

描述钢淬透性的一个新数学模型*

金 满 连建设 江中浩
(吉林大学材料科学与工程学院, 长春 130025)

摘 要 提出了一个新的描述钢淬透性的数学模型及淬透性表征参数. 根据端淬实验数据和实验曲线导数变化规律, 用线性试探法建立了端淬曲线微分方程, 然后解得硬度分布函数. 硬度分布函数将端淬曲线描述为直线段和曲线段构成的分段函数: 直线段描述试样端部获得全部马氏体区域的硬度, 在此区域硬度保持恒定最大值; 在曲线段硬度递减, 最后趋近恒定最低值. 钢的淬透性用数学参数来表示, 它数值上等于从原点到硬度分布曲线拐点的距离. 用非线性模拟程序代入实验值获得了淬透性值. 模拟结果表明, 所获得的模型与实验值吻合很好.

关键词 钢, 淬透性, 数学模型, 端淬曲线

中图法分类号 TG115.6

文献标识码 A

文章编号 0412-1961(2006)03-0265-08

A NEW MATHEMATICAL MODEL DESCRIBING HARDENABILITY OF STEELS

JIN Man, LIAN Jianshe, JIANG Zhonghao

College of Materials Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025

Correspondent: LIAN Jianshe, professor, Tel: (0431)5095875, E-mail: lianjs@jlu.edu.cn

Supported by National Key Basic Research and Development Programme of China (No.2004CB619301)

Manuscript received 2005-11-10

ABSTRACT A new mathematical model and a parameter describing the hardenability of steels were suggested. A differential equation of the Jominy curves has been constructed according to the Jominy experimental data and the change of derivative of the Jominy curve. The linear trial method was used to choose the optimal type of function. The model for calculating the hardness distribution has been described as the subsection functions consisting of straight line and curve. The straight depicts the hardness of the entire martensite region, which has a constant maximum value. In addition, the hardness is continuously reduced in the region of the curve until the hardness approaches a minimum value. The hardenability of steel has been expressed as a parameter equal to the distance from origin to inflexion of Jominy curve in numerical value, which can be obtained by a method of the non-linear curve fitting to the Jominy test data. Very good agreements have been obtained between the simulated curves and the experimental measurements.

KEY WORDS steel, hardenability, mathematical model, Jominy curve

淬透性是钢的重要特性, 是钢淬火时获得马氏体的能力. 钢的淬透性尤其是结构钢的淬透性, 在冶金、机械及热处理中是非常重要的设计依据. 目前, 国内外最常用的淬透性测试及表示方法是末端淬火法 (Jominy testing), 所测得的曲线称淬透性曲线. 近年来, 随着计算机在材料设计和热处理工艺设计中的广泛应用, 淬透性曲线的数学模型及计算方法的研究日益受到人们的重视.

1943 年 Field 提出了依据钢的理想临界直径来推算出端淬曲线的方法. 1946 年 Boyd 和 Field 又提出了一系列计算用图表^[1]. 这是以计算和图解法相结合的方法, 但不能获得连续曲线. 由于理想临界直径是假定试样在无穷大的冷却速度下计算获得的, 和实际偏离, 导致计算误差很大^[2]. 1969 年 Just^[3] 首次采用计算机多元回归分析技术以化学成分和端淬距离为自变量建立了直接计算端淬曲线的解析式, 减少了计算误差, 但当端淬距离大于 40 mm 时误差过大不能使用. 此后 Breen 等^[4] 也提出了类似的回归方程, 此模型克服了上述缺陷, 但只适合于碳含量小于 0.35% 的钢. 随后提出的淬透性计算模型在计算精度上都提高^[5-12]. 另外还有以计算

* 国家重点基础研究发展规划资助项目 2004CB619301

收稿日期: 2005-11-10

作者简介: 金 满, 男, 1949 年生, 副教授

临界淬火直径和临界冷却速度的方法去推算淬透性曲线硬度分布的研究 [13-16]。近年来,用数据库和人工神经网络技术预测淬透性提高了预测精度 [17-22],但不能建立解析函数。现有各类淬透性模型在一定误差和使用范围内均可成功地描述端淬实验硬度分布,但在以下两个方面存在不足之处。

(1) 现有模型都把淬透性曲线当作始终递减的连续函数来处理,这适于淬透性较低的钢,对淬透性较高的钢并不适合。淬透性较高的钢,由于临界冷却速度较低,在大于临界冷却速度范围内都能获得全部马氏体,在试样端部区硬度出现一条直线,并不连续下降。

(2) 现有数学模型尚未解决好如何用确定数学参数来表示钢的淬透性值的问题。钢的淬透性是由材料的化学成分和原始组织状态所决定的,因此它是材料的固有属性,不应与端淬距离有关。要使数学模型更加具有理论性,应以独立参数来描述这种属性。现有模型大多采用多项式形式,虽然得到了各合金元素的淬透性系数,但无法分离出这些合金元素共同起作用后的钢的淬透性表征参数。

本工作拟建立新的淬透性曲线数学模型,以准确地描述淬透性曲线,并且做到用一确定数学参数来表示钢的淬透性。

1 淬透性曲线硬度分布函数推导

1.1 实验曲线分析

为得到更加具有统计意义的数据,将淬透性带上、下限取平均值获得单一曲线。曲线可分为以下两类:(1)中、低淬透性钢。这类钢的淬透性曲线端部直线段不明显,硬度几乎是端部开始连续递减,如图 1a 所示。(2)高淬透性钢。在端部一段距离内硬度值保持不变,超过这一距离后才开始下降,如图 1b 所示。从这两类曲线可以看出,硬度在试样端部获得最大值,在试样尾部趋近一最小值,中间为单调递减。以往的研究都把硬度分布函数直接设为化学成分、端淬距离和晶粒度的多元函数,所以无法提出钢的淬透性系数。本工作先不考虑化学成分等其它因素,而直接建立硬度与端淬距离的解析函数,然后从中选择一个能够显著改变曲线变化率的参数(将其命名为淬透性系数)。淬透性系数与化学成分的关系在后期工作另行研究。

实际上所有的钢在试样端部都存在硬度直线段,只是线段长度不同而已。本文作者认为,中、低淬透性钢直线段长度很小,可以忽略不计。故先建立中、低淬透性钢模型,然后再推演到一般形式。

1.2 中、低淬透性钢硬度分布函数

1.2.1 硬度分布物理模型假设 为使数学模型在极限状态下有意义,把端淬试样看做是半无限长杆。

设端淬距离为 x , 硬度分布函数记为 $J(x)$, 在端部 $x=0$ 处喷水冷却,假设在端部区域不存在直线段,冷却

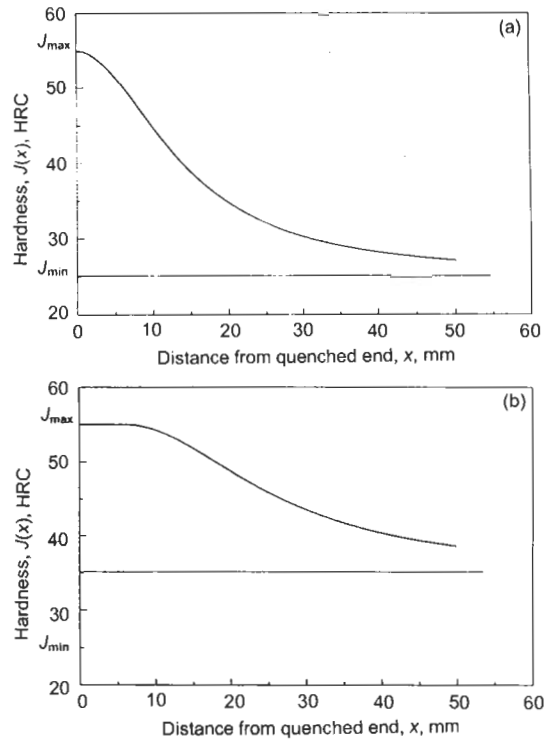


图 1 淬透性实验曲线

Fig.1 Jominy curves of the steels with lower hardenability (a) and higher hardenability (b)

后硬度分布曲线如图 1a 所示。当 $x=0$ 时,取得最大值 J_{max} ; 当 $x \rightarrow \infty$ 时趋近最小值 J_{min} 。

为研究简便起见,引进函数 $U(x)$, 令 $J(x)$ 为 $U(x)$ 的线性组合, 则

$$J(x) = AU(x) + J_{min} \tag{1}$$

从图 1a 获得边界条件如下:

$$J(x)|_{x=0} = J_{max} \tag{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} J(x) = J_{min} \tag{3}$$

将边界条件式 (2) 代入式 (1), 得

$$AU(0) = J_{max} - J_{min}$$

取最简形式, 令 $U(0) = 1$, 得 $A = J_{max} - J_{min}$, 代入式 (1), 则

$$J(x) = (J_{max} - J_{min})U(x) + J_{min} \tag{4}$$

1.2.2 硬度分布试探解及选定 硬度分布函数 $J(x)$ 可由式 (4) 描述。整理后函数 $U(x)$ 的具体表达式为

$$U(x) = \frac{J(x) - J_{min}}{J_{max} - J_{min}}$$

$U(x)$ 与 $J(x)$ 具有线性关系, 函数 $U(x)$ 的变化规律与硬度分布函数 $J(x)$ 相同, 只是最大值和最小值变为 1 和 0, 如图 2 所示.

$U(x)$ 在 $[0, \infty)$ 区域递减, 其导数为负值. 满足这些条件的微分方程的最简单形式为

$$\frac{dU}{dx} = -kx^n U^m \quad (k \neq 0, 0 \leq x < \infty) \quad (5)$$

边界条件为

$$U(x)|_{x=0} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0 \quad (6)$$

解方程式 (5) 可以得到函数 $U(x)$, 问题是当指数 n 和 m 取何值时所得函数 $U(x)$ 最逼近实验值. n 和 m 可取自然数, 因 $U(x)$ 纵坐标对称, 故 n 只取奇数 1, 3, 5...; 而 m 取 1, 2, 3... 用试探法选定 n 和 m 的最佳值.

(1) 设 $n=1, m=2$, 微分方程式 (5) 的具体形式为

$$\frac{dU}{dx} = -kxU^2$$

两边积分, 则

$$\int \frac{1}{U^2} dU = -k \int x dx$$

解得

$$U(x) = \frac{1}{(k/2)x^2 + C}$$

代入边界条件式 (6), 得 $C=1$, 令 $k/2 = K$, 则

$$U(x) = \frac{1}{Kx^2 + 1}$$

将上式代入式 (4) 即解得硬度分布函数

$$J_{12}(x) = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{Kx^2 + 1} + J_{\min} \quad (7)$$

式 (7) 是当 $n=1, m=2$ 时的试探解, 此解是否逼近实验曲线, 需要代入实验值进行检验. 为便于比较, 对式

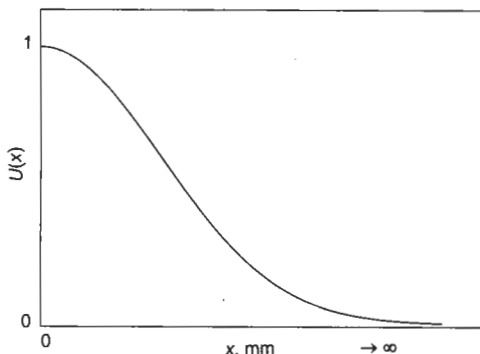


图 2 函数 $U(x)$ 曲线
Fig.2 Curve of function $U(x)$

(7) 进行线性变换, 移项后整理得

$$\frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{12}(x) - J_{\min}} = Kx^2 + 1 \quad (8)$$

把材料的端淬实验数据 J_{\max}, J_{\min}, x_i 和 $J(x_i)$ 代入式 (8), 并令

$$Y_i^{12} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{12}(x_i) - J_{\min}}, \quad X_i = x_i^2$$

得线性方程

$$Y_i^{12} = KX_i + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

若 N 个实验点 (X_i, Y_i) 描绘出直线关系, 则说明所得函数式 (7) 逼近实验值. 采用相同方法, 对 $n=1$ 和 $m=1, 3, 4$ 时的微分方程进行检验.

(2) 当 $n=1, m=1$ 时

$$J_{11}(x) = (J_{\max} - J_{\min})\exp(-Kx^2) + J_{\min}$$

$$Y_i^{11} = KX_i$$

式中

$$Y_i^{11} = -\ln \frac{J_{11}(x_i) - J_{\min}}{J_{\max} - J_{\min}}, \quad X_i = x_i^2$$

(3) 当 $n=1, m=3$ 时

$$J_{13}(x) = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{\sqrt{2Kx^2 + 1}} + J_{\min}$$

$$Y_i^{13} = 2KX_i + 1$$

式中

$$Y_i^{13} = \left(\frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{13}(x_i) - J_{\min}} \right)^2, \quad X_i = x_i^2$$

(4) 当 $n=1, m=4$ 时

$$J_{14}(x) = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{\sqrt[3]{3Kx^2 + 1}} + J_{\min}$$

$$Y_i^{14} = 3KX_i + 1$$

式中

$$Y_i^{14} = \left(\frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{14}(x_i) - J_{\min}} \right)^3, \quad X_i = x_i^2$$

选择常用结构钢 40Cr 以及 25CrMnNiMo, 利用表 1 中的端淬实验数据 [23], 求得以下 4 组数据点: $(Y_i^{11}, x_i^2), (Y_i^{12}, x_i^2), (Y_i^{13}, x_i^2), (Y_i^{14}, x_i^2)$. 每组再取 12 个实验点 ($i=1, 2, \dots, 12$), 看哪组数据点分布最接近直线. 表 1 中 $x=0$ 处的硬度为 1.5 mm 处的硬度, 最低硬度为正火硬度. 线性试探解 Y_i^{nm} 的实验数据点分布分别见图 3. 从图可见, Y_i^{12} 呈直线关系最明显.

表 1 40Cr 和 25CrMnNiMo 钢端淬实验数据
Table 1 Jominy test data of 40Cr and 25CrMnNiMo steels

Jominy distance x , mm	Hardness, HRC	
	Steel 40Cr	Steel 25CrMnNiMo
0	56.5	47.5
3	55.0	45.0
6	51.5	39.5
9	46.0	33.5
12	41.5	30.0
15	38.0	27.5
18	35.5	25.5
21	34.0	23.5
24	32.5	22.5
27	31.0	21.5
30	30.0	21.0
33	29.0	20.5
J_{min}	25.0	18.0 ¹⁾

1) Converted value from Brinell hardness

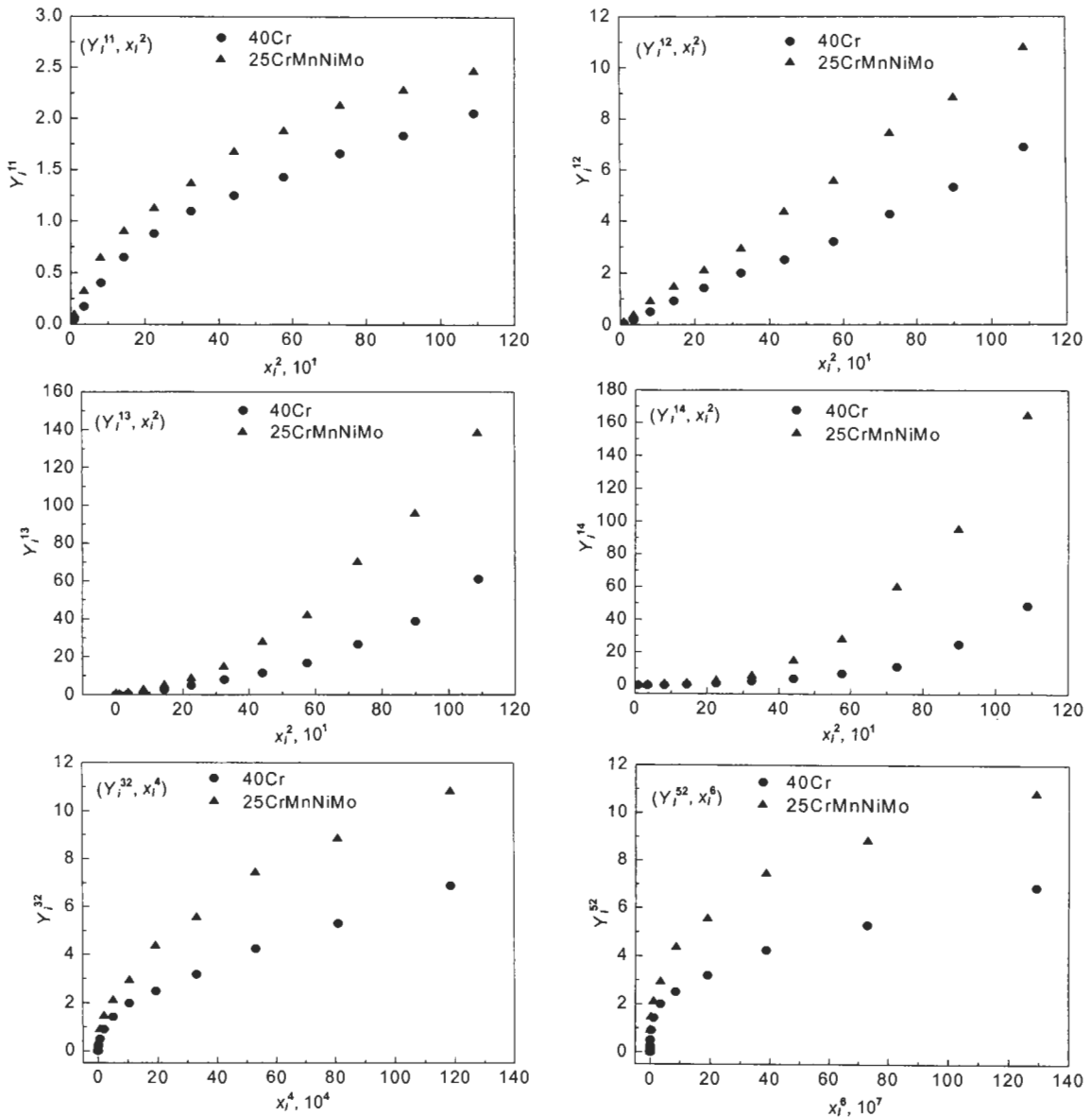


图 3 数据点 (Y_i^{nm}, x_i^2) , (Y_i^{32}, x_i^4) 与 (Y_i^{52}, x_i^6) 的分布图
Fig.3 Distributions of datum points (Y_i^{nm}, x_i^2) , (Y_i^{32}, x_i^4) and (Y_i^{52}, x_i^6)

再取 $n=3, 5$ 和 $m=2$ 进行检验, 结果偏离很大, 见图 3 中 (Y_i^{32}, x_i^4) 和 (Y_i^{52}, x_i^6) . 这说明当 $n=1$ 和 $m=2$ 时所得微分方程最逼近实验曲线. 故选定微分方程为

$$\frac{dU}{dx} = -kxU^2$$

中、低淬透性钢硬度分布函数

$$J(x) = \frac{J_{max} - J_{min}}{Kx^2 + 1} + J_{min} \quad (9)$$

式中, K 为待定系数. K 取不同值时, 硬度分布函数 $J(x)$ 的形状随之改变, 如图 4 所示. 图中曲线 K_A, K_B 和 K_C 分别表示具有不同 K 值的钢, K 值越小则曲线递减速率越慢, 从而在相同端淬距离上所获得的马氏体量越多. 可见 K 是直接和淬透性有关的系数, 它与端淬距离无关.

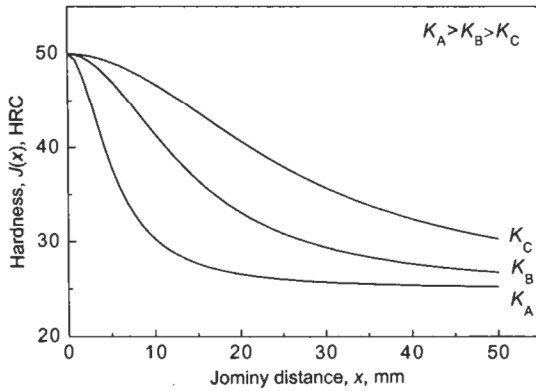


图 4 式 (9) 中 K 值对端淬曲线的影响
Fig.4 Effect of K in Eq.(9) on the Jominy curve

1.3 高淬透性钢硬度分布函数

从高淬透性钢的实验曲线可知，它由直线段和递减曲线组成，并在连接点 (b, J_{max}) 连续可导，如图 5 所示。

高淬透性钢实验曲线的直线段可以常数项表示，而曲线段表达式应与中、低淬透性钢硬度分布函数相同，只要平移坐标即可。得到如下分段函数：

$$J(x) = \begin{cases} J_{max} & 0 \leq x < b \\ \frac{(J_{max} - J_{min})}{K(x - b)^2 + 1} + J_{min} & x \geq b \end{cases} \quad (10)$$

式中， b 为试样端部获得 100% 马氏体组织的直线段长度，mm。

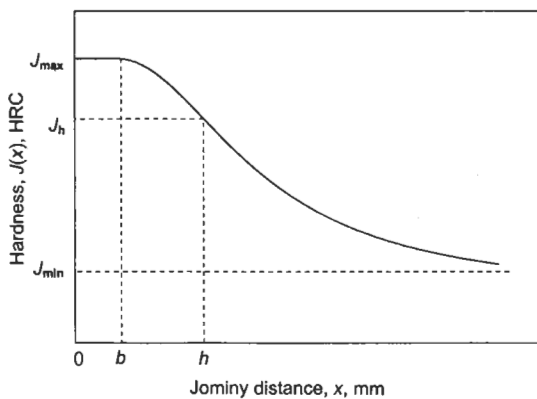


图 5 高淬透性钢的硬度分布函数

Fig.5 Hardness distribution curve of higher hardenability steels

2 钢的淬透性系数和淬透性模型

高淬透性钢硬度分布函数式 (10) 中，如果 $b = 0$ ，即得到中、低淬透性钢函数式 (9)，故式 (10) 即为以上两类钢淬透性模型的统一表达式。式中 b 和 K 均与淬透

性有关， b 为长度单位，要想用同一参数表示淬透性，必须对 K 进行变量代换，赋以长度单位。对式 (10) 的第二式求一、二阶导，得

$$\frac{dJ}{dx} = -2K(J_{max} - J_{min}) \frac{x - b}{[K(x - b)^2 + 1]^2}$$

$$\frac{d^2J}{dx^2} = -2K(J_{max} - J_{min}) \frac{1 - 3K(x - b)^2}{[K(x - b)^2 + 1]^3}$$

令 $d^2J/dx^2 = 0$ ，求拐点 (h, J_h) 。因 $K \neq 0$ ，且 $[K(x - b)^2 + 1]^3 \neq 0$ ，则必有 $1 - 3K(x - b)^2 = 0$ 。解得拐点距离

$$h = b + \sqrt{1/(3K)}$$

故

$$K = \frac{1}{3(h - b)^2} \quad (11)$$

从图 5 可知，拐点距离 h 中包含直线段长度 b ，因此钢的淬透性值可用曲线拐点距离 h 表示（其单位为 mm），命名其为钢的淬透性系数。

将式 (11) 代入式 (10)，即可获得钢淬透性数学模型的一般式。即

$$J(x) = \begin{cases} J_{max} & 0 \leq x < b \\ \frac{(J_{max} - J_{min})}{(x - b)^2/[3(h - b)^2] + 1} + J_{min} & x \geq b \end{cases} \quad (12)$$

从式 (12) 可以看出， h 值越大硬度越高，钢的淬透性越好。

3 淬透性系数求解及模型检验

采用 Origin 非线性模拟程序，以式 (12) 作为拟合函数代入实验数据，可获得参数 h, b 和 J_{min} 的最佳值。最高硬度值 J_{max} 在所有实验数据中全部给出，故直接代入。实验数据取自文献 [23] 和文献 [24]，并取端淬曲线上、下限的平均值。对其中 210 种钢的淬透性实验曲线进行了模拟，获得其淬透性系数。

部分钢种的淬透性系数 h 值见表 2（表中 J_{max} 为实验值，而 J_{min} ， b 和 h 为模拟值）。将表中数据代入淬透性模型式 (12) 绘出硬度分布曲线，并与实验值进行比较。结果表明，模拟曲线与实验值很好吻合，平均相对误差小于 2%，如图 6 所示。

表 2 钢的淬透性系数
Table 2 Hardenability coefficients, h , of steels, J_{\min} and b obtained by simulated function Eq.(12)

Steel No.	Name	Hardness, HRC		b mm	h mm
		J_{\max} [23,24]	J_{\min}		
1	35CrMo	54.5	28.9	0.38	10.43
2	45CrMo	59.0	39.2	2.18	17.05
3	20MnMo	44.0	16.0	0.36	3.55
4	42MnMo	58.5	22.7	1.14	5.00
5	52MnMo	62.0	25.9	1.81	7.67
6	35CrMnMo	54.5	27.9	0.68	11.04
7	40CrMnMo	56.5	35.4	1.90	12.93
8	45CrMnMo	59.0	37.1	2.15	18.15
9	50CrMnMo	62.0	40.7	4.68	20.13
10	30CrMnNiMo	52.5	21.6	0.93	6.47
11	40CrMnNiMo	57.0	28.7	2.07	10.89
12	60CrMnNiMo	63.0	43.3	3.83	16.47
13	1038H	54.5	18.5	0.45	2.96
14	1330H	52.5	19.5	0.53	7.56
15	1345H	59.5	33.0	2.00	9.08
16	5120H	44.0	12.1	0.26	4.28
17	5140H	56.5	23.4	0.58	8.47
18	5150H	62.0	28.3	1.34	9.99
19	5160H	62.5	31.7	3.46	12.78
20	8620H	44.5	14.9	0.61	5.07
21	8630H	52.5	22.8	1.07	6.46
22	8642H	58.5	29.0	2.73	11.4
23	8655H	62.0	39.4	4.11	15.95
24	94B17H	42.5	11.8	1.55	11.06
25	45MnB	52.5	17.5	2.07	11.43
26	94B30H	52.5	21.2	2.17	15.35
27	81B45H	59.5	31.5	3.82	16.15
28	4320H	44.5	17.9	0.16	6.12
29	4340H	56.5	43.2	5.85	25.51
30	4161H	62.5	32.9	8.15	39.66
31	40CrNi1Mo	56.5	37.5	5.23	21.57
32	50CrNi1Mo	62.0	39.2	8.61	35.78

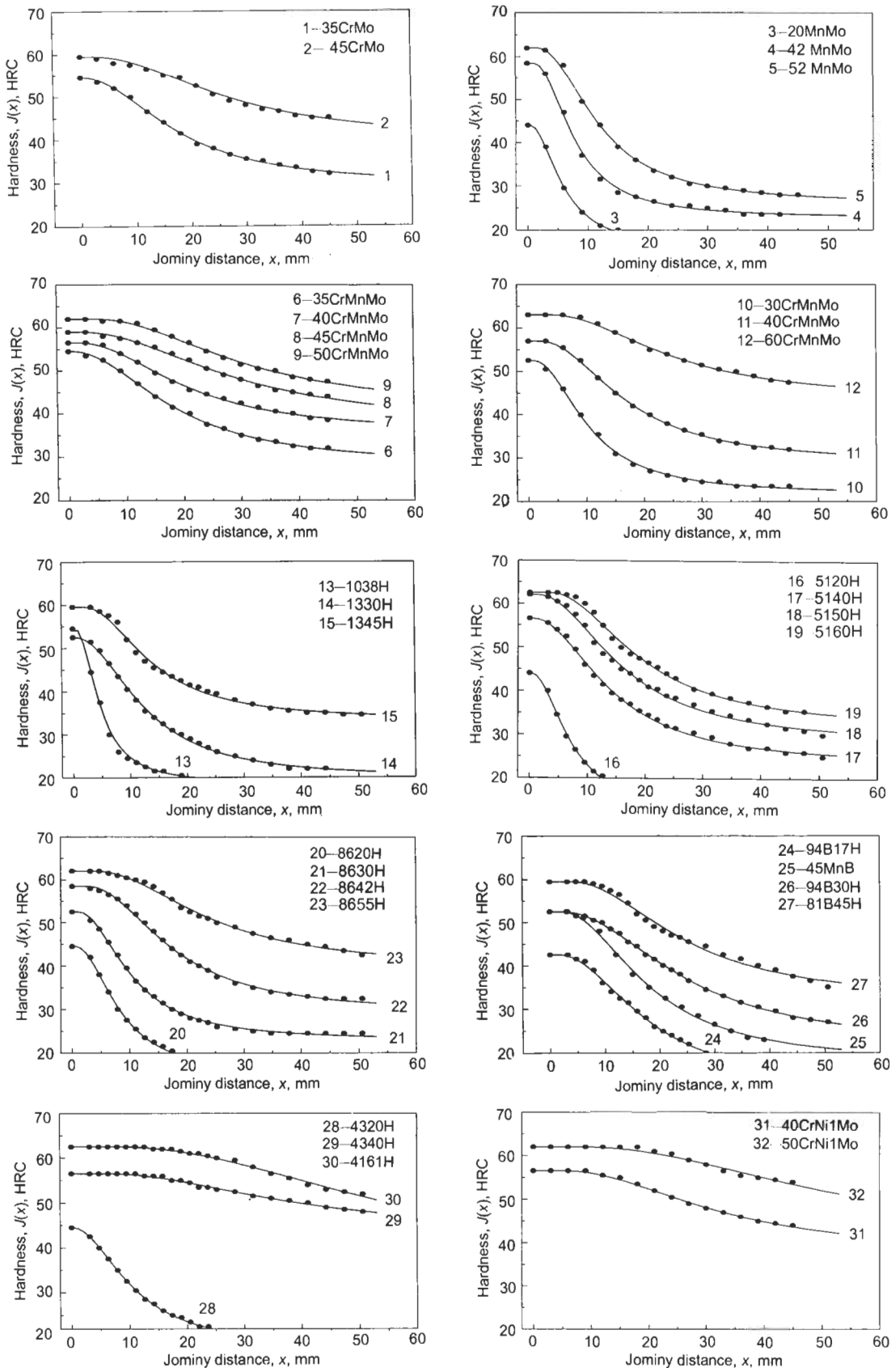


图 6 32 种钢的硬度分布实验值与模拟曲线的比较

Fig.6 Comparison of simulated curves (—) and measured values (●) of the hardness distribution of 32 steels in Table 2

4 结论

(1) 钢的淬透性数学模型可由如下函数式表示:

$$J(x) = \begin{cases} J_{\max} & 0 \leq x < b \\ \frac{(J_{\max} - J_{\min})}{(x - b)^2 / [3(h - b)^2] + 1} + J_{\min} & x \geq b \end{cases}$$

式中, x 为端淬距离; h 为淬透性系数; J_{\max} 为钢的淬硬性; J_{\min} 为试样尾部最低硬度, 相当于钢的正火硬度; b 为试样端部全部获得马氏体区域的长度, 在这个区域硬度获得最高值 J_{\max} . 以上各参数的最佳值可用曲线拟合法获得.

(2) 钢的淬透性值可用淬透性系数 h 表示 (其数值等于曲线拐点的总距离). h 值越大, 获得全部马氏体区域越长, 同时曲线下降速度越减缓, 说明淬透性越好.

(3) 提出的淬透性模型适用于所有钢种. 模型可准确地描述端淬试样的硬度分布, 尚不能直接用于端淬曲线的预测计算. 要完成预测计算, 需要建立淬透性系数及其它参数的预测模型. 这些系数的影响因素是与材料固有属性有关的因子, 如材料化学成分等.

参考文献

- [1] Wu J X, Zhou G Y, Xun Y M. *Application Technology of Hardenability of Steels*. Beijing: China Machine Press, 1994: 308
(吴季恂, 周光裕, 荀毓闽. 钢的淬透性应用技术. 北京: 机械工业出版社, 1994: 308)
- [2] Weymueller C R. *Met Prog*, 1973; 103: 93
- [3] Just E. *Met Prog*, 1969; 95: 871
- [4] Breen D H, Walter G H, Sponzilli J T. *Met Prog*, 1973; 104: 43
- [5] Yu B H. *Iron Steel*, 1985; 20(3): 40
(余柏海. 钢铁, 1985; 20(3): 40)
- [6] Lund T. *Scan J Metall*, 1990; 19: 227
- [7] Andersson K, Kivivuori S, Korhonen A S. *Mater Sci Forum*, 1994; 163: 683
- [8] Filetin T, Liscic B, Galinec J. *Adv Mater Processes*, 1995; 148: 2
- [9] Cook W T, Morris P F, Woollard L. *J Mater Eng Perform*, 1997; 6: 443
- [10] Komenda J, Sandstrom R, Tukiainen M. *Steel Res*, 1997; 89: 132
- [11] Dobrzanski L A, Sitik W. *J Mater Process Technol*, 1999; 90: 467
- [12] Miao Z H, Hu W Y. *Trans Met Heat Treat*, 2000; 21(1): 57
(缪宗华, 胡为颖. 金属热处理学报, 2000; 21(1): 57)
- [13] Thomas K, Gearv E A, Avis P, Bishop D. *Mater Design*, 1992; 13: 17
- [14] Mostert R J, van Rooyen G T. *Mater Sci Technol*, 1991; 7: 803
- [15] Li M V, Niebuhr D V, Meekisho L L, Atteridge D G. *Metall Mater Trans*, 1998; 29B: 661
- [16] Dobrzanski L A, Sitek W. *J Mater Process Technol*, 1997; 64: 117
- [17] Geary E A, Cook W T, Lane K A G. *Mater Sci Forum*, 1994; 163: 689
- [18] Vermeulen W G, van der Wolk P J, de Weijer A P, van der Zwaag S. *J Mater Eng Perform*, 1996; 5: 57
- [19] Filetin T, Liscic B, Galinec J. *Heat Treat Met*, 1996; 23: 63
- [20] Dobrzanski L A, Sitek W. *J Mater Process Technol*, 1998; 78: 59
- [21] Dobrzanski L A, Sitek W. *J Mater Process Technol*, 1999; 92-93: 8
- [22] Yao X, Zhu Z C, Gu J F, Hu M J, Zhang W M. *Mater Mech Eng*, 2003; 27(8): 8
(姚新, 朱祖昌, 顾剑锋, 胡明娟, 张伟民. 机械工程材料, 2003; 27(8): 8)
- [23] Fu D Z, Lin H G. *Hardenability Handbook of Steels*. Beijing: China Machine Press, 1973
(傅代直, 林慧国. 钢的淬透性手册. 北京: 机械工业出版社, 1973)
- [24] AMS Handbook Committee. *Metals Handbook*. 9th ed., Vol. 1, Metals Park, Ohio: American Society for Metals, 1978