周期函数

$$g(t) = g(t + T) \tag{1}$$

式中 $T$ 为周期，它的基频为 $f=1/T$ 。

考虑到电动机的结构，假设每一绕组元件产生的反电动势为式(1)的周期信号，但是由于各绕组元件空间位置不同，它们各自具有不同的相位，每一绕组元件产生的反电动势可表达为

$$g(t + \frac{kT}{m}), k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \tag{2}$$

式中 $m$ 为一串联的绕组元件总数。只要 $g(t)$ 是周期函数，则 $g(t + kT/m)$ 也是周期函数，有

$$g(t + \frac{kT}{m}) = g(t + \frac{kT}{m} + T) \tag{3}$$

设所有的绕组元件的反电动势叠加后的信号为 $G(t)$ ，则有

$$G(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g(t + \frac{kT}{m}) \tag{4}$$

$G(t)$ 也是一个周期函数。

需要找到 $G(t)$ 的周期基频，为此导出以下定理。

定理1：如果 $g(t)$ 为周期为 $T$ 的周期信号，即 $g(t) = g(t + T)$ ，则式(4)定义的合成信号 $G(t)$ 也是周期信号，并具有新的周期

$$T_c = T/m \tag{5}$$

证明：

如果等式 $g(t) = g(t + T)$ 成立，那么

$$\begin{aligned} G(t + T_c) &= \sum_{k=0}^{m-1} g(t + \frac{kT}{m} + T_c) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} g(t + \frac{(k+1)T}{m}) = \sum_{k=1}^m g(t + \frac{kT}{m}) = \\ &= g(t + T) + \sum_{k=1}^{m-1} g(t + \frac{kT}{m}) = g(t) + \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} g(t + \frac{kT}{m}) + \sum_{k=0}^{m-1} g(t + \frac{kT}{m}) = G(t) \end{aligned} \tag{6}$$

因此 $G(t)$ 是一个周期函数，且其周期 $T_c = T/m$ 。证毕。

设合成信号的基频为 $f_c$ ，显然有

$$f_c = 1/T_c = m/T = mf \tag{7}$$

当一个绕组元件转过一对磁极，感应的反电动势脉动2次，则 $m$ 个绕组元件串联转过一对磁极产生的电势叠加后将脉动 $2m$ 次。该脉动频率即为合成信号的基频。

图3是3个绕组元件(即 $m=3$ )的脉动电势叠加的示意图。图的下方实线、虚线、点划线分别代表3个绕组元件旋转时各自产生的反电动势波形。上方是3个绕组元件脉动电势叠加后的波形。若绕组元件转过一对磁极产生的反电动势脉动2次的话，由图可以看到，叠加波形将脉动6次。假设1个绕组元件转过1对磁极的时间是 $2T_1$ ，其EMF波形的周期是 $T_1$ ，基频为 $f_1=1/T_1$ 。由定理1可知其叠加波形的周期 $T_c = T_1/m = T_1/3$ ，其叠加波形的脉动频率即为其叠加波形的基频 $f_1 = 1/T_c = m/T_1 = mf_1 = 3f_1$ 。则3个绕组元件串联在转过一对磁极的时间 $2T_1$ 内，其叠加波形将脉动6次。

上面的结果是在理想状况下得到的。理想状况是指，绕组元件分布是均匀的，产生的反电动势幅值大小也是相等的。而在实际中，各绕组元件分布不可能绝对均匀，产生的反电动势幅值大小也不可能绝对的相等。图4是3个绕组元件串联分布不均匀的情况下的脉动电势叠加示意图。由图4可以看到3个绕组串联在转过一对磁极的时间 $2T_1$ 内，脉动还是6次，但此时其叠加波形的周期显然仍是迭加前的周期 $T_1$ ，叠加信号的基频仍是迭加前的基频 $f_1 = 1/T_1$ 。叠加信号的基频比理想状况小 $m$ 倍(图中

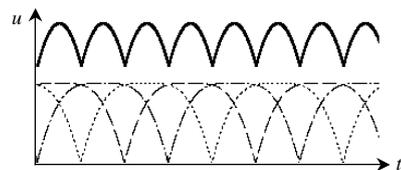


图3 3个绕组元件脉动电势叠加示意图  
Fig. 3 The result of superposition of the EMF ripple waves for 3 windings in series

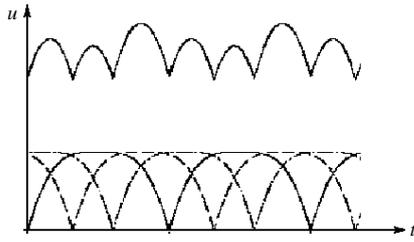


图 4 不均匀分布的 3 个绕组元件脉动电势叠加示意图

Fig. 4 The result of superposition of the EMF ripple waves for 3 unevenly distributed windings in series

是 3 倍), 与叠加前的各绕组元件的反电动势的基频频率相等。

设各绕组元件脉动电势为

$$g_k(t), \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

则有

$$g_k(t) = A_k g(t + \phi_k), \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \quad (8)$$

式中:  $A_k$  为第  $k$  个绕组元件脉动电势的幅值;  $\phi_k$  为第  $k$  个绕组元件脉动电势的相移。它们可能各不相同。叠加波形  $G(t)$  有

$$G(t) = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k g(t + \phi_k) \quad (9)$$

上式可表达为

$$G(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k g(t + \frac{kT}{m}) + \sum_{k=0}^{m-1} [A_k g(t + \phi_k) - A_k g(t + \frac{kT}{m})] \quad (10)$$

不失一般性可在众实际绕组元件中选择其中 1 个绕组元件作为基准的理想绕组, 不妨选  $k=0$  的绕组元件, 有  $A=A_0$ ,  $\phi_0=0$ 。则上式可改写为

$$G(t) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k g(t + \frac{kT}{m}) + \sum_{k=1}^{m-1} [A_k g(t + \phi_k) - A_k g(t + \frac{kT}{m})] \quad (11)$$

式中: 第 1 项和为理想的绕组元件脉动电势波形叠加; 第 2 项为各实际绕组元件脉动电势波形与理想波形的差之和。将各实际绕组元件脉动电势波形与理想波形的差称为误差波形。假若各实际绕组元件脉动电势波形与理想波形在相位与幅值上相差不大, 那么误差波形就很小, 第 2 项不会大, 况且第 2 项的相加项数比第 1 项的相加项数又少 1 项, 因此, 第 2 项的和要比第一项的和的小得多, 此时, 主要的电流脉动频率还是由第 1 项和的基频决定。

因此, 在实际中只要绕组元件分布不是很不均匀, 产生的反电动势幅值差别不是很大, 在式(11)中第 2 项的和比第 1 项的和的小得多, 此时, 主要的电流脉动频率还是由第 1 项和的基频决定, “ $m$  个绕组串联产生的电势叠加后脉动频率增加  $m$  倍”就

成立。

### 3 整个电枢线圈产生的反电动势分析

#### 3.1 1 个支路的反电动势分析

设直流电动机的磁极对数  $p$ , 每个支路串联元件数  $m$ , 当 1 个支路的  $m$  个串联元件转过 1 对磁极, 它们产生的电势叠加后脉动  $2m$  次, 则旋转 1 周, 即转过  $p$  对磁极的脉动次数为  $2mp$ 。因此, 对于转速为  $n$  转/分钟的直流电动机, 每 1 支路感应反电动势产生的电流脉动频率为  $f = 2mpn/60$  (Hz)。

#### 3.2 整个电枢的反电动势分析

在直流电动机中各支路还需并联。若各支路并联后产生的脉动电流在相位上不是重合的, 那么叠加后其最终的合成脉动频率还要倍乘, 结果表达为  $f = 2mpnj'/60$ ,  $j'$  为脉动电流不重合的“独立”的并联支路数。

上述分析表明, 反电动势造成的直流电动机的电流脉动频率  $f$  与转速  $n$ 、磁极对数  $p$ , 每个支路串联元件数  $m$  以及脉动电流不重合的“独立”的并联支路数  $j'$  有关, 与电刷对数、换向片数、齿槽数无直接的关系。本文的结果在某种场合与先前文献表述是一致的。如在磁极对数等于 1 的时候。此时绕组并联数为 2, 总的线圈元件数(换向片数)  $k=2m$ , 我们之间的公式可以统一。

## 4 结论

本文对直流电动机旋转时反电动势造成的脉动电流频率进行了严格的数学分析和推导。反电动势造成的电流脉动频率  $f$  与转速  $n$ 、磁极对数  $p$ , 每个支路串联元件数  $m$  以及脉动电流不重合的“独立”的并联支路数  $j'$  有关, 与电刷对数、换向片数、齿槽数无直接的关系。本结果对各种类型的直流电动机的无传感器转速测量方法提供了 1 个进一步分析的基础。

## 参考文献

- [1] Schmidt P B, Wijanayake A H. Sensorless control of a permanent magnet synchronous machine down to near zero speed applied to position motion control[C]. Proc of IEEE IAS, San Diego, CA, Oct. 1996: 21-28.
- [2] Harnefors L, Nee H. A general algorithm for speed and position estimate of ac motors[J]. IEEE Trans. on Industrial Electronics, 2000, 47(1): 77-83.
- [3] 邹继斌, 徐永向, 于成龙. 正弦波无刷直流电机的新型转子位置检测方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(12): 47-49. Zou Jibin, Xu Yongxiang, Yu Chenglong. A novel detecting method of the rotor position of PMSM[J]. Proceedings of the CSEE, 2002,

- 22(12): 47-49(in Chinese).
- [4] 陈硕, 辻峰男, 山田英二. 感应电机无速度传感器矢量控制系统的定子电阻在线辨识[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(2): 88-93. Chen Shuo, Tsuji Mineo, YamadaEiji. On-line identification of stator resistance for sensorless vector control system of induction motors [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(2): 88-93(in Chinese).
- [5] 刘毅, 贺益康, 秦峰, 等. 基于转子凸极跟踪的无位置传感器永磁同步电机矢量控制研究[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(17): 121-126. Liu Yi, He Yikang, Qin Feng, et al. Investigation of rotor saliency-tracking based sensorless vector control drive for pmsm [J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(17): 121-126(in Chinese).
- [6] 张千帆, 裴宇龙, 程树康. 轴径向气隙混合磁路多边形耦合电机轴向励磁绕组的反电势及其位置传感器机理[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(22): 136-141. Zhang Qianfan, Pei Yulong, Cheng Shukang. Position sensor principle and axial exciting coil of axial and radial air gap hybrid magnet circuit multi-coupling motor[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(22): 136-141(in Chinese).
- [7] 万军, 王建海, 马彦兵, 等. 基于交互式模型参考自适应系统策略的无速传感器矢量控制系统[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(23): 163-166. Wan Jun, Wang Jianhai, Ma Yanbing, et al. Speed sensorless vector control system based on mutual mras scheme[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(23): 163-166(in Chinese).
- [8] 张文海. 一种测试微型直流电动机转速的方法[J]. 无线电, 1978, (3): 7. Zhang Wenhai. A method for testing rotary speed of dc micro motor[J]. Radio, 1978(3): 7(in Chinese).
- [9] 陈稚文. 直流微电机测速新方法[J]. 微电机, 1999, 32(1): 36-37. Chen Zhiwen. A novel method for speed measurement of dc micro motor[J]. Micromotor, 1999, 32(1): 36-37(in Chinese).
- [10] 陈稚文. 采用频谱法提高直流电机测速精度[J]. 微电机, 1999, 32(3): 33-34, 36. Chen Zhiwen. Improving speed measurement precision of dc motor by using frequency spectra[J]. Micromotor, 1999, 32(3): 33-36(in Chinese).
- [11] 黄进, 黄建华, 陈墩, 等. 基于小波分析的直流电机转矩-转速特性测试[J]. 中小型电机. 2001, 28(2): 49-53. Huang Jin, Huang Jianhua, Chen Dun, et al. Measurement of DC motor torque-speed characteristic based on wavelet analysis[J]. S&M Electric Machines, 2001, 28(2): 49-53(in Chinese).
- [12] 魏云冰, 黄进, 黄建华. 基于小波包变换的电机测试信号去噪处理[J]. 电工技术学报, 2001, 16(5): 64-67. Wei Yunbing, Huang Jin, Huang Jianhua. Removing noises from signals of motor measurement by wavelet packet[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2001, 16(5): 64-67(in Chinese).
- [13] 陈墩, 黄进, 马健, 等. 小波包变换在电机性能测试中的应用能力[J]. 浙江大学学报(工学版), 2003, 37(2): 235-238. Chen Tun, Huang Jin, Ma Jian, et al. Application of wavelet packet transform in motor performance test[J]. Journal of Zhejiang University(Engineering Science), 2003, 37(2): 235-238(in Chinese).
- [14] 陈墩. 小波分析在电机性能自动测试系统中的应用[D]. 杭州: 浙江大学, 2003. Chen Tun. The applications of wavelet analysis theory in the domain of motor test[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003(in Chinese).
- [15] 牛发亮, 黄进. 渐进信号瞬时频率提取及其在电机性能测试中的应用[J]. 电工技术学报. 2006, 21(4): 122-126. Niu Faliang, Huang Jin. Instantaneous frequency extraction of asymptotic signal and its applications in motor performance test[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2006, 21(4): 122-126(in Chinese).
- [16] 卢道英, 王晓明. 微型直流电动机转速测量的一种方法[J]. 微特电机, 1985, 13(3): 31-33. Lu Daoming, Wang Xiaoming. A method of measuring rotary speed of dc micro motor[J]. Small & Special Electrical Machines, 1985, 13(3): 31-33(in Chinese).
- [17] 张文海. 直流电机转速的特殊测试方法[J]. 电工技术杂志, 1997(3): 40-42. Zhang Wenhai. Special approach to test rotary speed of dc motor [J]. Electrotechnical Journal, 1997(3): 40-42(in Chinese).
- [18] Tobias G. Method for determining the frequency of the current ripple in the armature current of a commutated DC motor[P]. United States Patent. NO 20040098213. May 20, 2004.
- [19] Thomas L, Thomas F. Method for detecting the rotational position of the drive shaft of a dc motor[P]. United States Patent. NO 2003012251, 2003-07-03.
- [20] Tobias G. Method for correcting the determination of the rotational position of a commutated DC motor drive shaft[P]. U. S. Patent. NO 20040100250, 2004-05-27.
- [21] Hilaret M. Auger F. Sensorless speed measurement using current harmonic spectral estimation in a DC- motor[C]. Proceedings of International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, SPEEDAM2006, 2006, Taormina, Sicily, Italy. S28/14-19.

收稿日期: 2007-04-06.

作者简介:

袁宝国(1946—), 男, 硕士, 教授, 近期研究方向为高速电路信号完整性及直流电动机无传感器测速, bgyuan@81890.net;

王胜国(1945—), 男, 博士, 终身教授, 研究兴趣有系统与控制、算法及应用。

(责任编辑 丁玉瑜)