

第八章 非线性控制系统

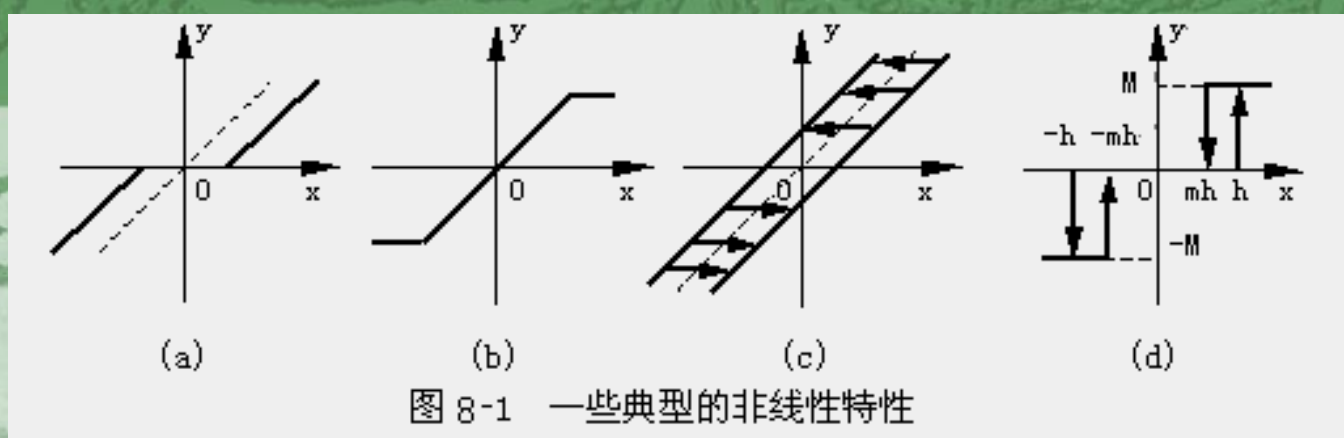
控制系统有线性性和非线性性之分。在以上各章，讨论了线性系统各方面的问题。但是严格地说，理想的线性系统在实际中并不存在。在分析非线性系统时，人们首先会想到使用在工作点附近小范围内线性化的方法，当实际系统的非线性程度不严重时，采用线性方法去进行研究具有实际意义。但是，如果实际系统的非线性程度比较严重，则不能采用在工作点附近小范围内线性化的方法去进行研究，否则会产生较大的误差，甚至会导致错误的结论。这时应采用非线性系统的研究方法进行研究。

非线性系统的分析方法大致可分为两类。运用相平面法或数字计算机仿真可以求得非线性系统的精确解，进而分析非线性系统的性能，但是相平面法只适用于一阶、二阶系统；建立在描述函数基础上的谐波平衡法可以对非线性系统作出定性分析，是分析非线性系统的简便而实用的方法，尤其在解决工程实际问题上，不须求得精确解时更为有效。

8-1 引言

实际系统中的非线性因素

实际的物理系统，由于其组成元件总是或多或少地带非线性特性，可以说都是非线性系统。例如，在一些常见的测量装置中，当输入信号在零值附近的某一小范围之内时，没有输出，只有当输入信号大于此范围时，才有输出，即输入输出特性中总有一个不灵敏区（也称死区），如图8-1(a)所示；放大元件的输入信号在一定范围内时，输入输出呈线性关系，当输入信号超过一定范围时，放大元件就会出现饱和现象，如图8-1(b)所示；各种传动机构由于机械加工和装配上的缺陷，在传动过程中总存在着间隙，其输入输出特性为间隙特性，如图8-1(c)所示；有时为了改善系统的性能或者简化系统的结构，还常常在系统中引入非线性部件或者更复杂的非线性控制器。通常，在自动控制系统中，最简单和最普遍的就是继电特性，如图8-1(d)所示。



以上情况说明,非线性特性在实际中是普遍存在的,只要系统中包含一个或一个以上具有非线性特性的元件,就称其为非线性系统。所以,严格地说,实际的控制系统都是非线性系统。所谓线性系统仅仅是实际系统忽略了非线性因素后的理想模型。当实际系统的非线性程度不严重时,在某一范围内或某些条件下可以近似地视为线性系统,这时采用线性方法去进行研究具有实际意义,分析的结果符合实际系统的情况。但是,如果实际系统的非线性程度比较严重,则不能采用线性方法去进行研究,否则会产生较大的误差,甚至会导致错误的结论,故有必要对非线性系统作专门的研究。

常见非线性特性对系统运动的影响

从非线性环节的输入与输出之间存在的函数关系划分，非线性特性可分为单值函数与多值函数两类。例如死区特性、饱和特性及理想继电特性属于输入与输出间为单值函数关系的非线性特性。间隙特性和一般继电特性则属于输入与输出之间为多值函数关系的非线性特性。

在实际控制系统中，最常见的非线性特性有死区特性、饱和特性、间隙特性和继电特性等。在多数情况下，这些非线性特性都会对系统正常工作带来不利影响。下面从物理概念上对包含这些非线性特性的系统进行一些分析，有时为了说明问题，仍运用线性系统的某些概念和方法。虽然分析不够严谨，但便于了解，而且所得出的一些概念和结论对于从事实际系统的调试工作是具有参考价值的。

1: 死区 死区特性如图8-1(a)所示。对于线性无静差系统，系统进入稳态时，稳态误差为零。若控制器中包含有死区特性，则系统进入稳态时，稳态误差可能为死区范围内的某一值，因此死区对系统最直接的影响是造成稳态误差。当输入信号是斜坡函数时，死区的存在会造成系统输出量在时间上的滞后，从而降低了系统的跟踪速度。摩擦死区特性可能造成运动系统的低速不均匀；另一方面，死区的存在会造成系统等效开环增益的下降，减弱过渡过程的振荡性，从而可提高系统的稳定性。死区也能滤除在输入端作小幅度振荡的干扰信号，提高系统的抗干扰能力。

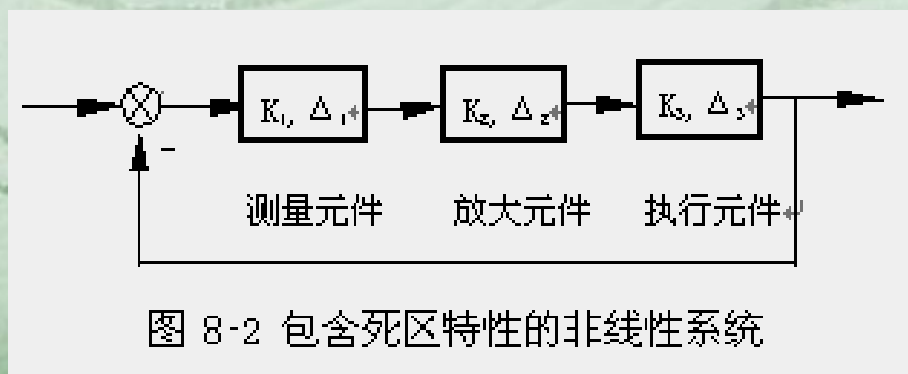


图 8-2 包含死区特性的非线性系统

在图8-2所示的非线性系统中， K_1 、 K_2 、 K_3 分别为测量元件、放大元件和执行元件的传递系数， Δ_1 、 Δ_2 、 Δ_3 分别为它们的死区。若把放大元件和执行元件的死区折算到测量元件的位置（此时放大元件和执行元件无死区），则有以下式成立：

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{\Delta_2}{K_1} + \frac{\Delta_3}{K_1 K_2}$$

显而易见，处于系统前向通路最前面的测量元件，其死区所造成的影响最大，而放大元件和执行元件死区的不良影响可以通过提高该元件前级的传递系数来减小。

2: 饱和 饱和特性如图8-1 (b) 所示。饱和特性将使系统在大信号作用之下的等效增益降低，一般地讲，等效增益降低，会使系统超调量下降，振荡性减弱，稳态误差增大。处于深度饱和的控制器对误差信号的变化失去反应，从而使系统丧失闭环控制作用。在一些系统中经常利用饱和特性作信号限幅，限制某些物理参量，保证系统安全合理地工作。

若线性系统为振荡发散，当加入饱和限制后，系统就会出现自持振荡的现象。这是因为随着输出量幅值的增加，系统的等效增益在下降，系统的运动有收敛的趋势；而当输出量幅值减小时，等效增益增加，系统的运动有发散的趋向，故系统最终应维持等幅振荡，出现自持振荡现象。

3: 间隙 又称回环, 间隙特性如图8-1(c)所示。在齿轮传动中, 由于间隙存在, 当主动齿轮方向改变时, 从动轮保持原位不动, 直到间隙消失后才改变转动方向。铁磁元件中的磁滞现象也是一种回环特性。间隙特性对系统性能的影响: 一是增大了系统的稳态误差, 降低了控制精度, 这相当于死区的影响; 二是因为间隙特性使系统频率响应的相角迟后增大, 从而使系统过渡过程的振荡加剧, 甚至使系统变为不稳定。

4: 继电特性 继电特性如图8-1(d)所示, 其特性中包含了死区、回环及饱和特性。当 $h=0$ 时, 称为理想继电特性。

理想继电特性串入系统, 在小偏差时开环增益大, 系统的运动一般呈发散性质; 而在大偏差时开环增益很小, 系统具有收敛性质。故理想继电控制系统最终多半处于自持振荡工作状态。

继电特性能够使被控制的执行装置在最大输入信号下工作, 可以充分发挥其调节能力, 故有可能利用继电特性实现快速跟踪。

至于带死区的继电特性，将会增加系统的定位误差，而对其它动态性能的影响，类似于死区、饱和非线性特性的综合效果。以上只是对系统前向通道中包含某个典型非线性特性的情况进行了直观的讨论，所得结论为一般情况下的定性结论，这些结论对于从事实际系统的调试工作是具有参考价值的。

非线性系统特征

描述线性系统运动状态的数学模型是线性微分方程，其重要特征是可以应用叠加原理；描述非线性系统运动状态的数学模型是非线性微分方程，不能应用叠加原理。由于两类系统的根本区别，它们的运动规律是很不相同的。现将非线性系统所具有的主要运动特点归纳如下：

1: 稳定性 线性系统的稳定性只取决于系统的结构和参数，而与外作用和初始条件无关。因此，讨论线性系统的稳定性时，可不考虑外作用和初始条件。只要线性系统是稳定的，就可以断言，这个系统所有可能的运动都是稳定的。

对于非线性系统，不存在系统是否稳定的笼统概念，必须针对系统某一具体的运动状态，才能讨论其是否稳定的问题。

例如一个非线性系统，其非线性微分方程为：

$$\dot{x} = -x + x^2 = -x(1 - x)$$

设 $t=0$ 时，系统的初始条件为 x_0 ，可以求得上述微分方程的解为：

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

不同初始条件下的时间响应曲线如图8-3所示。

若令 $dx/dt=0$ ，可以求出系统的两个平衡状态： $x=0$ 和 $x=1$ ， $x=0$ 这个平衡状态是稳定的，因为它对 $x_0 < 1$ 的扰动具有恢复原状态的能力；而 $x=1$ 这个平衡状态是不稳定的，稍加扰动不是收敛到零，就是发散到无穷，不可能再回到这个平衡状态。

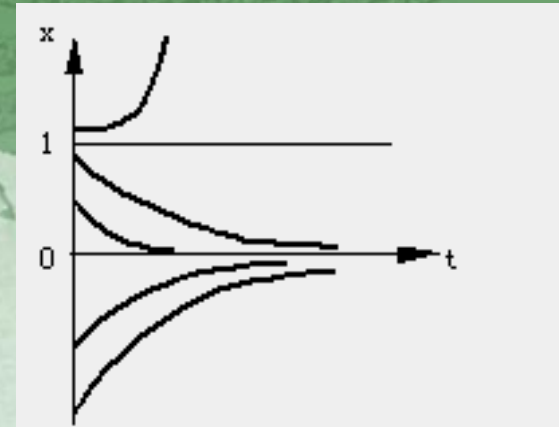


图 8-3 非线性系统的时间响应

由此可见，非线性系统可能存在多个平衡状态，其中某些平衡状态是稳定的，另一些平衡状态是不稳定的。初始条件不同，系统的运动可能趋于不同的平衡状态，运动的稳定性就不同。所以说，非线性系统的稳定性不仅与系统的结构和参数有关，而且与运动的初始条件、输入信号有直接关系。

2: 时间响应 线性系统时间响应的一些基本特征（如振荡性和收敛性）与输入信号的大小及初始条件无关。图9-4中的虚线表明，对于线性系统，阶跃输入信号的大小只影响响应的幅值，而不会改变响应曲线的形状。非线性系统的时间响应与输入信号的大小和初始条件有

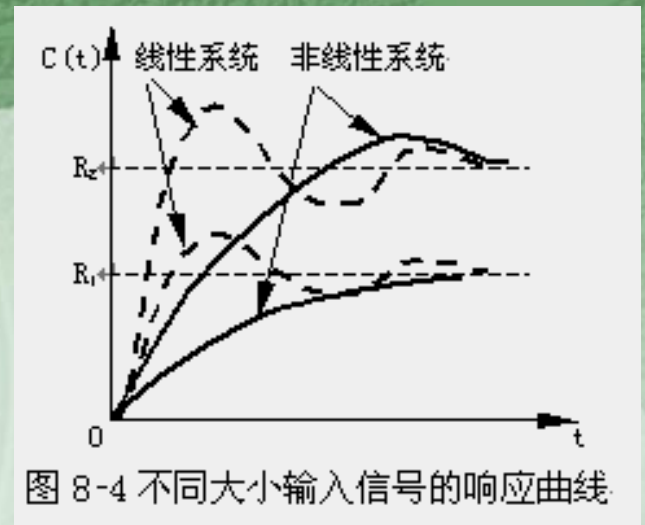


图8-4中的实线表明，对于非线性系统，随着阶跃输入信号的大小不同，响应曲线的幅值和形状会产生显著变化，从而使输出具有多种不同的形式。同是振荡收敛的，但振荡频率和调节时间均不相同，还可能出现非周期形式，甚至出现发散的情况。这是由于非线性特性不遵守叠加原理的结果。

3: 自持振荡 线性定常系统只有在临界稳定的情况下,才能产生等幅振荡。需要说明的是,这种振荡是靠参数的配合达到的,因而实际上是很难观察到的,而且等幅振荡的幅值及相角与初始条件有关,一旦受到扰动,原来的运动便不能维持,所以说线性系统中的等幅振荡不具有稳定性。

有些非线性系统在没有外界周期变化信号的作用下,系统中就能产生具有固定振幅和频率的稳定周期运动。如振荡发散的线性系统中引入饱和特性时就会产生等幅振荡,这种固定振幅和频率的稳定周期运动称为自持振荡,其振幅和频率由系统本身的特性所决定。

自持振荡具有一定的稳定性，当受到某种扰动之后，只要扰动的振幅在一定的范围之内，这种振荡状态仍能恢复。在多数情况下，不希望系统有自持振荡。长时间大幅度的振荡会造成机械磨损、能量消耗，并带来控制误差。但是有时又故意引入高频小幅度的颤振，来克服间隙、摩擦等非线性因素给系统带来的不利影响。因此必须对自持振荡产生的条件、自持振荡振幅和频率的确定，以及自持振荡的抑制等问题进行研究。所以说自持振荡是非线性系统一个十分重要的特征，也是研究非线性系统的一个重要内容。

4: 对正弦信号的响应 线性系统当输入某一恒定幅值和不同频率 ω 的正弦信号时, 稳态输出的幅值 A_c 是频率 ω 的单值连续函数。对于非线性系统输出的幅值 A_c 与 ω 的关系可能会发生跳跃谐振和多值响应, 其特性如图8-5所示。当 ω 增加时, 系统输出的幅值从1点逐渐变化到2点, 然后会从2点突跳到3点; 而当 ω 减小时, 系统输出的幅值会从4点变化到5点, 然后会从5点突跳到6点, 这种振幅随频率的改变出现突跳的现象称为跳跃谐振。在 ω_1 到 ω_2 之间的每一个频率, 都对应着三个振幅值, 不过2点到5点之间对应的振荡是不稳定的, 因此一个频率对应了两个稳定的振荡, 这种现象称为多值响应。产生跳跃谐振的原因是系统中滞环特性的多值特点造成的。

5: 非线性系统的畸变现象 线性系统在正弦信号作用下的稳态输出是与输入同频率的正弦信号；非线性系统在正弦信号作用下的稳态输出不是正弦信号，它可能包含有倍频和分频等各种谐波分量，从而使系统输出产生非线性畸变。

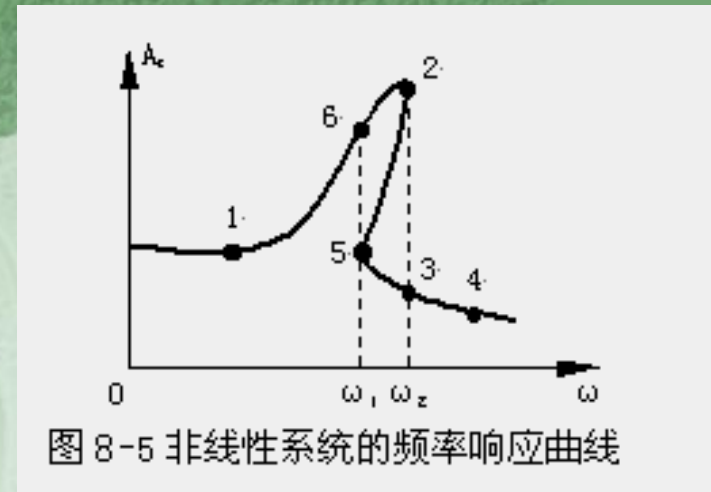


图 8-5 非线性系统的频率响应曲线

在非线形系统中还会出现一些其它的怪异现象，在此不再赘述。

非线性系统的分析方法

对于非线性系统，建立数学模型的问题要比线性系统困难得多，至于解非线性微分方程，用其解来分析非线性系统的性能，就更加困难了。这是因为除了极特殊的情况外，多数非线性微分方程无法直接求得解析解。所以到目前为止，还没有一个成熟、通用的方法可以用来分析和设计各种不同的非线性系统，目前研究非线性系统常用的工程近似方法有：

1: 相平面法 相平面法是时域分析法在非线性系统中的推广应用，通过在相平面上绘制相轨迹，可以求出微分方程在任何初始条件下的解，所得结果比较精确和全面。但对于高于二阶的系统，需要讨论变量空间中的曲面结构，从而大大增加了工程使用的难度。故相平面法仅适用于一、二阶非线性系统的分析。

2: 描述函数法 描述函数法是一种频域的分析方法，它是线性理论中的频率法在非线性系统中的推广应用，其实质是应用谐波线性化的方法，将非线性元件的特性线性化，然后用频率法的一些结论来研究非线性系统。这种方法不受系统阶次的限制，且所得结果也比较符合实际，故得到了广泛应用。

3: 计算机求解法 用模拟计算机或数字计算机直接求解非线性微分方程，对于分析和设计复杂的非线性系统，几乎是唯一有效的方法。随着计算机的广泛应用，这种方法定会有更大的发展。

应当指出，这些方法主要是解决非线性系统的“分析”问题，而且是以稳定性问题为中心展开的，非线性系统“综合”方法的研究远不如稳定性问题的成果，可以说到目前为止还没有有一种简单而实用的综合方法，可以用来设计任意的非线性控制系统。因此本章以系统分析为主，着重介绍广泛应用的相平面法和描述函数法。

8-2相平面法基础

相平面法的概念

设一个二阶系统可以用下列微分方程描述:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

考虑到:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx}$$

可改写为:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

这是一个以 x 为自变量,以 \dot{x} 为因变量的一阶微分方程,如果能解出该方程,即求出 \dot{x} 和 x 的关系,则可以运用 $\dot{x} = dx/dt$,把 x 和 t 的关系计算出来。

以 x 为横坐标、 \dot{x} 为纵坐标所组成的直角坐标平面称为相平面(状态平面)。

在某一时刻 t ， $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 对应于相平面上的一个点，称为相点(状态点)，它代表了系统在该时刻的一个状态。

通常系统在初始时刻 t_0 的初始状态用相点 (x_0, \dot{x}_0) 表示，随着时间的增长，系统的状态不断地变化，沿着时间增加的方向，将描述这些状态的许多相点连接起来，在相平面上就形成了一条轨迹曲线，这种反映系统状态变化的轨迹曲线叫相轨迹，如图8-6所示。

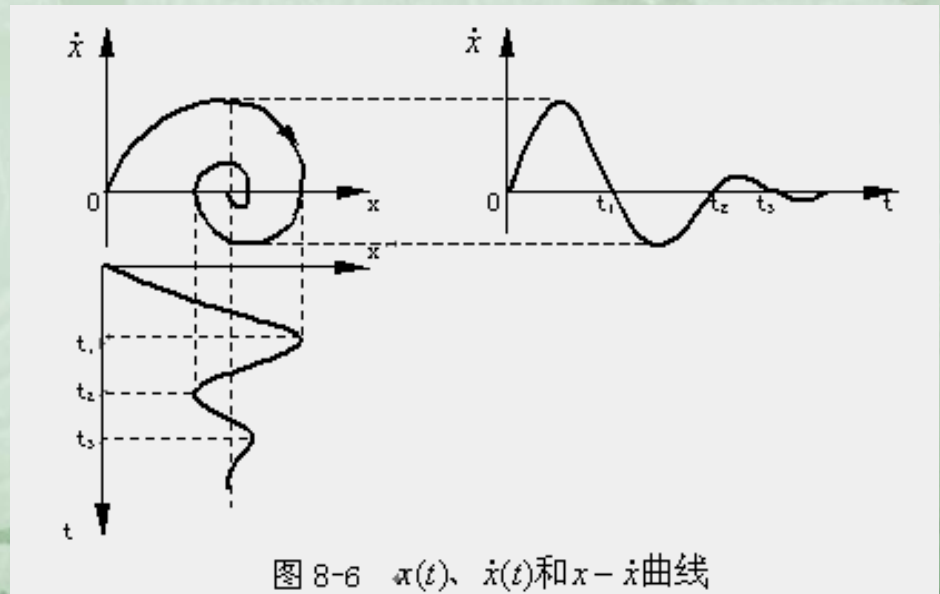


图 8-6 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ 和 $x-\dot{x}$ 曲线

相轨迹的箭头表示时间增加时，相点的运动方向。从图中可以看出，在上半平面，相轨迹总是沿着 x 增加的方向运动(向右运动)，而在下半平面，相轨迹总是沿着 x 减小的方向运动(向左运动)。

根据微分方程解的存在和唯一性定理，对于任一初始条件，微分方程有唯一的解与之对应。因此，对某一个微分方程，在相平面上布满了与不同初始条件相对应的一族相轨迹，由这样一族相轨迹所组成的图象叫相平面图，简称相图。

用相平面图分析系统性能的方法就称为相平面法。由于在相平面上只能表示两个独立的变量，故相平面法只能用来研究一、二阶线性和非线性系统。

相轨迹的绘制方法

求解系统的相轨迹有两类方法，即解析法和图解法。解析法只适用于系统的微分方程较为简单，便于求解的场合。当用解析法比较困难时，常采用图解法。

1: 解析法 所谓解析法就是通过求解微分方程的办法，找出变量的关系，从而在相平面上绘制相轨迹。

解析法有两种方法：

(1) 消去参变量 t 。 这种方法是设法通过直接求解二阶微分方程得到 $x(t)$ ，经求导得 $\dot{x}(t)$ 的表达式，在 $x(t)$ 和 $\dot{x}(t)$ 的表达式中，消去参变量 t ，就可得到 \dot{x} 和 x 的关系，进而在相平面上绘制相轨迹。

(2) 直接积分 若原方程可以分解为： $g(\dot{x})d\dot{x} = h(x)dx$

则通过积分，也可直接得到 \dot{x} 和 x 的关系，并绘制相轨迹。

例8-1 设描述系统运动的微分方程为： $\ddot{x} + x = 0$

初始条件为 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, 试绘制系统运动的相轨迹。

解 先用第一种解析法求解。根据初始条件可以求得系统：
运动微分方程的解为： $x(t) = x_0 \cos t$

经求导得： $\dot{x}(t) = -x_0 \sin t$

消去参变量 t , 可以得到:

$$\dot{x}^2(t) + x^2(t) = x_0^2$$

再采用第二种解析法求解。系统的微分方程改写为:

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = -x \quad \dot{x} dx = -x dx$$

两边积分, 并考虑到初始条件, 得: $\dot{x}^2(t) + x^2(t) = x_0^2$

两种解法结果一致, 可以画出系统运动的相轨迹如图8-7所示。

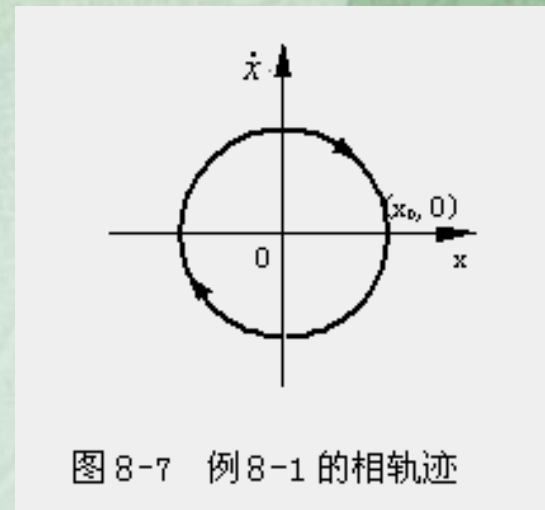


图8-7 例8-1的相轨迹

2: 图解法 图解法是一种不必求解微分方程的解, 直接通过各种逐步作图的办法, 在相平面上画出相轨迹的方法。当系统的微分方程用解析法难以求解时, 可采用图解法。对于非线性系统, 图解法尤为重要。图解法有多种, 这里介绍等倾线法和 δ 法。

(1) 等倾线法 等倾线法适用于下述一般形式的系统:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

若令:
$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \alpha$$

则
$$\alpha = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}$$

有:

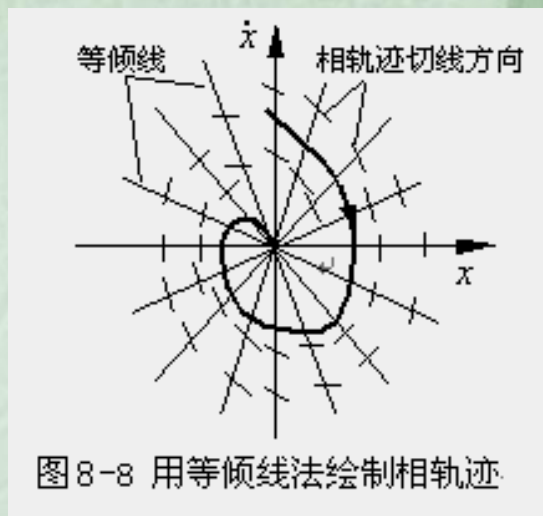
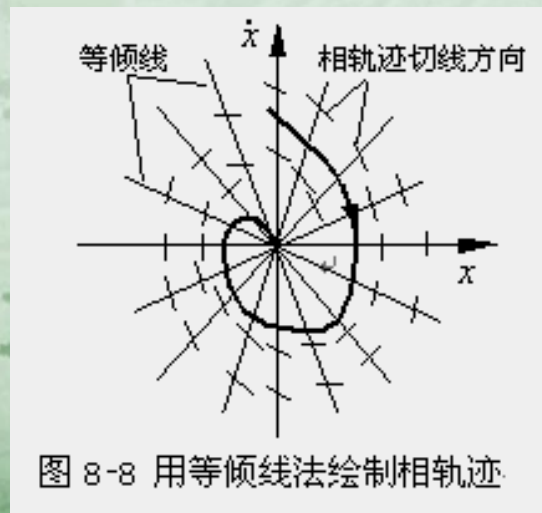


图8-8 用等倾线法绘制相轨迹

令 α 为某一常数, 上式即为一条等倾线方程, 也就是说, 相轨迹上的点满足上式时, 相轨迹在该点处的斜率均为 α , 这条曲线就称为等倾线。当 α 取不同值时, 可以绘制若干不同的等倾线, 在每条等倾线上画出表示该等倾线斜率值的小线段, 这些小线段表示了相轨迹通过该等倾线时的方向。

任意给定一个初始条件就相当于给定了相平面上的一个起始点，由该点出发的相轨迹可以这样作出来：从该点出发，按照它所在的等倾线上的方向作一小线段，这个小线段与第二条等倾线交于一点，再由这个交点出发，按照第二条等倾线上的方向再作一小线段，这个小线段交于第三条等倾线，依次连续作下去，就可以得到一条从给定初始条件出发的各个方向小线段组成的折线，最后把这条折线光滑处理，就得到了所要求的相轨迹，如图8-8所示。



例9-2 设描述系统运动的微分方程为： $\ddot{x} + x = 0$

初始条件为 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$,

试用等倾线法绘制系统运动的相轨

迹 可以把系统的微分方程改

写为： $\dot{x} \frac{dx}{dx} + x = 0$

令 $\alpha = \frac{dx}{dx} \quad \dot{x} = -\frac{1}{\alpha} x$

上式即为等倾线方程。显然，等倾线为通过相平面坐标原点的直线，其斜率为 $-1/\alpha$ ，而 α 是相轨迹通过等倾线时切线的斜率。若令 α 为不同的值，就可以绘出具有不同斜率的一族等倾线，在每条等倾线上画出斜率为 α 的短线，所有短线的总体就形成了相轨迹的切线方向场，如图8-9所示。图中画出了从初始点 $(x_0, 0)$ 出发，沿方向场绘出的系统的相轨迹。该相轨迹为一个圆，与例8-1中用解析法所得结论一致。

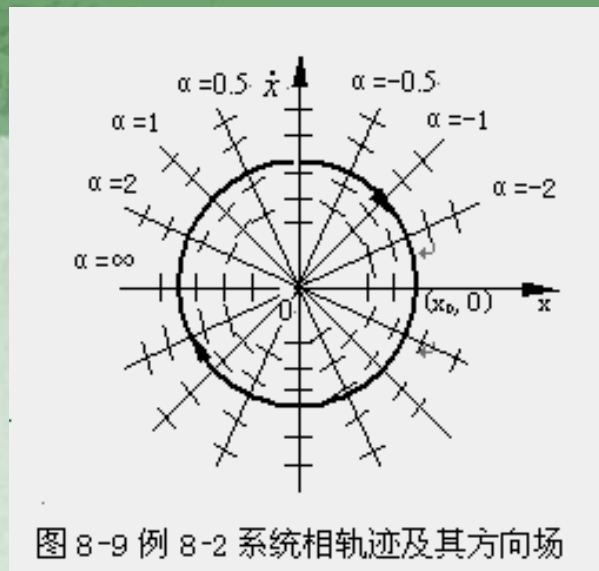


图 8-9 例 8-2 系统相轨迹及其方向场

用等倾线法绘制相轨迹时，还需要说明以下几点：

第一，横轴(x轴)与纵轴(dx/dt轴)所选用的比例尺应当一致，这样 α 值才与相轨迹切线的几何斜率相同。

第二，在相平面的上半平面，由于 $\dot{x} > 0$ ，相轨迹总是沿着x增加的方向运动(向右运动)；而在下半平面，相轨迹总是沿着x减小的方向运动(向左运动)。

第三，除平衡点(即x的各阶导数为零的点)外，通过x轴时相轨迹的斜率为

$$\alpha = f(x, \dot{x}) / \dot{x} = \infty$$

所以相轨迹是与x轴垂直的。

第四，一般来说等倾线的条数越多，作图的精确度越高，但过多了，人工作图所产生的积累误差也会增加，所以等倾线的条数应取得适当。另外，采用平均斜率的方法作相轨迹，可以提高作图的精确度。即两条等倾线之间的相轨迹，其切线的斜率，可近似取这两条等倾线上切线斜率的平均值。例如有两条相邻的等倾线，其中 $\alpha_1=-1$ ， $\alpha_2=-1.2$ ，则这两条等倾线之间的相轨迹斜率可近似取为

$$(\alpha_1 + \alpha_2) / 2 = -1.1$$

一般来说，线性系统的等倾线是直线，非线性系统的等倾线往往是曲线或折线。当等倾线是直线时，采用等倾线法还是比较方便的。

(2) δ 法 δ 法适用于下述一般形式的系统

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 是单值连续的函数。上述方程可改写为： $\ddot{x} + \omega^2 x = f(x, \dot{x}) + \omega^2 x$

式中 ω 应选择为适当常数，以使下面定义的 δ 函数值在所讨论的范围内，既不太大也不太小。 δ 函数定义如下：

$$\delta(x, \dot{x}) = \frac{f(x, \dot{x}) + \omega^2 x}{\omega^2}$$

上述方程写为： $\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 \delta(x, \dot{x})$

δ 值取决于变量 \dot{x} 和 x ，若 \dot{x} 和 x 的变化很小， δ 可以看作是一个常量，例如在相平面的点 $P_1(x_1, \dot{x}_1)$ 附近， δ 的值就可以取为：

$$\delta_1 = \frac{f(x_1, \dot{x}_1) + \omega^2 x_1}{\omega^2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 (x - \delta_1) = 0$$

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega^2 (x - \delta_1)$$

两边乘以 dx ，积分后，可

得：

$$\left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 + (x - \delta_1)^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{x_1}{\omega}\right)^2 + (x_1 - \delta_1)^2}\right)^2$$

如果把纵坐标取为 $\frac{\dot{x}}{\omega}$ ，横坐标仍为 x ，则在这样的相平面内，上式代表一个圆心在 $Q(\delta_1, 0)$ ，半径为 $|P_1Q|$ 的圆。这表明在 P_1 点附近的相轨迹，可以用一小段圆弧来代替，此圆弧应当足够短，以保证变量 δ_1 的变化很小，如图8-10所示。

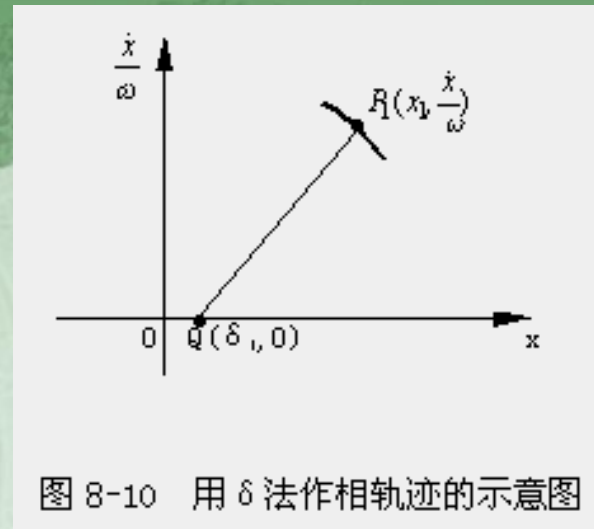


图 8-10 用 δ 法作相轨迹的示意图

用 δ 法绘制相轨迹的具体方法是：在图8-10中，若 P_1 为起始点，首先应计算出与 P_1 点相对应的 δ_1 ，确定圆心 $Q(\delta_1, 0)$ ，以 Q 为圆心， $|P_1Q|$ 为半径，过 P_1 点作出一小段圆弧 P_1P_2 ，这段圆弧就代表了从 P_1 点到 P_2 点相轨迹，得到 P_2 点后，可以计算出与 P_2 点相对应的 δ_2 ，从而作出一小段圆弧 P_2P_3 ，得到 P_3 点，依次连续作下去，就可以得到系统的相轨迹。

有时为了使作图更加准确起见，可利用一段圆弧的 x 平均值和 \dot{x} 平均值，求出更加准确的 δ 值，根据新的 δ 值，重新确定圆心作出一段新的圆弧，代替原来的圆弧，经过几次这样的逼近，就可以得到一个相当准确的 δ 值，并进而作出相当精确的相轨迹。

由相平面图求时间解

在系统分析时，往往还需要再由相轨迹求出系统的过渡过程，并画出过渡过程曲线 $x(t)$ 。由相平面图绘制过渡过程曲线可以用增量法、积分法和圆弧法。

1: 增量法 对于小的时间增量 Δt 和位移增量 Δx ，其平均速度为 $\Delta x / \Delta t$ ，若 Δt 足够小，可以令：

$$\dot{x}_{\text{平均}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{\text{平均}}}$$

设系统的相轨迹如图9-11所示。相轨迹从 P_0 点到 P_1 点，横坐标 x 的变化量为 Δx_{01} ，纵坐标的平均值为 $\dot{x}_{01} = \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_1}{2}$

因此，从 P_0 点到 P_1 点所需时间的近似值为： $t_{01} = \frac{\Delta x_{01}}{\dot{x}_{01}}$

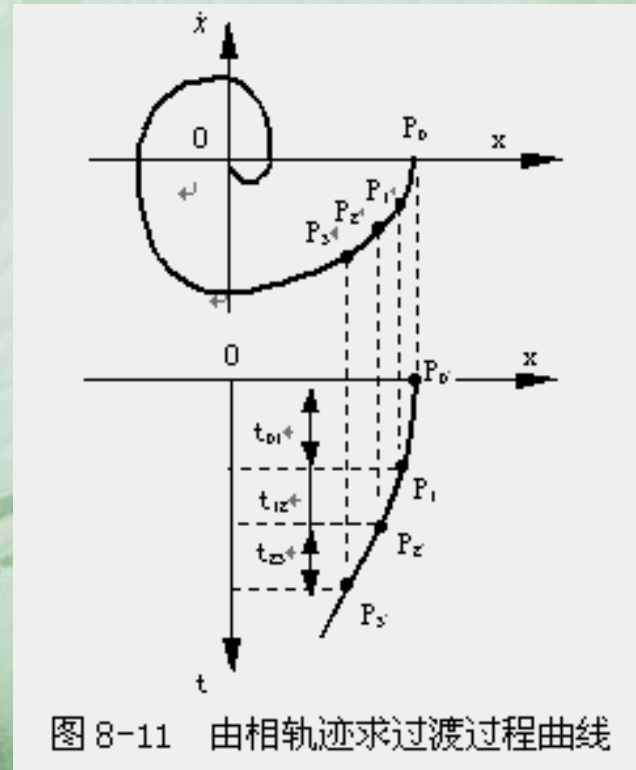


图 8-11 由相轨迹求过渡过程曲线

同理可得从 P_1 点到 P_2 点， P_2 点到 P_3 点，……所需时间的近似值分别为：

$$t_{12} = \frac{\Delta x_{12}}{\dot{x}_{12}}, t_{23} = \frac{\Delta x_{23}}{\dot{x}_{23}}, \dots$$

这样就可以求得系统的过渡过程曲线 $x(t)$ ，如图8-11所示。

应用增量法时应该避免出现 \dot{x} 的平均值为零的情况，因为 $\dot{x}_{\text{平均}} = 0$ 时， $\Delta t = \infty$ 。对于这种情况，可采用圆弧法。

为了使求得的过渡过程曲线具有足够的准确度，位移增量 Δx 必须选得足够小，以便使 \dot{x} 和 t 的增量也相当小。但是 Δx 不必取常量，可根据相轨迹各部分的形状不同而改变，从而使得在保证一定准确度的前提下，作图及计算的工作量减至最小。

2: 积分法

根据 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$,

所以相点在相轨迹上从坐标为 x_0 的点移到坐标为 x_1 的点所需时间为:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\dot{x}} dx$$

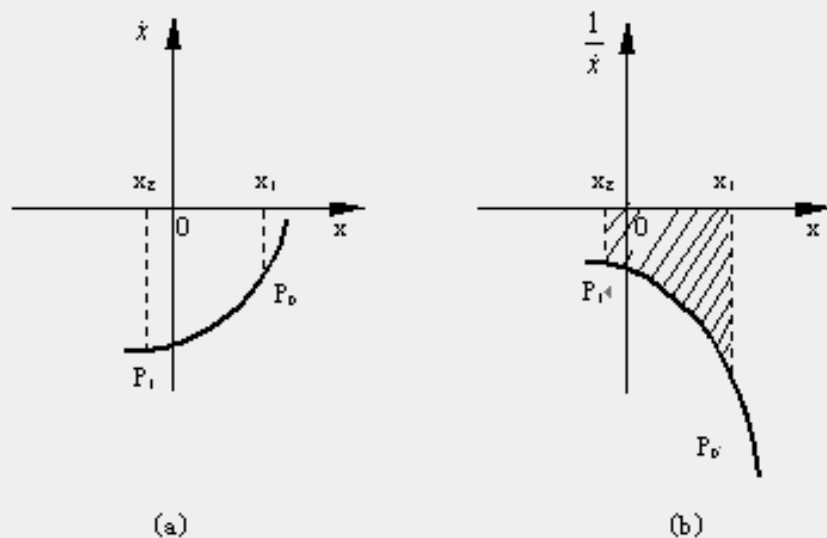
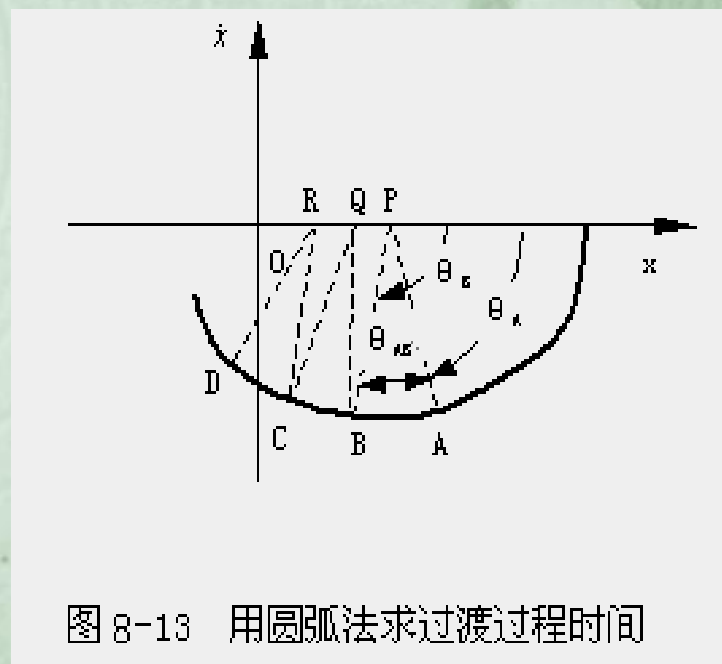


图8-12 $\dot{x}-x$ 与 $\frac{1}{\dot{x}}-x$ 的相轨迹

设系统的相轨迹如图8-12 (a)所示, 只要先作出以 x 为横坐标, $1/\dot{x}$ 为纵坐标的 $1/\dot{x}$ 与 x 的关系曲线, 如图8-12 (b)所示, 则 $1/\dot{x}$ 曲线下阴影部分的面积就表示从 P_0 点到 P_1 点所需时间。假如求出了从 P_0 点到其它各点所需要的时间, 也就求出了从 P_0 点开始的系统过渡过程曲线。若在积分区间内 x 的导数为零, 则 $1/\dot{x}$ 的值变为无穷大, 上式所示积分便无法进行, 此时可用圆弧法。

3: 圆弧法 这种方法的基本思想是: 用圆心位于x轴上的一系列小圆弧来近似所研究的相轨迹段, 则运动所需时间等于沿这些小圆弧运动所需时间之和。

例如如图8-13的相轨迹AD段, 就是用x轴上的P、Q、R点为圆心, 以 $|PA|$ 、 $|QB|$ 、 $|RC|$ 为半径的小圆弧AB、BC、CD来近似。因此, 相轨迹从A点移动到D点所需的时间近似为相点沿小圆弧AB、BC、CD移动时所需时间之和。而经过每段小圆弧所需的时间, 可以很方便地计算出来。以 t_{AB} 为例, 在A点有:



$$\dot{x} = |PA| \sin \theta_A$$

$$x = |PA| \cos \theta_A + |OP|$$

$$t_{AB} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{|PA| \sin \theta_A}{|PA| \sin \theta_A} d\theta = \theta_A - \theta_B = \theta_{AB}$$

上式表明， t_{AB} 在数值上等于小圆弧AB所对应的中心角 θ_{AB} 用弧度来度量的数值。

8-3 二阶系统的相平面分析法

线性系统的相轨迹

相平面法是分析非线性二阶系统的重要方法，但是在介绍非线性系统的相平面分析之前，先掌握各种线性二阶系统相图的作法及其特点是十分必要的。因为许多非线性二阶系统（例如含有饱和、死区等特性的非线性系统）可用分段线性化的方法来研究。

下面以二阶系统的自由运动为例，介绍线性系统的相轨迹。

设系统的微分方程如下： $\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$

上式所表示的自由运动，其性质由特征方程式根的分布特点所决定，主要有以下几种情况：

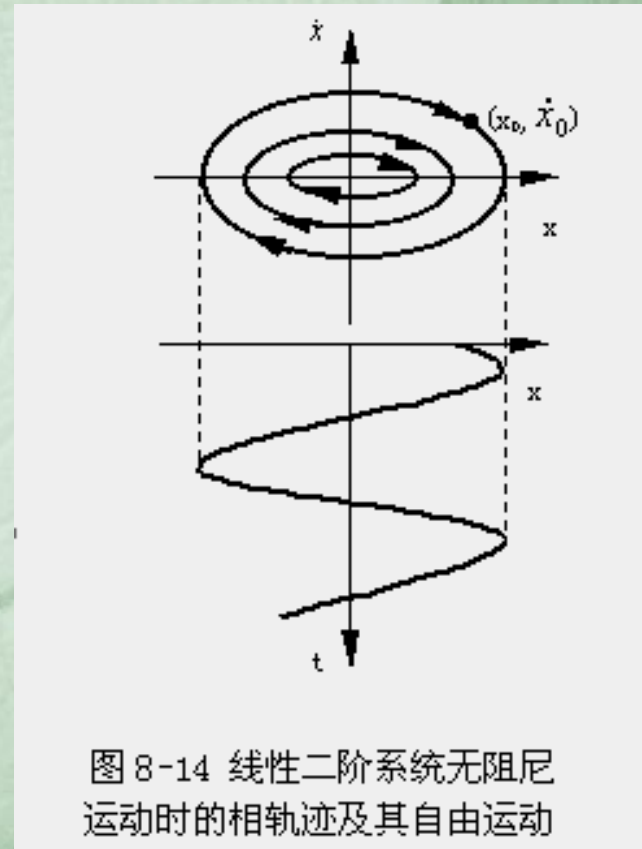
1: 无阻尼运动 无阻尼运动时
 $\xi = 0$ ，此时特征方程式根为一对纯虚根，系统的微分方程如下：

$$\ddot{x} + \omega_n^2x = 0$$

$$\dot{x} \frac{dx}{dx} = -\omega_n^2x$$

积分后可得相轨迹方程：

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_n^2} = \left(\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2}} \right)^2$$



显然相轨迹为一个椭圆，该椭圆通过初始点 (x_0, \dot{x}_0) 。

当初始点取不同值时，上式在相平面上表示一族同心的椭圆，每一个椭圆相当于一个简谐振动，如图8-14所示。

2: 欠阻尼运动 欠阻尼运动时 $0 < \xi < 1$, 此时特征方程式根为一对位于左半S平面的共轭复数根, 其解为:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$A = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + 2\xi\omega_n x_0 \dot{x}_0 + \omega_n^2 x_0^2}}{\omega_d}$$

$$\varphi = -\arctg \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d x_0}$$

对 $x(t)$ 求导, 消去时间 t , 整理后得:

$$(\dot{x} + \xi\omega_n x)^2 + \omega_d^2 x^2 = c \exp\left(\frac{2\xi\omega_n}{\omega_d} \arctg \frac{\dot{x} + \xi\omega_n x}{\omega_d x}\right)$$

$$c = A^2 \omega_d^2 \exp\left(\frac{2\xi\omega_n \varphi}{\omega_d}\right)$$

上式就是系统欠阻尼运动时的相轨迹方程，它是一条通过初始点 (x_0, \dot{x}_0) ，绕在相平面坐标原点上的对数螺旋线。给定不同的初始点，可以画出一族对数螺旋线，如图8-15所示。此时，系统在初始条件下的自由运动为衰减振荡曲线。

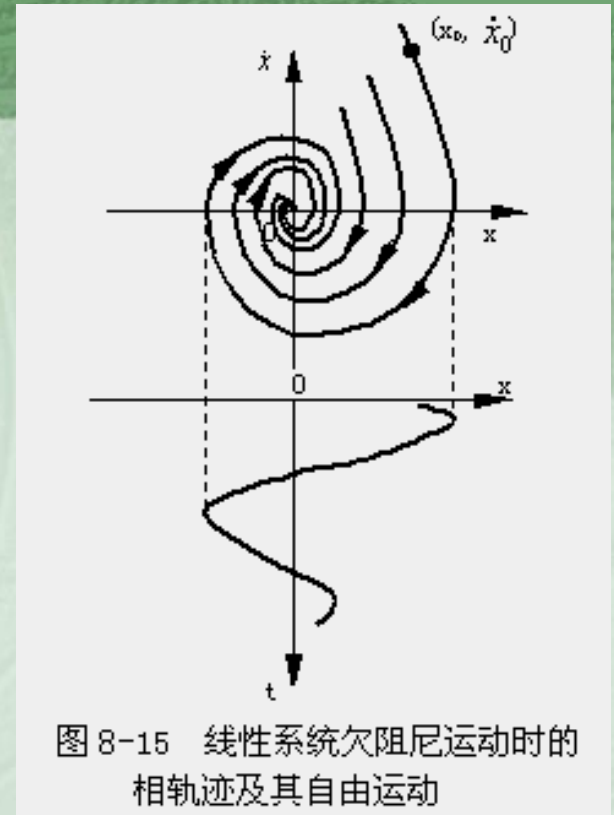


图 8-15 线性系统欠阻尼运动时的相轨迹及其自由运动

3: 过阻尼运动 过阻尼运动时

$\xi > 1$ ，此时特征方程式根为两个负实根，其解为：

$$x(t) = A_1 e^{-q_1 t} + A_2 e^{-q_2 t}$$

$$q_1 = (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n, q_2 = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n$$

$$A_1 = \frac{q_2 x_0 + \dot{x}_0}{q_2 - q_1}, A_2 = \frac{q_1 x_0 + \dot{x}_0}{q_1 - q_2}$$

当初始点满足 $q_1 x_0 + \dot{x}_0 = 0$ 有 $A_2 = 0$ ，可得相轨迹方程

$$q_1 x + \dot{x} = 0$$

它表示了相平面上一条特殊的相轨迹，如图8-16中的曲线1所示。

同理，当初始点满足 $q_2 x_0 + \dot{x}_0 = 0$

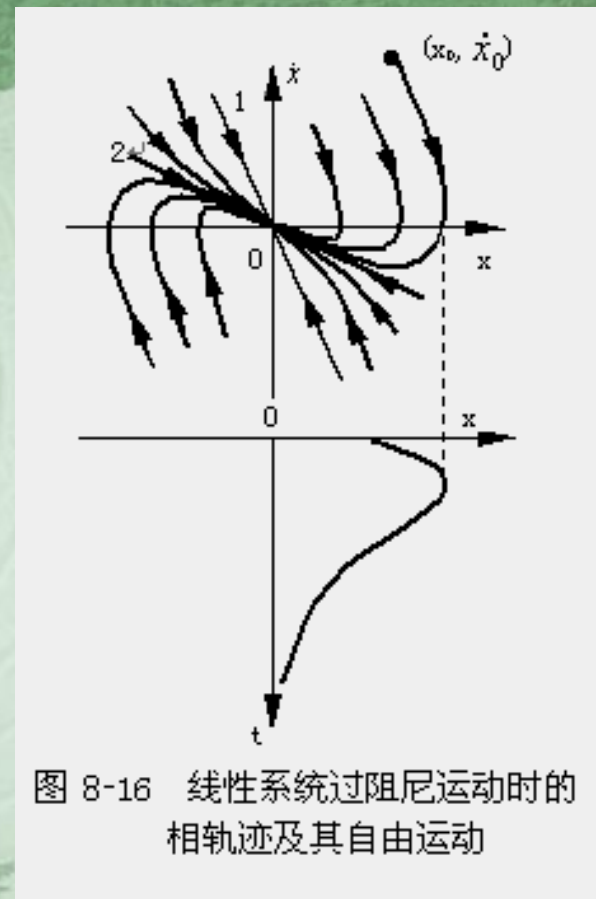
有 $A_1 = 0$ ，可得相轨迹方程为： $q_2 x + \dot{x} = 0$

它表示相平面上另一条特殊的相轨迹，如图8-16中的曲线2所示。

当 A_1 和 A_2 不为零时，对 $x(t)$ 求导，消去时间 t ，整理后得：

$$(\dot{x} + q_2 x)^{q_2} = c(\dot{x} + q_1 x)^{q_1}$$
$$c = \frac{(q_2 - q_1)^{q_2} A_1^{q_2}}{(q_1 - q_2)^{q_1} A_2^{q_1}}$$

上式就是系统过阻尼运动时的相轨迹方程，它代表了一条通过原点的抛物线。给定不同的初始点，可以画出一族抛物线，如图8-16所示。



4: 负阻尼运动 负阻尼运动时 $\xi < 0$ 。其中 $-1 < \xi < 0$ 时特征方程式根为一对具有正实部的共轭复数根，相轨迹如图8-17所示，它也是一族对数螺旋线，但此时图中相轨迹的移动方向与欠阻尼时相轨迹的移动方向不同，说明 t 增长时，运动过程是振荡发散的。 $\xi < -1$ 时特征方程式根为两个正实根，相轨迹如图8-18所示，它是一族抛物线，但此时图中相轨迹的移动方向与过阻尼时相轨迹的移动方向不同，随着 t 的增长，运动过程是发散。

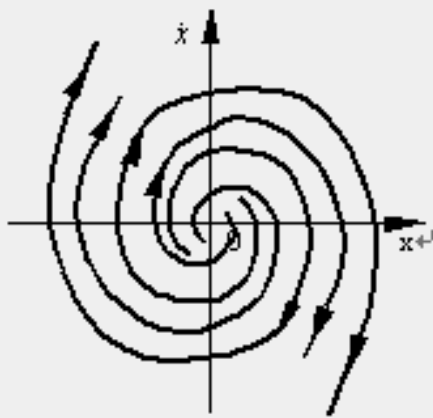


图 8-17 线性系统在 $-1 < \xi < 0$ 时的相轨迹

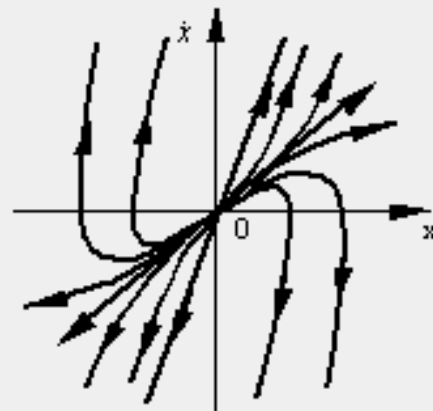


图 8-18 线性系统在 $\xi < -1$ 时的相轨迹

对于线性二阶系统，还存在另外一种类型的微分方程：

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} - \omega_n^2x = 0$$

式中 $\xi > 0$ 。这时特征方程式根为一正、一负两个实根，微分方程解的形式与过阻尼运动时的形式相同，即有：

$$x(t) = A_1e^{-q_1t} + A_2e^{-q_2t}$$

然而不同的是这时 $q_1 > 0$ ，

类似于过阻尼运动时的讨论，当

初始条件满足： $q_1x_0 + \dot{x}_0 = 0$

得到特殊的相轨 $q_1x + \dot{x} = 0$

当初始条件满足： $q_2x_0 + \dot{x}_0 = 0$

得到特殊的相轨 $q_2x + \dot{x} = 0$

否则，相轨迹为一族双曲线，如图8-19所示。显然，随着 t 的增长，运动过程是发散的。

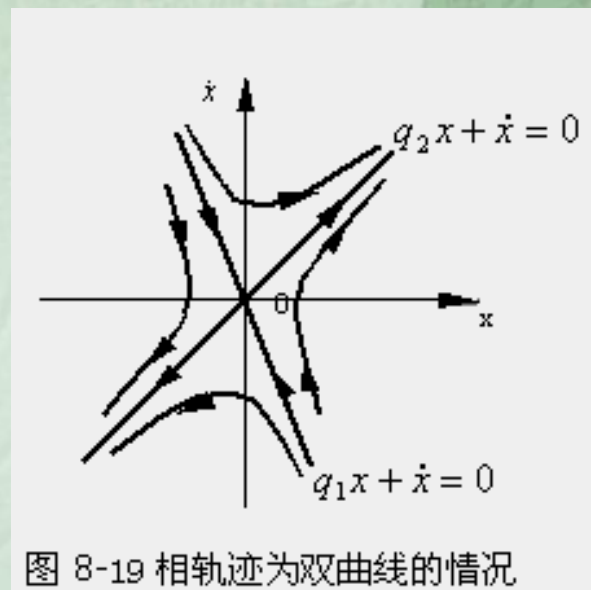


图 8-19 相轨迹为双曲线的情况

奇点与平衡点

一般说来，描述二阶系统的二阶常微分方程可以用两个一阶微分方程表示，即：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t)] \end{cases}$$

若状态 $[x_{10}, x_{20}]$ 满足：

$$\begin{cases} \dot{x}_{10} = f_1[x_{10}, x_{20}] = 0 \\ \dot{x}_{20} = f_2[x_{10}, x_{20}] = 0 \end{cases}$$

则称状态 $[x_{10}, x_{20}]$ 为系统的一个的平衡点。

若以 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 作为相平面的两个坐标轴，在平衡点处，由于：

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{0}{0}$$

也就是说，相轨迹的斜率不定，这样的点称为奇点。
可见奇点就是平衡点。

对于二阶线性定常系统，其微分

方程为：
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

若令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,

则微分方程可改写为两个一阶微分方

程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 \end{cases}$$

显然， $x_1=0, x_2=0$ 为平衡点，也就是说，相平面的原点为平衡点或奇点。

根据相轨迹的形状，可以把奇点分成若干类型。通过前面的讨论可以看出，二阶线性定常系统相轨迹的形状与特征根的分布密切相关，所以，根据二阶线性定常系统特征根即可判断奇点的类型，如图8-20所示。

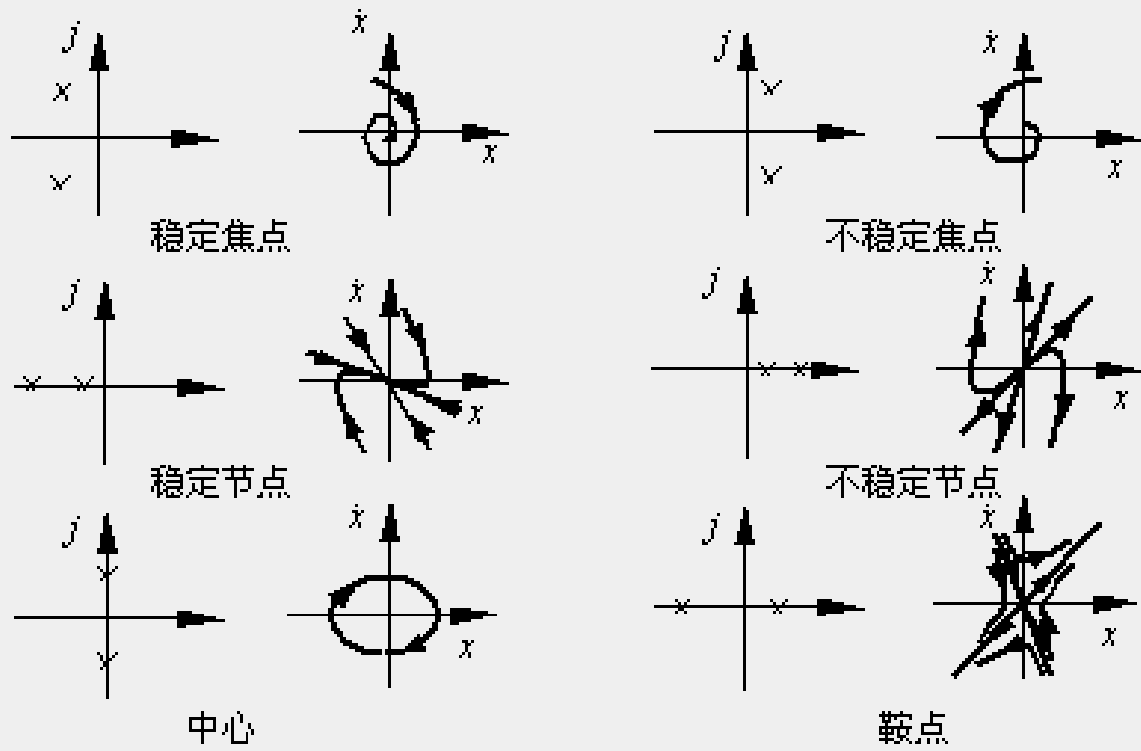


图 8-20 特征根与奇点的对应关系

对于非线性二阶系统，为了判断奇点 $[x_{10}, x_{20}]$ 的类型，可以将原系统在平衡点附近线性化，根据线性化以后的结果来判断奇点的类型。

具体做法是：将系统方程在奇点附近展开，并忽略高次项，得：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_{(x_{10}, x_{20})} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_{(x_{10}, x_{20})} (x_2 - x_{20}) \\ \dot{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x_{10}, x_{20})} (x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_{(x_{10}, x_{20})} (x_2 - x_{20}) \end{cases}$$

上式简记
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_1 - x_{10}) + b(x_2 - x_{20}) \\ \dot{x}_2 = c(x_1 - x_{10}) + d(x_2 - x_{20}) \end{cases}$$

为：若记 $x_1 - x_{10}$ 为 x_1 ， $x_2 - x_{20}$ 为 x_2 ，上式进一步简化
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

将两个一阶微分方程合并为一个二阶微分方程：

$$\ddot{x}_1 - (a+d)\dot{x}_1 + (ad-bc)x_1 = 0$$

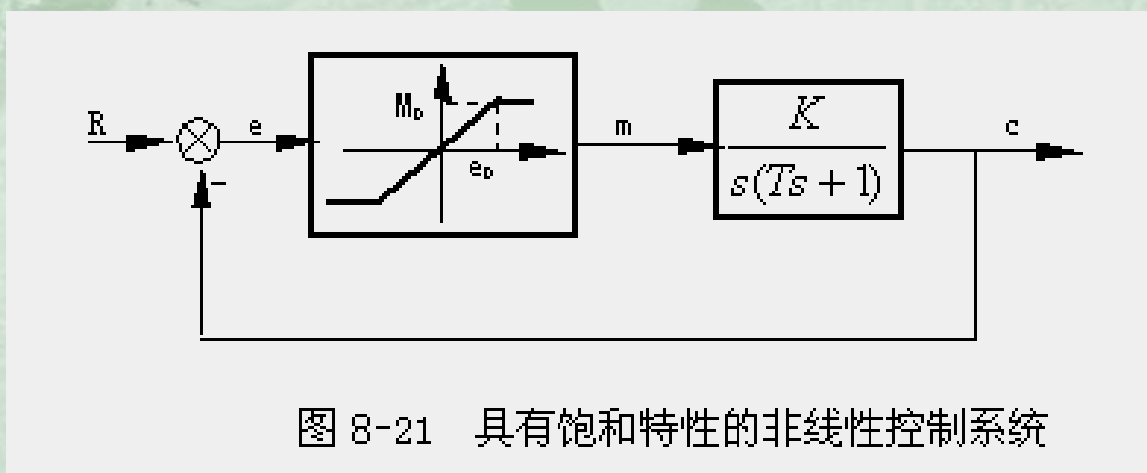
根据这个二阶微分方程特征根的位置，即可判断奇点的类型。

非线性系统的相轨迹

下面用分段线性化的方法来分析具有几种典型非线性的控制系统，着重说明这种方法的应用，同时还可以加深理解某些非线性特性对系统性能的影响。

1: 具有饱和特性的非线性控制系统

设具有饱和特性的非线性控制系统如图8-21所示，图中 $T=1, K=4, e_0=0.2, M_0=0.2$ ；若系统开始处于零初始状态，试分别作出 $r(t)=R \cdot 1(t)$ 和 $r(t)=V_0 t$ 时，系统的相平面图。



该系统线性部分的传递函数 $\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)}$

相应的微分方程为： $T\ddot{c}(t) + \dot{c}(t) = Km(t)$

非线性部分的方程为：

$$m(t) = \begin{cases} e(t), & |e| \leq e_0 \\ M_0, & e > e_0 \\ -M_0, & e < -e_0 \end{cases}$$

当系统无外作用时，为便于分析，可选用输出量及其导数为相坐标组成相平面。当系统有外作用时，系统的稳态输出一般不为零，若以输出量及其导数为相坐标，则系统的平衡位置（或 t 趋于无穷时相点的位置）一般不在相平面的坐标原点，有时甚至不是定值。在这种情况下，常取偏差及其导数作为相坐标。因为，通常 $e(\infty)=0$ 或为常值，这就回避了因平衡位置不在相平面的原点或不确定时所产生的诸多不便。对于本题，应取偏差及其导数作为相坐标。

考虑 $e(t) = r(t) - c(t)$

到:
可将系统的微分方程组改写为如下形式:

$$T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = T\ddot{r} + \dot{r}, |e| \leq e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r}, e > e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = T\ddot{r} + \dot{r}, e < -e_0$$

相平面被 $e = \pm e_0$ 划分为三个区域，即线性区 ($|e| \leq e_0$)，正饱和区 ($e > e_0$) 和负饱和区 ($e < -e_0$)。称 $e = \pm e_0$ 为相平面的开关线，显然当相点移动到开关线处，系统的运动特性将发生转换。

下面分别绘制系统在两种外作用下的相平面图。

$$(1) r(t) = R \cdot 1(t)$$

当 $r(t) = R \cdot 1(t)$ 时，由于 $\ddot{r}(t) = \dot{r}(t) = 0$,

则系统的微分方程组变为： $T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0, |e| \leq e_0$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = 0, e > e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = 0, e < -e_0$$

首先讨论相轨迹在线性区 $|e| \leq e_0$ 的情况。此时相轨迹方程为： $T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0$

显然，相平面的坐标原点 $(0, 0)$ 为一个平衡点，考虑到系统微分方程的特征根为 $s_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4KT})/2 = -0.5 \pm j1.94$

所以坐标原点为稳定焦点。由于奇点 $(0, 0)$ 位于所讨论的线性区域内，该奇点称为实奇点。线性区域的相轨迹为对数螺旋线。

若令 $d\dot{e}/de = \alpha$,

可得等倾线方程 $\dot{e} = \frac{-Ke}{1 + \alpha T}$

奇点：见等倾线是一族通过原点的直线。

在 $e > e_0$ 的饱和区，相轨迹微分方程和等倾线微分方程分别为： $T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = 0, e > e_0$

$$\dot{e} = \frac{-KM_0}{1 + \alpha T}, e > e_0$$

在 $e < -e_0$ 的饱和区，相轨迹微分方程和等倾线微分方程分别为： $T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = 0, e < -e_0$

$$\dot{e} = \frac{KM_0}{1 + \alpha T}, e < -e_0$$

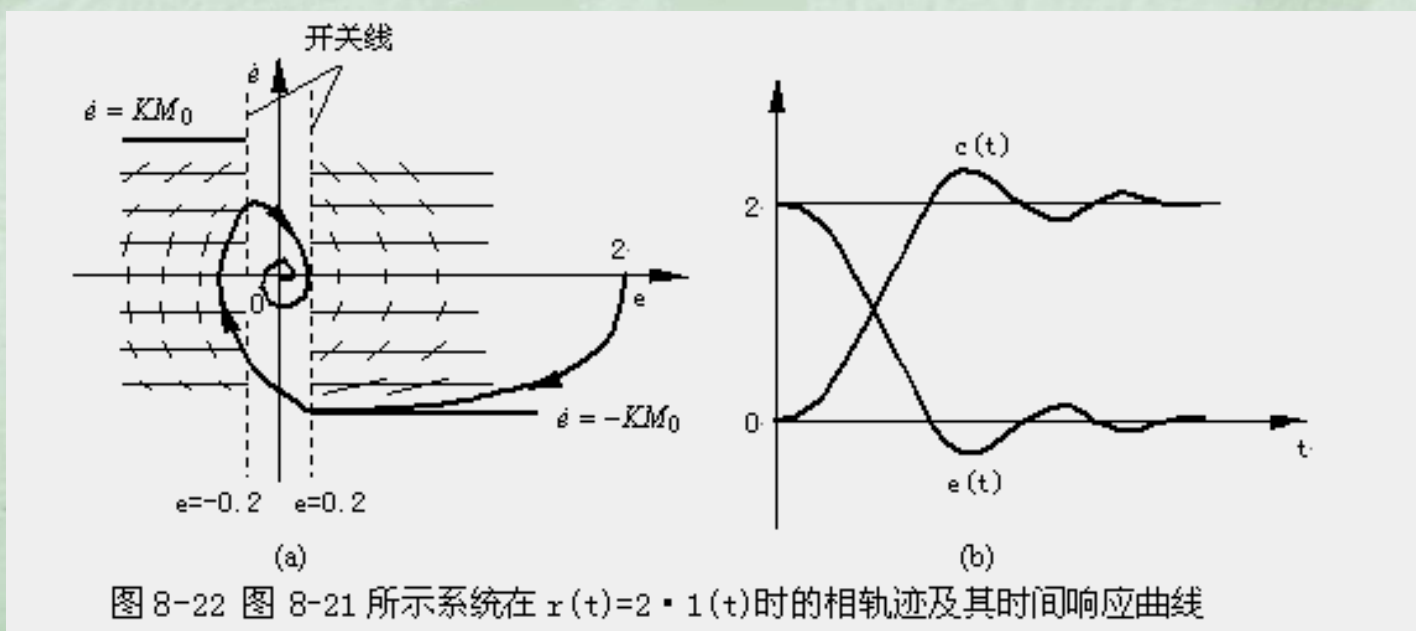
在上述两个区域的相轨迹微分方程中，由于两个微分方程在

$\dot{e} = 0, \ddot{e} = 0$ 时均无解，故两个区域均无奇点。而等倾线都是

。平行于横轴的直线

注意到在 $e > e_0$ 的区域， $\dot{e} = -KM_0$ 为系统的一条相轨迹，也就是说若初始点满足 $\dot{e} = -KM_0$ 。则相点将沿着 $\dot{e} = -KM_0$ 移动。

在 $e > e_0$ 的区域，相轨迹均渐近于 $\dot{e} = -KM_0$ 的直线；类似地，在 $e < -e_0$ 的区域，相轨迹均渐近于 $\dot{e} = KM_0$ 的直线，如图8-22 (a)所示。



最后在相平面上作出各个区域的等倾线和相轨迹的切线方向场，如图8-22(a)所示，图中绘出了 $R=2$ 的一条相轨迹。由图可见，相轨迹最终趋于坐标原点，系统的稳态误差 $e_{SS}=0$ 。相轨迹还表明，由于饱和特性的存在，减小了系统的振荡性，相应的 $e(t)$ 和 $c(t)$ 的时间响应曲线如图8-22(b)所示。

$$(2) \quad r(t) = V_0 t$$

当 $r(t) = V_0 t$ 时, 由于 $\dot{r}(t) = V_0, \ddot{r}(t) = 0$,

则系统的微分方程组变为: $T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V_0, |e| \leq e_0$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + KM_0 = V_0, e > e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} - KM_0 = V_0, e < -e_0$$

相平面的开关线为 $e = \pm e_0$ 首先讨论相轨迹在线性区

$|e| \leq e_0$ 的情况。此时相轨迹方程为: $T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = V_0$

由于微分方程的特征根为一对共轭复数, 所以在线性区 $|e| \leq e_0$ 的相轨迹应为对数螺旋线。

若令 $\dot{e} = 0, \ddot{e} = 0$, 可得奇点或平衡点为 $e = V_0/K, \dot{e} = 0$,

该奇点为稳定焦点, 奇点的位置与输入信号的大小有关。

当 $V_0 < Ke_0$ 时, 因奇点位于线性区 $|e| \leq e_0$ 的范围内,

该奇点为实奇点; 当 $V_0 > Ke_0$ 时, 奇点位于线性区 $|e| \leq e_0$

的范围之外, 相轨迹无法趋向或离开该奇点, 这样的奇

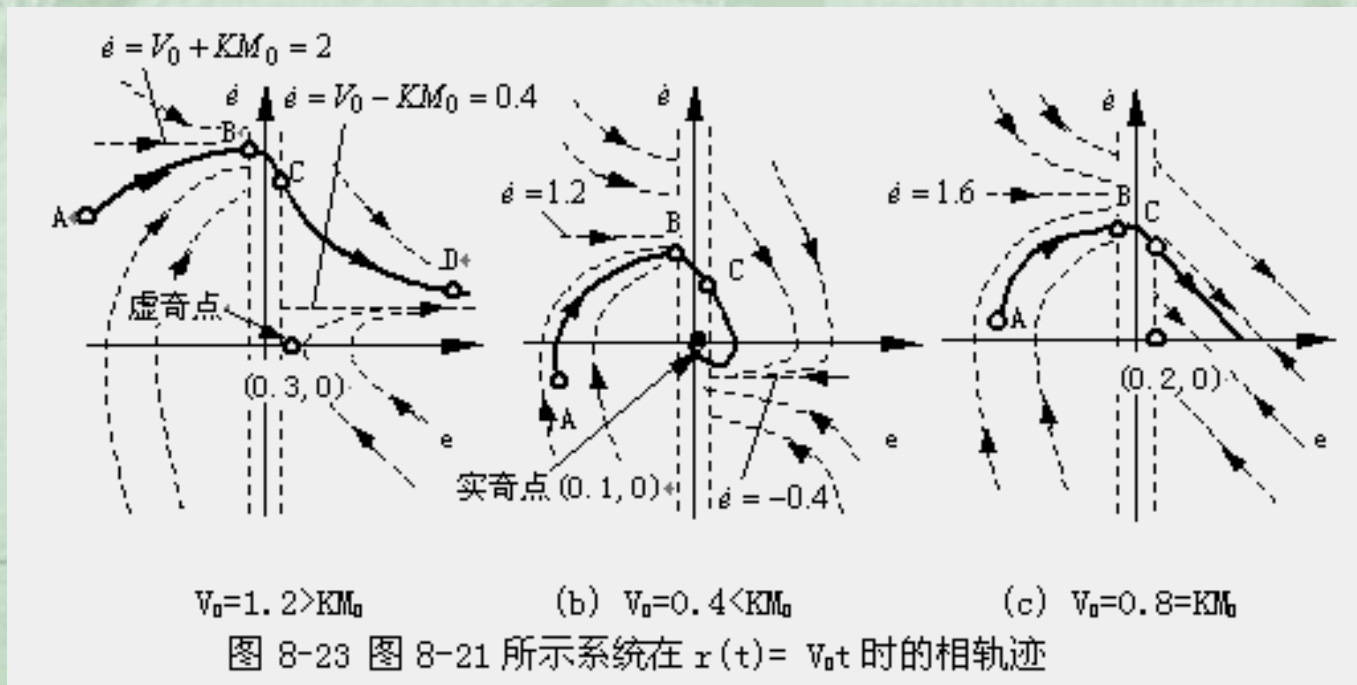
点称为虚奇点。

在 $e > e_0$ 和 $e < -e_0$ 的饱和区，相平面中不存在奇点。

在 $e > e_0$ 的区域，相轨迹均渐近于 $\dot{e} = V_0 - KM_0$,

在 $e < -e_0$ 的区域，相轨迹均渐近于 $\dot{e} = V_0 + KM_0$ 。

图8-23画出了 V_0 取不同数值时的相轨迹。



从图中可以看出，当 $V_0=1.2 > KM_0$ 时，相轨迹最终趋于水平直线：

$$\dot{e} = V_0 - KM_0 = 0.4$$

说明系统的稳态误差 $e(\infty)$ 将趋于无穷大，系统无法跟踪快速变化的斜坡信号。这是因为饱和非线性限制了系统的跟踪速度，当相点通过C点时，控制器处于正向饱和状态，控制器的输出为饱和值，使系统输出的速度受到限制，系统的输出无法跟上输入的变化，导致误差的不断增加直至无穷。从A点出发的相轨迹由AB、BC、和CD段组成，其中BC段为对数螺旋线，以 $(-0.3, 0)$ 为稳定焦点；

当 $V_0=0.4 < KM_0$ 时，相轨迹最终收敛于 $(0.1, 0)$ ，系统的稳态误差为0.1，说明系统可以跟踪变化较慢的斜坡信号，图中画出了从A点出发的一条相轨迹；

$V_0=0.8=KM_0$ 时, 在 $|e| \leq e_0$ 的区域内, 相轨迹的奇点 $(0.2, 0)$ 是稳定的焦点, 位于开关线上。在 $e > e_0$ 的区域, 相轨迹的微分方程变为:

$$de/de = -1/T,$$

说明相轨迹是相互平行的直线, 其斜率为 $-1/T$, 在该区域内, 相轨迹均渐近于

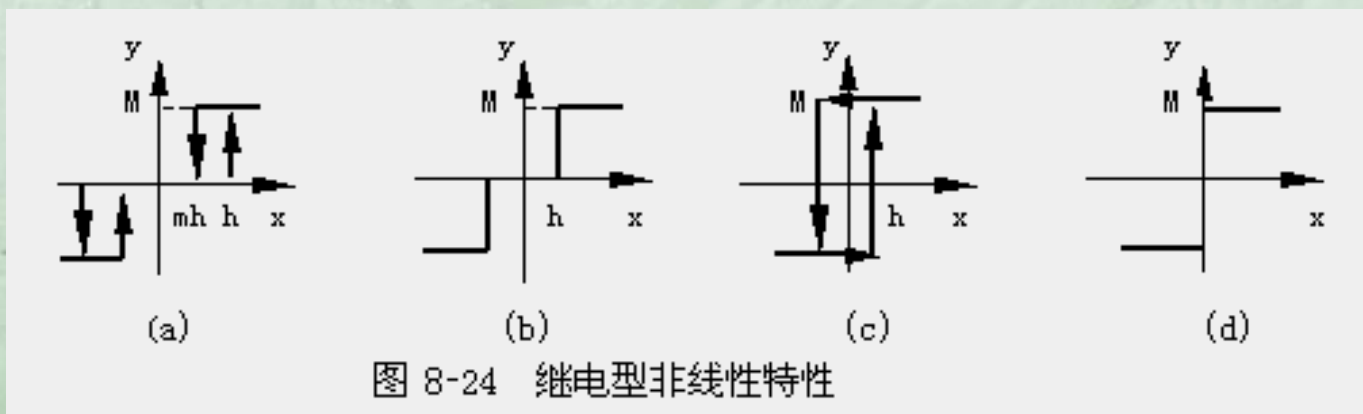
$$e = V_0 - KM_0 = 0,$$

说明相轨迹将终止于横轴上。终止的位置决定了稳态误差的大小, 与初始条件有关, 图中画出了从A点出发的一条相轨迹。

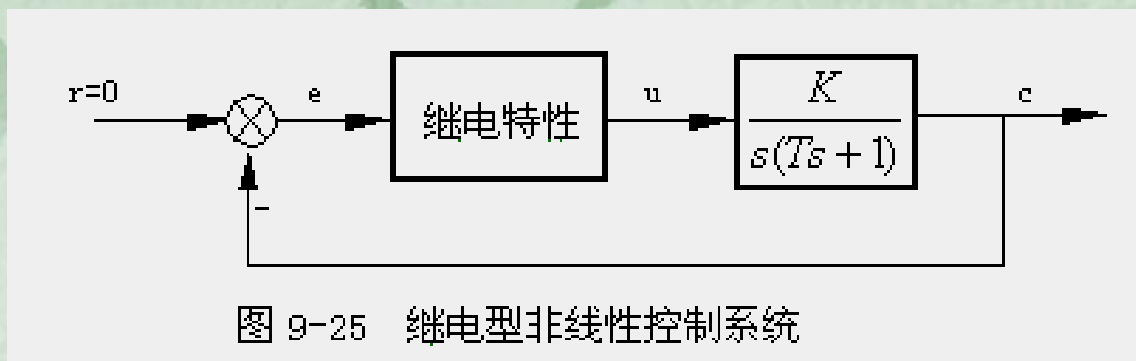
总之, 图8-23表明, 非线性系统与线性系统有着完全不同的运动特性, 非线性系统的运动形式及稳态误差既和输入信号的大小有关, 也和初始条件有关。

2: 继电型非线性控制系统

含有继电型非线性元件的系统称为继电型系统。继电型非线性的一般形式如图8-24 (a)所示，称为具有滞环的三位置继电特性；若 $m=1$ ，即为具有死区的三位置继电特性，如图8-24 (b)所示；若 $m=-1$ ，即为具有滞环的两位置继电特性，如图8-24 (c)所示；若 $h=0$ ，即为理想继电特性，如图8-24 (d)所示。



设继电器型非线性控制系统如图8-25所示，下面具体分析当图8-25中的继电器特性分别为图8-24中的四种情况时，系统自由运动的相平面图及其运动特点，在绘制相平面图时，均取 c 和 \dot{c} 为相坐标。



(1) 具有死区的三位置继电器特性 ($m=1$)

线性部分的微分方程为: $T\ddot{c} + \dot{c} = Ku$

当继电器特性为具有死区的三位置继电器特性时, 上式可以写成分段线性微分方程为: $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, c > h$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = 0, |c| < h$$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = KM, c < -h$$

开关线为 $c = \pm h$ ，两条开关线将相平面划分为三个线性区域，下面分区绘制相轨迹。

在 $c > h$ 区域，相轨迹方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM$

类似于具有饱和特性的非线性控制系统时的讨论，相平面在该区域无奇点，相轨迹均渐近于 $\dot{c} = -KM$ 的直线。

在 $c < -h$ 区域，相轨迹方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = KM$

相平面在该区域无奇点，相轨迹均渐近于 $\dot{c} = KM$ 的直线

在 $|c| < h$ 区域，相轨迹方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = 0$

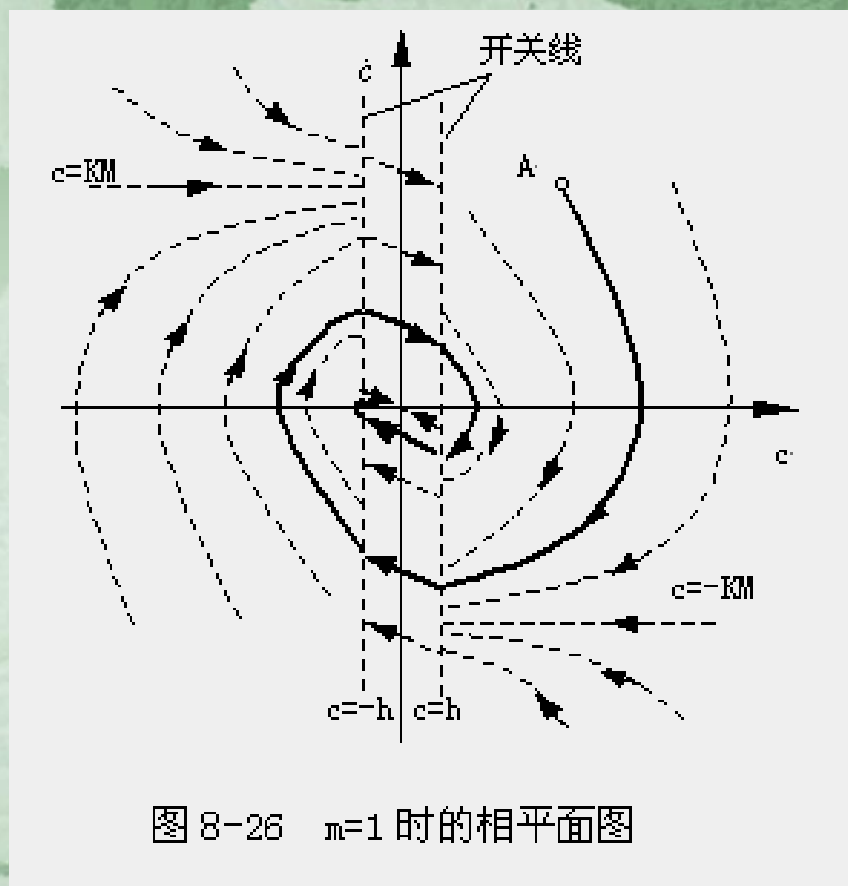
由
$$\frac{d\dot{c}}{dc} = -\frac{1}{T}$$

说明该区域的相轨迹斜率均为 $-1/T$ ，这意味着相轨迹应是一族斜率为 $-1/T$ ，且相互平行的直线。

另外若令 $\dot{c} = \ddot{c} = 0$ ，系统的相轨迹方程恒成立，说明在该区域内， $\dot{c} = 0$ 均为平衡点，相轨迹可终止于其中的任一点。有时把这一段直线称为系统的平衡段。具有死区的三位置继电特性的非线性控制系统相平面图如图8-26所示。

从图中可以看出，在开关线 $c = +h$ 和 $c = -h$ 处，相轨迹发生了转换，表明继电器由一种工作状态转换为另一种工作状态。一旦相轨迹到达平衡段，系统便处于平衡工作状态，平衡段 $0, |c| < h$ 上的每一点都对应系统的一个平衡状态。系统究竟处于哪一个平衡状态以及稳态误差 ($e = -c$) 的大小，除与系统的结构参数有关外，还取决于初始条件。平衡段还说明，继电特性的死区造成稳态误差，降低了系统的稳态精度。

相图还表明，不论初始条件如何，系统的暂态过程均为衰减振荡过程并最终收敛于平衡点，系统是稳定的。但是初始条件对暂态过程的影响十分显著。



系统的振荡情况还与时间常数 T 密切相关。若减小时间常数 T ，则在 $|c| < h$ 区域内，相轨迹的斜率增大，在相同的初始条件下，相轨迹经过很少次切换就能达到平衡点，提高了暂态响应的平稳性；反之，增大时间常数 T ，相轨迹要经过多次切换才能达到平衡点，因而加剧了暂态过程的振荡。另外，系统的振荡情况还与 KM 值有关， KM 加大，系统的振荡加剧，收敛也会变慢。

(2) 具有滞环的两位置继电特性 ($m=-1$)

当继电特性为具有滞环的两位置继电特性时，可以写成分段线性微分方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, c > h; c > -h, \dot{c} < 0$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = KM, c < -h; c < -h, \dot{c} > 0$$

开关线方程为 $c = h, \dot{c} > 0$

$$c = -h, \dot{c} < 0,$$

两条开关线将整个相平面划分成两个区域：

在区域 $c > h$ 及 $c < -h, \dot{c} < 0$,

相轨迹方程 $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM$,

该区域无奇点，相轨迹渐近于 $\dot{c} = -KM$

的水平直线；

在区域 $c < h$ 及 $c < -h, \dot{c} < 0$,

相轨迹方程 $T\ddot{c} + \dot{c} = KM$,

该区域无奇点，相轨迹渐近于 $\dot{c} = KM$

的水平直线；

系统的相平面图如图8-27所示。

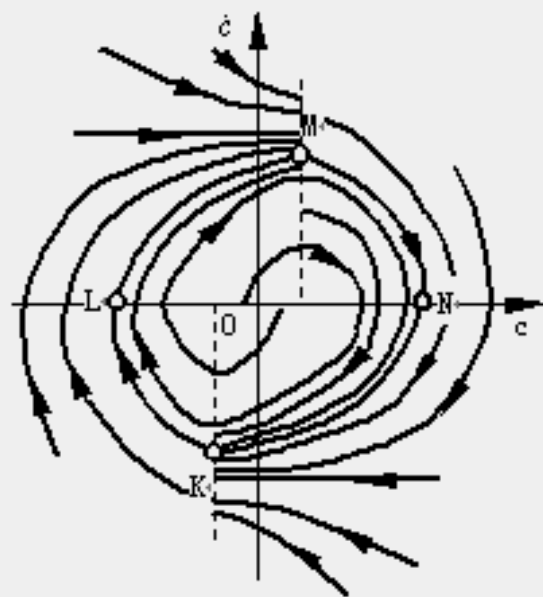


图 8-27 $m=-1$ 时的相平面图

由图8-27可见， $m=-1$ 时的相轨迹与 $m=1$ 时的相轨迹不同，这时 $\dot{c}=0, |c|<h$ 不再是系统的平衡段，由这个线段出发的相轨迹都向外发散，而由较大初始条件出发的相轨迹都向内收敛。介于从内向外发散和从外向内收敛的相轨迹之间，存在着一个极限环KLMNK（极限环也称奇线，是指相图中的封闭曲线，当相点在极限环中运行时，系统的输出为等幅振荡），该极限环为稳定的极限环，这是因为当相点在极限环中运行时，若扰动使相点离开极限环，一旦扰动消失，相点将趋向极限环，说明该极限环对应于一个稳定的等幅振荡。

图8-27还表明，从任一初始点出发的相轨迹都趋于这个稳定的极限环，系统的输出出现等幅振荡。因此对这个系统而言，不论初始条件如何，系统最终均处于自持振荡状态，振荡的周期与振幅仅取决于系统的参数，与初始条件无关。在控制系统中其它的滞环特性（例如间隙特性）也可能引起系统自持振荡，可见滞环特性恶化了系统的品质。

现在讨论另外一种情况，若初始时刻继电特性输出为 $-M$ ，
 $|e| < h, \dot{e} < 0$,

由于此时相轨迹方程为 $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, -h < c < h, \dot{c} > 0$,

这种情况在图8-27中便无法表示出来，为此可以画出 $c > -h$ 时，相轨迹方程为 $\dot{c} = -KM$ 的相平面图，如图8-28(a)所示。

同样若初始时刻继电特性输出为 M ， $|e| < h, \dot{e} > 0$ ，

由于此时相轨迹方程为

$$T\ddot{c} + \dot{c} = KM, -h < c < h, \dot{c} < 0,$$

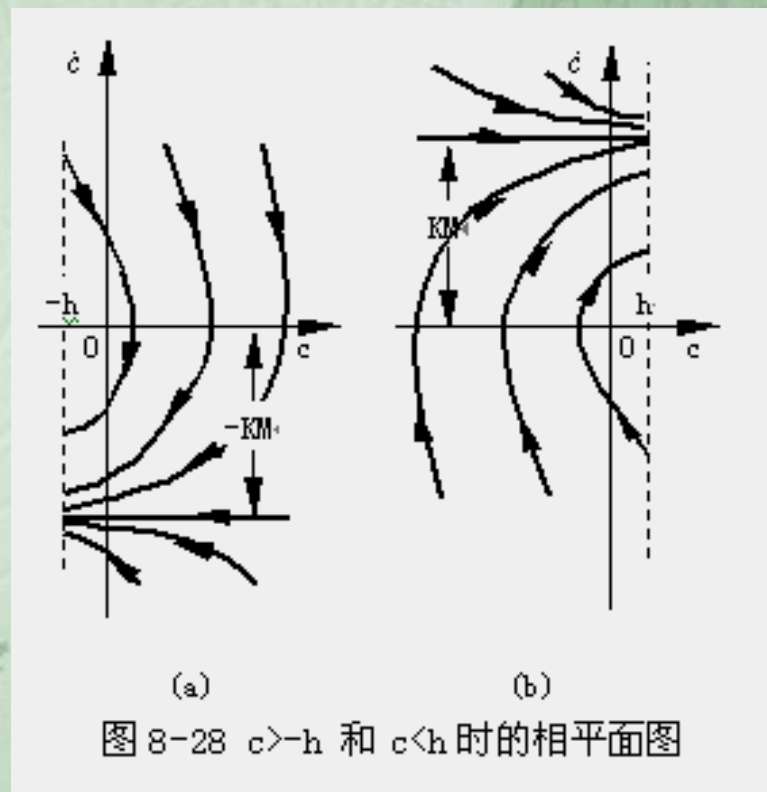
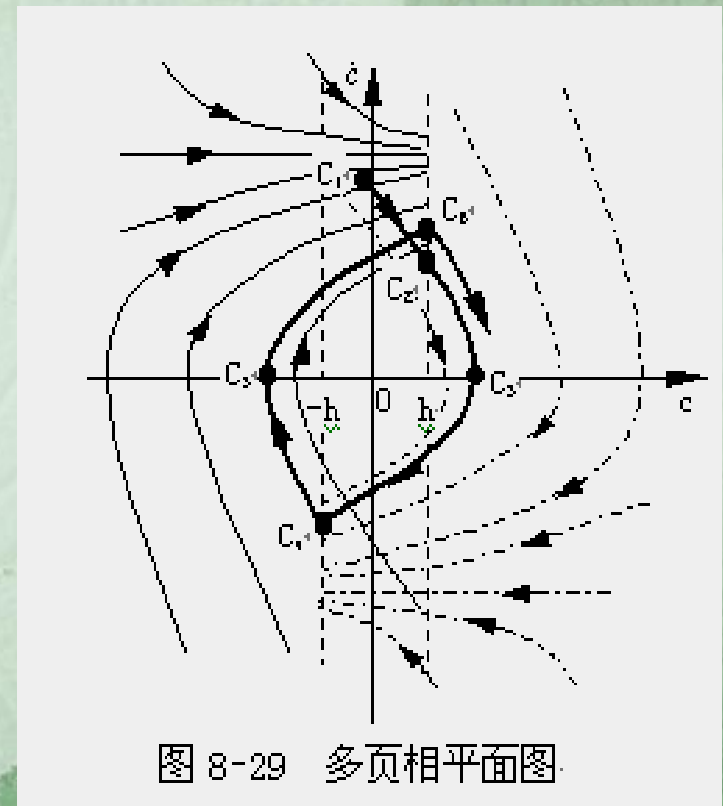


图 8-28 $c > -h$ 和 $c < h$ 时的相平面图

这种情况在图8-27中便无法表示出来，为此可以画出 $c < h$ 时，相轨迹方程为 $T\ddot{c} + \dot{c} = KM$ 的相平面图，如图8-28 (b) 所示。

把图8-28 (a) 和图8-28 (b) 画在一张图上时，便得到了系统完整的相平面图，如图8-29所示。图8-29为多页相平面图，图中在 $-h < c < h$ 部分，相轨迹有重叠，可根据具体情况，决定采用何种形式的相轨迹，图中画出了初始时刻继电特性输出为 $-M$ ， $|c| < h, \dot{c} < 0$ 的一条相轨迹，该相轨迹的起点为 C_1 点，相轨迹将沿着 $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_4 \rightarrow C_5 \rightarrow C_6$ 移动。



(3) 既有死区又有滞环的继电特性 ($-1 < m < 1$)

当继电特性为既有死区又有滞环的继电特性时，分段线性微分方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, c > h; c > mh, \dot{c} < 0$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = 0, -h < c < mh, \dot{c} < 0; -mh < c < h, \dot{c} > 0$$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = KM, c < -h; c < -mh, \dot{c} > 0$$

开关线方程为 $\dot{c} > 0, c = h, c = mh$

和 $\dot{c} < 0, c = -h, c = -mh$ ；四条开关

线将相平面划分为三个区域，

可绘出系统的相平面图，如图8-30所示。

将图8-30与 $m=1$ 时的相平面图相

比较，其区别在于：上半平面

的开关线由 $c=-h$ 变为 $c=-mh$ ；下

半平面的开关线由 $c=h$ 变为

$c=mh$ 。

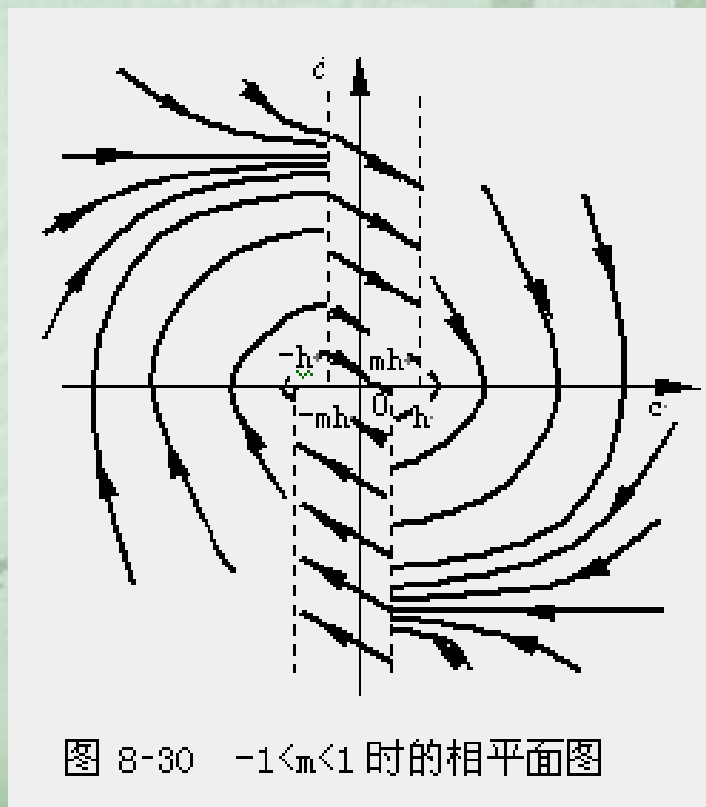


图 8-30 $-1 < m < 1$ 时的相平面图

图8-31绘出了随着 m 的减小，相轨迹变化的示意图。从图中可以看出，系统的振荡趋势将逐渐加大，当 m 减小到 $0 < m \ll 1$ 时，相平面图将由图8-31(a)变为(b)，这时出现了半稳定的极限环。当 m 进一步减小至 $-1 < m < 0$ 时，系统的相平面图变为(c)，这时出现了稳定的极限环和一条由两条相轨迹围成的区域，如图中阴影线所示。这时，若初始状态落在阴影线区域内，则系统的自由运动将趋于平衡状态，否则将产生自持振荡。

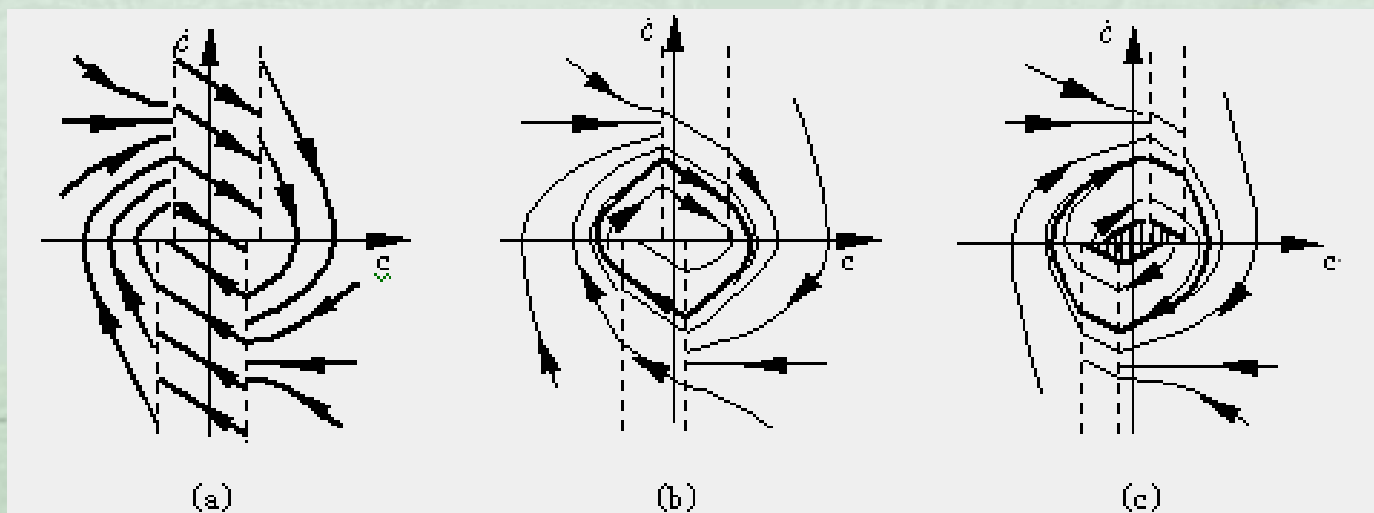


图 8-31 m 逐渐减小时振荡趋势加大的示意图

可以肯定，当m值减小到一定数值时，系统中将会出现自持振荡。通过研究，系统产生自持振荡的充分必要条件是：

$$e^{-\frac{2h}{KMT}} - 1 + \frac{(m+1)h}{KMT} < 0$$

显然，当m=-1时，上式成立，系统有自持振荡发生；当m=1时，上式不成立，系统无自持振荡。

(4) 理想继电特性 ($h=0$)

当继电特性为理想继电特性时,可以写出继电型控制系统的分段线性微分方程为: $T\ddot{c} + \dot{c} = KM, c > 0$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, c < 0$$

开关线方程为 $c=0$ 。开关线将相平面划分为左、右两个区域,可以画出系统的相平面图如图8-32所示。实际上在图8-26中,令 $h=0$,即可得到图8-32。由图8-32可见,从任一初始点出发的相轨迹均收敛于坐标原点,控制系统在某一初始条件下的自由运动呈衰减振荡形式,系统的输出最终趋于零,稳态误差也为零。

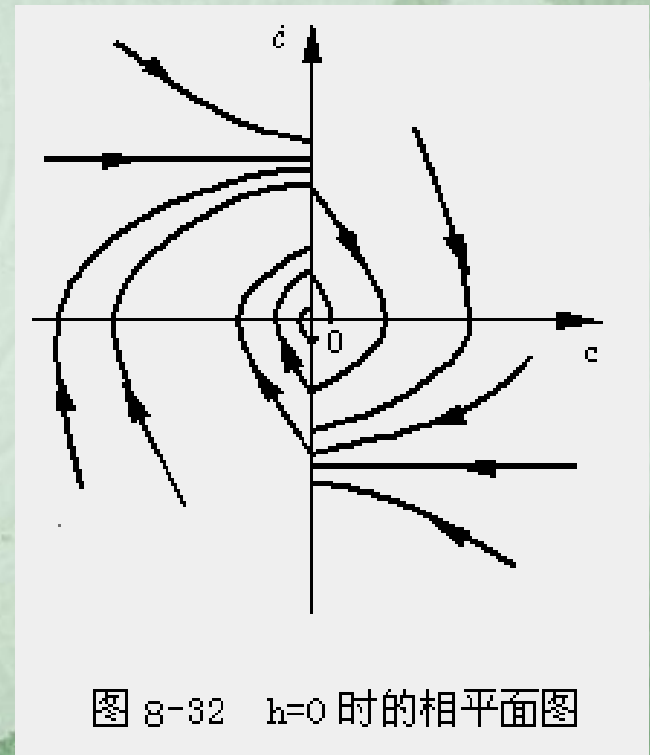


图 8-32 $h=0$ 时的相平面图

速度反馈对系统自由运动的影响

设具有速度负反馈的继电型控制系统的结构图如图8-33所示，图中 $\tau < T$ 。

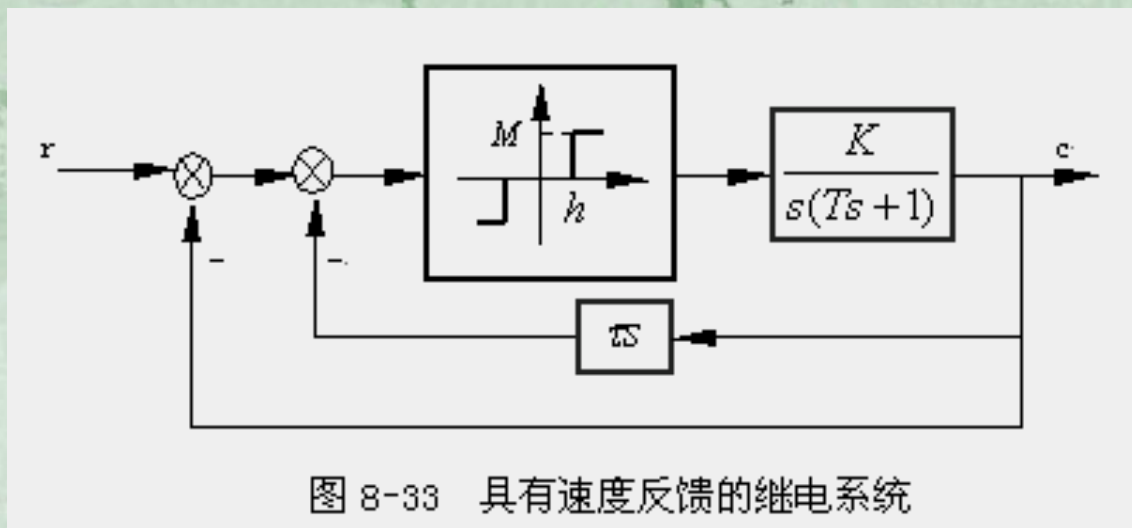


图 8-33 具有速度反馈的继电系统

这时系统的分段线性微分方程为：

$$T\ddot{c} + \dot{c} = KM, c + \tau\dot{c} < -h$$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = 0, |c + \tau\dot{c}| < h$$

$$T\ddot{c} + \dot{c} = -KM, c + \tau\dot{c} > h$$

开关线方程 $c + \tau\dot{c} = \pm h$,

两条开关线将相平面划分成三个区域。

在 $c + \tau\dot{c} > h$ 的区域, 相轨迹方程为 $T\ddot{c} + \dot{c} = -KM$, 该区域内无奇点, 相轨迹均渐近于 $\dot{c} = -KM$ 的水平线;

在 $c + \tau\dot{c} < -h$ 的区域, 相轨迹方程为 $T\ddot{c} + \dot{c} = KM$, 该区域内无奇点, 相轨迹均渐近于 $\dot{c} = KM$ 的水平线;

在 $|c + \tau\dot{c}| < h$ 的区域, 相轨迹方程

$$T\ddot{c} + \dot{c} = 0$$

可写为 $d\dot{c}/dc = -1/T$, 说明相轨迹均为斜率为 $-1/T$ 的直线, 且 $\dot{c} = 0, |c| < h$ 为平衡段, 系统的相平面图如图8-34所示。

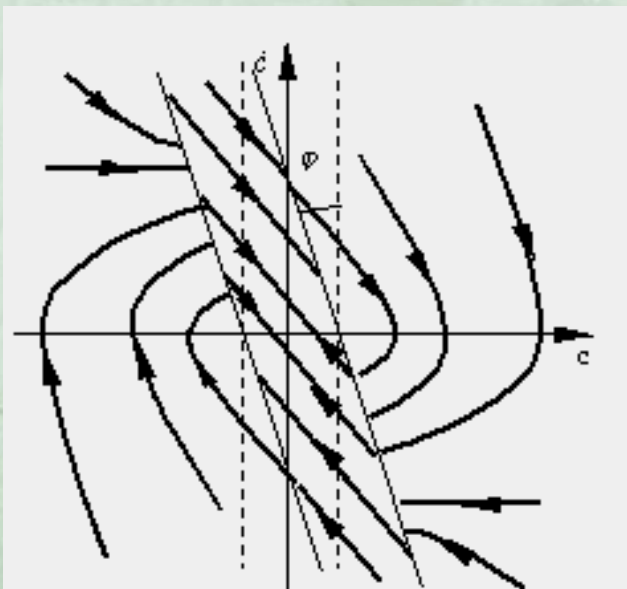


图 8-34 具有速度负反馈的继电型控制系统的相平面图

将图8-34与图8-26比较可以看出两者主要是开关线不同。未接入速度反馈时，开关线为通过 $\pm h$ 的两条与c轴垂直的直线；在接入速度反馈后，这两条开关线分别绕c轴上的 $\pm h$ 点反时针方向转了一个角度 $\phi = \arctg \tau$ 。由于开关线反时针转动的结果，相轨迹将提前进行转换，这样就使得自由运动的超调量减小，调节时间缩短，系统的性能将得到改善。由于开关线转过的角度随着速度反馈强度的增大而增大，因此当 $\tau < T$ 时，系统的性能将随着速度反馈的增大而得到改善。从这个例子中可以看出，开关线在上半平面向左移动，在下半平面向右移动，将会使系统性能变好。在前面的例子中， $-1 < m < +1$ 的情况，是开关线在上半平面向右移动，在下半平面向左移动，从而使系统性能变坏。开关线与系统性能的这种密切关系，在用相轨迹法分析系统时非常重要，利用这种关系不仅可以比较不同系统性能的好坏，而且还可以通过改变开关线的位置来改善系统的性能。

继电系统的滑动现象

图8-33所示系统，若速度反馈信号过强，使得 $\tau > T$ 时，系统中会发生滑动现象，也就是说，相轨迹会沿着开关线滑向平衡位置。为了说明滑动状态时相轨迹的特点，需要研究开关线附近相轨迹的走向。对于本例，由于两条开关线附近相轨迹的情况对称，这里只讨论开关线 $c + \tau\dot{c} = -h$ 附近的情况。

定义一个函数 $\xi = c + \tau\dot{c} + h$

显然，当 $\xi = 0$ 时即为所要研究的开关线。当 ξ 取不同值时，在相平面上得到一族平行于开关线的直线，每条直线上的 ξ 值相同，称为等 ξ 线。如图8-35所示。

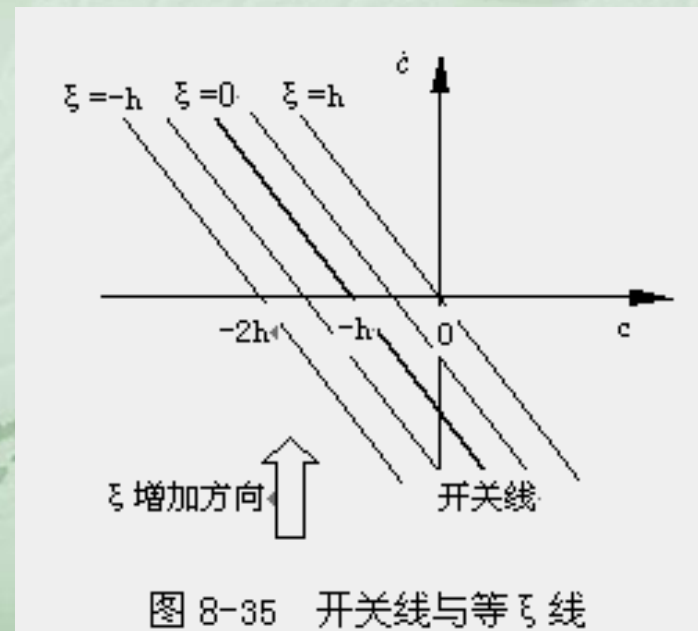


图 8-35 开关线与等 ξ 线

从图中可以看出，在开关线的下方， $\xi < 0$ ， ξ 值越大，等 ξ 线越靠近开关线，由于相平面上每一点均对应于一个 ξ 值，因此当相点沿着相轨迹移动时，其对应的 ξ 值也将发生变化。

在某相点处，若 $d\xi/dt > 0$ ，说明此处的相轨迹将走向开关线，若 $d\xi/dt < 0$ ，说明此处的相轨迹将离开开关线；在开关线的上方， $\xi > 0$ ，经类似分析，可以得出结论，在某相点处，若 $d\xi/dt > 0$ ，说明此处的相轨迹将离开开关线，若 $d\xi/dt < 0$ ，说明此处的相轨迹将走向开关线。通过研究相轨迹在开关线附近时， $d\xi/dt$ 的正负情况，即可判断出相轨迹的走向。

下面研究相轨迹在开关线

$$c + \tau \dot{c} = -h$$

两侧相轨迹的走向，在开关线的上方，相轨迹方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = 0$

在相轨迹上

$$\text{有 } \frac{d\xi}{dt} = \tau \ddot{c} + \dot{c} = \left(-\frac{\tau}{T} + 1\right) \dot{c}$$

由于 $\tau > T$ ，故当 $\dot{c} > 0$ 时，有 $d\xi/dt < 0$ ，说明在相平面的上半部，相轨迹将走向开关线；而在 $\dot{c} < 0$ 的区域，即相平面的下半部，有 $d\xi/dt > 0$ ，说明相轨迹将离开开关线。

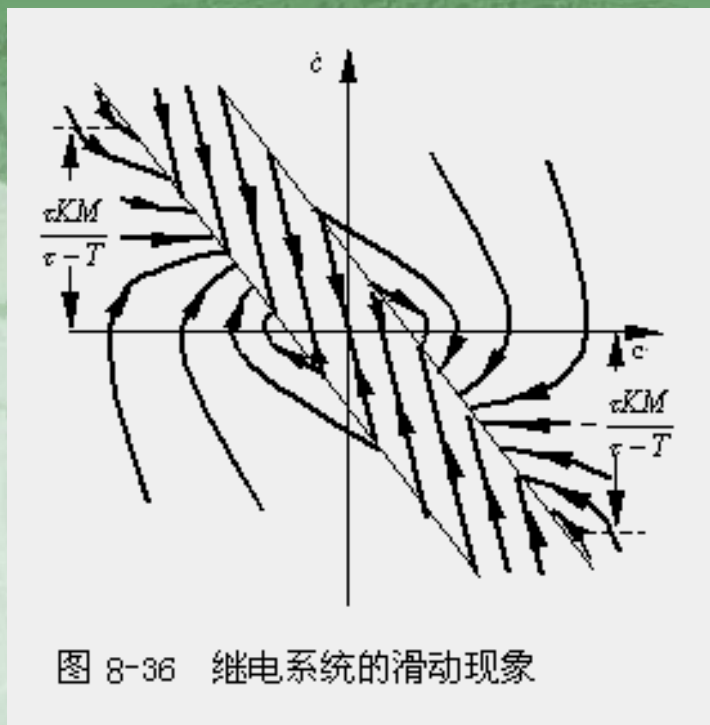


图 8-36 继电器系统的滑动现象

在开关线的下方，相轨迹方程为： $T\ddot{c} + \dot{c} = KM$

在相轨迹上有： $\frac{d\xi}{dt} = \tau\ddot{c} + \dot{c} = \left(-\frac{\tau}{T} + 1\right)\dot{c} + \frac{KM\tau}{T}$

由上式可知，在 $\dot{c} > \frac{\tau KM}{\tau - T}$ 的区域，有 $d\xi/dt < 0$ ，说明相轨迹将离开开关线；

在 $\dot{c} < \frac{\tau KM}{\tau - T}$ 区域，有 $d\xi/dt > 0$ ，说明相轨迹将走向开关线。

根据以上的讨论，可以画出当 $\tau > T$ 时控制系统的相平面图如图8-36所示。

需要注意的是，在开关线 $c + \tau\dot{c} = -h$ 上, $0 < \dot{c} < \frac{\tau KM}{\tau - T}$ 的区域，由于开关线两侧的相轨迹均走向开关线。因此，一旦相轨迹进入开关线，相点只能沿着开关线滑向 $(-h, 0)$ 点；

同样，在开关线 $c + \tau\dot{c} = h$ 上, $0 > \dot{c} > -\frac{\tau KM}{\tau - T}$ 的区域，由于开关线两侧的相轨迹均走向开关线，因此，一旦相轨迹进入开关线，相点只能沿着开关线滑向 $(h, 0)$ 点。

利用非线性改善系统的性能

利用非线性可以改善控制系统的性能，下面通过两个例子加以说明。

1: 粗、精调控制系统 图8-37为一具有非线性放大器的控制系统，其中非线性环节的放大系数根据误差信号的大小而发生变化。当误差信号较大时，非线性环节的放大系数较大，当误差信号较小时，非线性环节的放大系数较小。

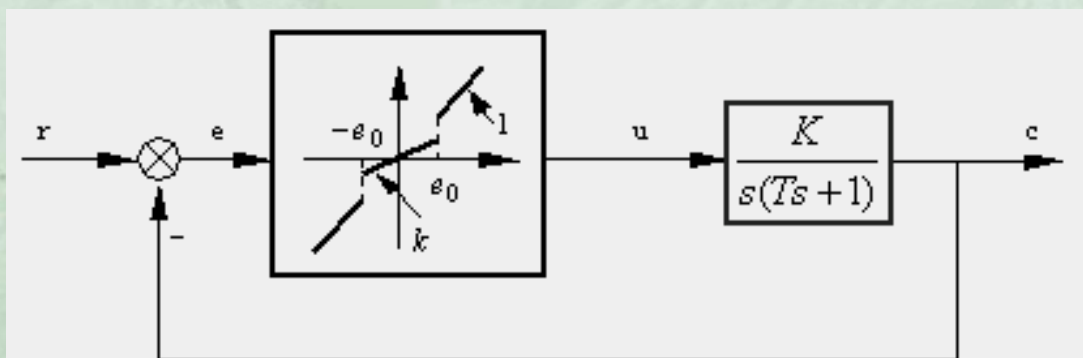


图 8-37 具有非线性放大器的系统

在时域分析法中，对典型二阶系统的单位阶跃响应作了详细的研究。若系统的开环放大系数较大，则系统具有较强的调节能力，在动态响应中，表现为上升时间较短，但系统响应的平稳性较差，易使超调量增加。若系统的开环放大系数较小，则系统响应较为缓慢，在动态响应中，表现为上升时间、调节时间长，但系统响应的平稳性较好，可使响应无超调。

对于线性系统，单纯调节开环放大系数，难以得到理想的响应曲线。采用非线性环节，在响应的初始阶段，误差信号较大，此时开环放大系数大，利于系统的快速响应；当输出信号接近希望值时，误差信号较小，此时开环放大系数小，有利于减小超调量，进而减小调节时间，得到较为理想的响应曲线。

下面用相平面法来分析图8-37所示系统的单位阶跃响应，分析时，取系统的误差及其导数为相坐标。为了明确起见，假设系统参数之间满足下列关系： $\frac{1}{2\sqrt{KT}} < 1 < \frac{1}{2\sqrt{kKT}}$

系统的分段线性方程为：

$$T\ddot{c} + \dot{c} = Ku$$

$$u = \begin{cases} ke, & |e| < e_0 \\ e, & |e| > e_0 \end{cases}$$

$$e = r - c$$

考虑到单位阶跃信号输入 $\ddot{r} = \dot{r} = 0$

时, 上述微分方程可写

$$\text{为: } T\ddot{e} + \dot{e} + Ke = 0, |e| > e_0$$

$$T\ddot{e} + \dot{e} + kKe = 0, |e| < e_0$$

两条开关线为 $e = \pm e_0$, 它们将相平面划分为三个线性区域。

在 $|e| > e_0$ 区域, 平衡点在坐标原点, 为虚奇点, 由于微分方程的特征根为共轭复数, 故相轨迹为对数螺旋线, 由零初始条件求得相轨迹的起始点为 $(1, 0)$ 。

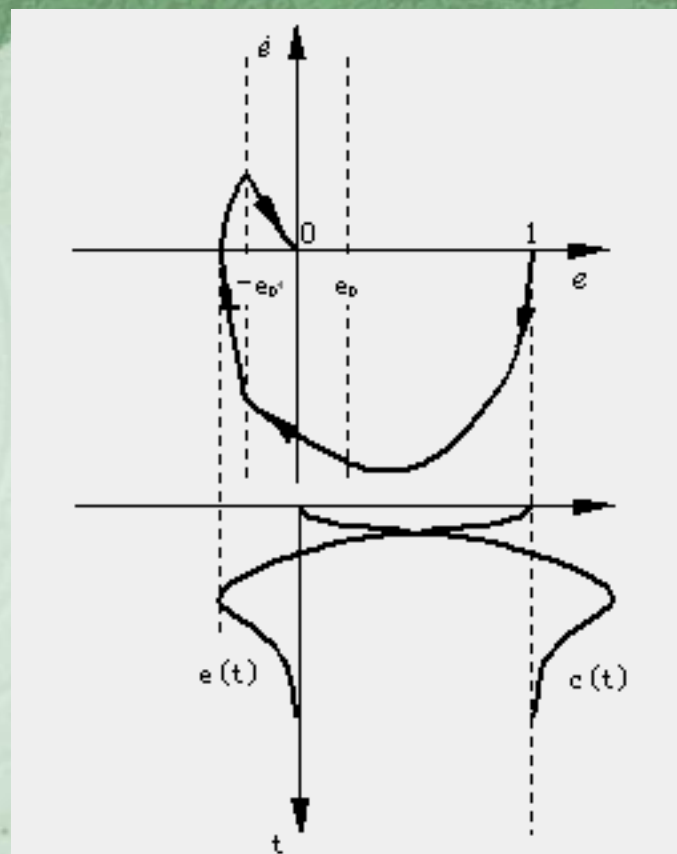


图 8-38 图 8-37 所示系统
单位阶跃响应时的相轨迹及其时间响应

在 $|e| < e_0$ 区域，平衡点在坐标原点，为实奇点，由于微分方程的特征根为两个负数，故相轨迹为抛物线。

可画出系统的相平面图如图8-38所示，从图中可以看出，相轨迹最终趋于相平面的原点，说明在阶跃信号作用下稳态误差为零。图中还画出了系统的单位阶跃响应曲线和误差响应曲线，可以看出，系统的单位阶跃响应较为迅速且超调量大为减小。

2: 滑模变结构控制系统 图8-39为一变结构控制的二阶系统方框图。图中线性部分的传递函数为:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s - 1}$$

变结构控制规律为:

$$u(t) = r + kc = kc,$$

k可取为2或-3。

控制系统的微分方程为: $\ddot{c} - 2\dot{c} - c = ku$

当k=2时, 可得到一个线性二阶系统, 其微分方程为:

$$\ddot{c} - 2\dot{c} - 3c = 0$$

特征根为-1和+3, 平衡点在坐标原点, 为一鞍点, 其相轨迹如图8-40(a)所示。

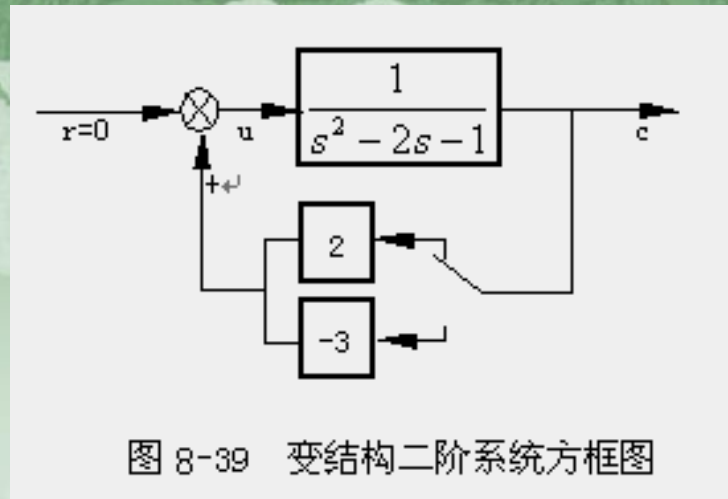


图 8-39 变结构二阶系统方框图

当 $k(x_1) = -3$ 时，可得到另一个线性二阶系统，其微分方程为：

$$\ddot{c} - 2\dot{c} + 2c = 0$$

特征根为 $1 \pm j$ ，平衡点在坐标原点，为一不稳定的焦点，其相轨迹如图 8-40 (b) 所示。

现假设开关切换按下式进行：

$$k = \begin{cases} -3, & \sigma c > 0 \\ 2, & \sigma c < 0 \end{cases}$$

其中开关线为：

$$\sigma = s_1 c + \dot{c}, 0 < s_1 < 1$$

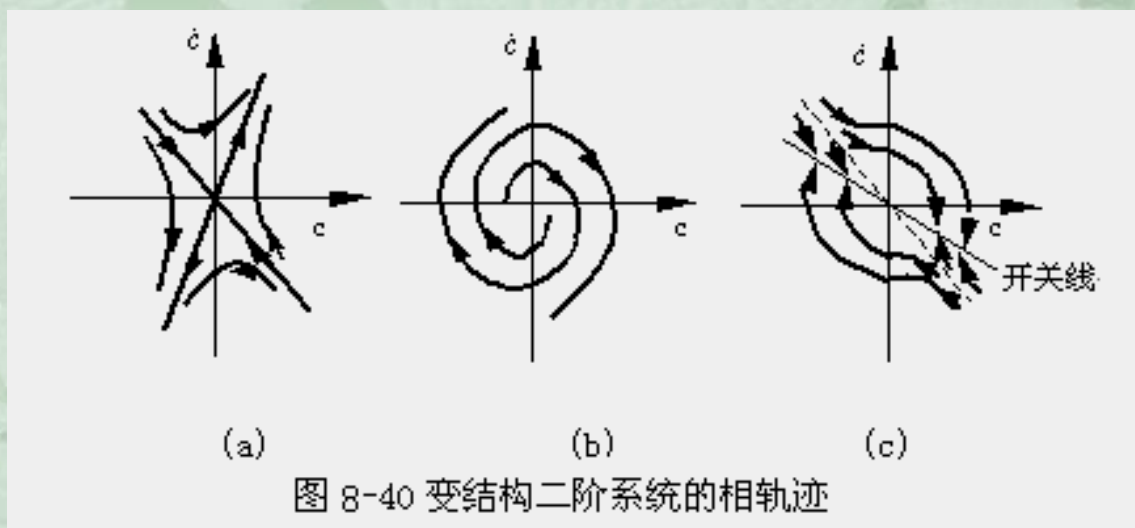


图 8-40 变结构二阶系统的相轨迹

于是画出系统的相平面图如图8-40(c)所示。从图中可以看出，系统的相轨迹在开关线上存在滑动，此时的系统称为滑模变结构系统。相轨迹一旦进入开关线，系统的动态性能即相当于一个一阶系统(此时微分方程为 $\sigma=0$)。由于系统的参数的变化不影响开关线的选择(开关线的选择必须保证滑动存在)，故系统具有较高的鲁棒性。另外相轨迹滑动时，系统的性能由开关线决定，所以合理地选择开关线可使系统具有良好的性能。

综上所述，利用滑模变结构控制，可以极大地改善系统的性能，变结构控制的意义就在于它具有在不同点及时地选择系统结构的能力。

3: 控制信号受限制的时间最优控制

实际系统中各个信号及其变化速度都受到各种物理上的限制，这种限制使得实际系统的动作速度受到限制，不可能无限地提高。时间最优控制的提法是：在控制信号受到限制的条件下，找出系统的控制规律，使系统的输出量以最短的时间从原值无振荡地变到所要求的给定值。

若系统的微分方程式为：
$$c^{(n)} + a_1 c^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{c} + a_n c = bu$$

式中， u 是控制信号，其幅值受到限制，即 $|u| \leq u_0$ 。

有：

可以证明，系统的最优控制规律是继电型的控制，也就是说，控制信号的大小始终是最大值，而信号的符号交替地取正或负，最多有 $n-1$ 次转换。

图8-41为一时间最优控制系统的方框图，要求寻找最优控制规律，使系统动态过程的时间最短。

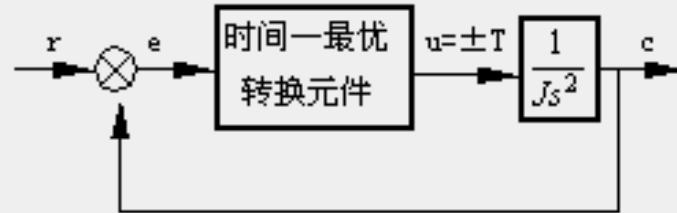


图 8-41 时间最优系统方框图

当输入是阶跃信号时，上述方程可写为： $J\ddot{e} = -Tf(e)$

$$\text{其解为： } \dot{e}^2 = -\frac{2T}{J}e + A_0, f(e) = 1$$

$$\dot{e}^2 = \frac{2T}{J}e + A_1, f(e) = -1$$

若以 e 和 \dot{e} 为相坐标
绘制相平面，则相轨
迹为两族抛物线。

$f(e) = 1$ 时，抛物线开口朝着 e 轴的负方向， A_0 由初始条件决定； $f(e) = -1$ 时，抛物线开口朝着 e 轴的正方向， A_1 由初始条件决定。如图 8-42 所示。

在这两组抛物线中只有 $\dot{e}^2 = \pm 2Te/J$ 是通过坐标原点的，在图上表示为 A_0 和 B_0 。

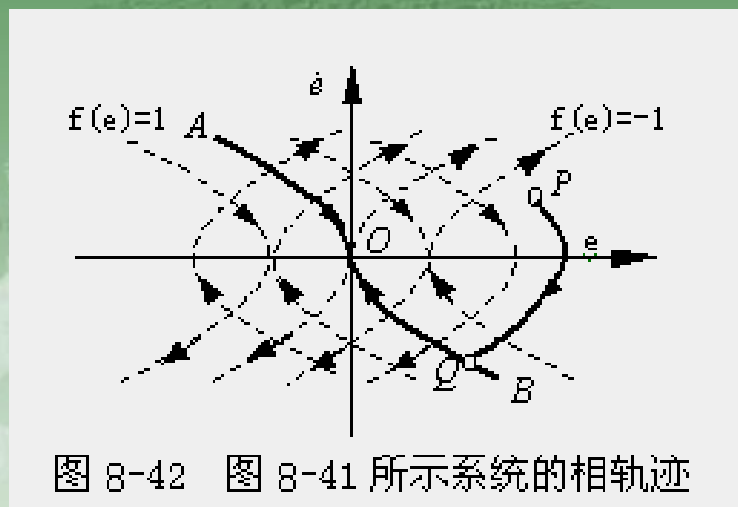


图 8-42 图 8-41 所示系统的相轨迹

若给定相平面上的一个初始点P，为做到时间最优，应利用 $u=T$ （即 $f(e)=1$ ）使相点由P沿着抛物线运动到Q点，到达Q的那个时刻，就必须将控制信号换成 $u=-T$ （即 $f(e)=-1$ ），系统的相点就沿着QO的轨迹移向原点。若初始点在S点，首先应利用 $u=-T$ 使相点移动到T点，再利用 $u=T$ 使相点沿着TO的轨迹移向原点。因此AOB就是最优的开关线。系统的相点最终应沿着AO和BO进入平衡状态。表示最优控制规律的函数 $f(e)$ 如下：

$$f(e) = \begin{cases} +1, \dot{e}^2 - \frac{2T}{J}e < 0; & \dot{e} > 0, \dot{e}^2 + \frac{2T}{J}e \geq 0 \\ -1, \dot{e}^2 + \frac{2T}{J}e < 0; & \dot{e} < 0, \dot{e}^2 - \frac{2T}{J}e \geq 0 \end{cases}$$

8-4 描述函数

描述函数的一般概念

非线性特性的描述函数表示法，是线性部件频率特性表示法的一种推广。用描述函数后，非线性系统近似为线性系统，可用线性系统理论去分析，甚至设计。

考虑图8-43所示的非线性环节N，其输入为 $x(t)$ ，输出为 $y(t)$ 。若输入信号为正弦函数，即： $x(t) = X \sin \omega t$

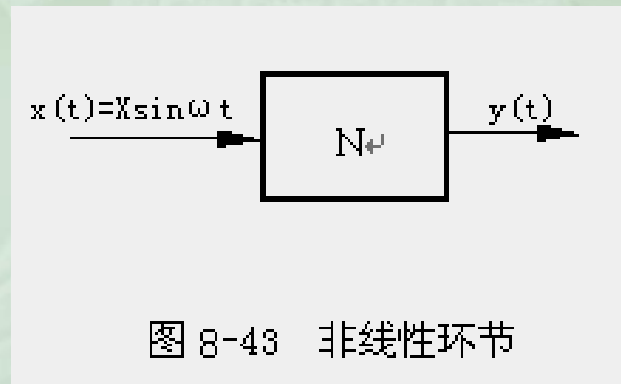


图 8-43 非线性环节

一般情况下，非线性环节的稳态输出 $y(t)$ 是与输入信号同频率的非正弦周期函数，且此周期函数可以展成傅里叶级数：

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t), B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \phi_n = \arctg \frac{A_n}{B_n}$$

式中： $A_0/2$ 是输出信号中的直流分量； Y_n 是输出信号中各次谐波分量的幅值，一般情况下是输入信号幅值 X 和频率 ω 的函数。

如果非线性特性是奇对称的(即非线性特性关于原点对称,如死区特性、饱和特性等),则 $A_0=0$,说明输出信号中不含有直流分量,此时若只考虑输出信号中的一次谐波分量,而把高次谐波分量忽略,即近似认为:

$$y(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

输出信号为与输入信号同频率的正弦信号,仿照线性部件频率特性的定义,可定义非线性特性的描述函数。

非线性特性的描述函数就是当输入是正弦信号 $X \sin \omega t$ 时,其稳态输出的一次谐波分量对输入正弦量的复数比,其数学表达式如下:

$$N(X) = \frac{Y_1}{X} \angle \phi_1 = \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t), \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$Y_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad \phi_1 = \arctg \frac{A_1}{B_1}$$

应当指出，在一般情况下，描述函数是一个与输入信号幅值 X 和频率 ω 有关的复数，故应表示为 $N(X, \omega)$ 。但是，实际大多数非线性环节中不包含储能元件，它们的输出与输入信号的频率无关，所以常见非线性环节的描述函数仅是输入信号幅值 X 的函数 $N(X)$ 。式(9-35)表明， $N(X)$ 为 X 的复函数。若非线性的特性是单值奇对称的，那么 $y(t)$ 是奇函数，则 $A_1=0$ ， $\psi_1=0$ ， $N(X)=B_1/X$ ，即描述函数 $N(X)$ 是输入信号幅值 X 的实函数。

典型非线性特性的描述函数

1: 死区特性的描述函数

图8-44为死区特性及其在正弦信号

$x(t) = X \sin \omega t$ 作用下的输出波形。输出 $y(t)$ 的数学表达式为:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t \leq \phi_1 \\ K(X \sin \omega t - \Delta), & \phi_1 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\phi_1 = \arcsin \frac{\Delta}{X}$$

式中 Δ 为死区范围, K 为线性部分的斜率。由于死区特性是单值奇对称的, 所以 $A_1=0$, $\psi_1=0$ 。 B_1 可按下式计算:

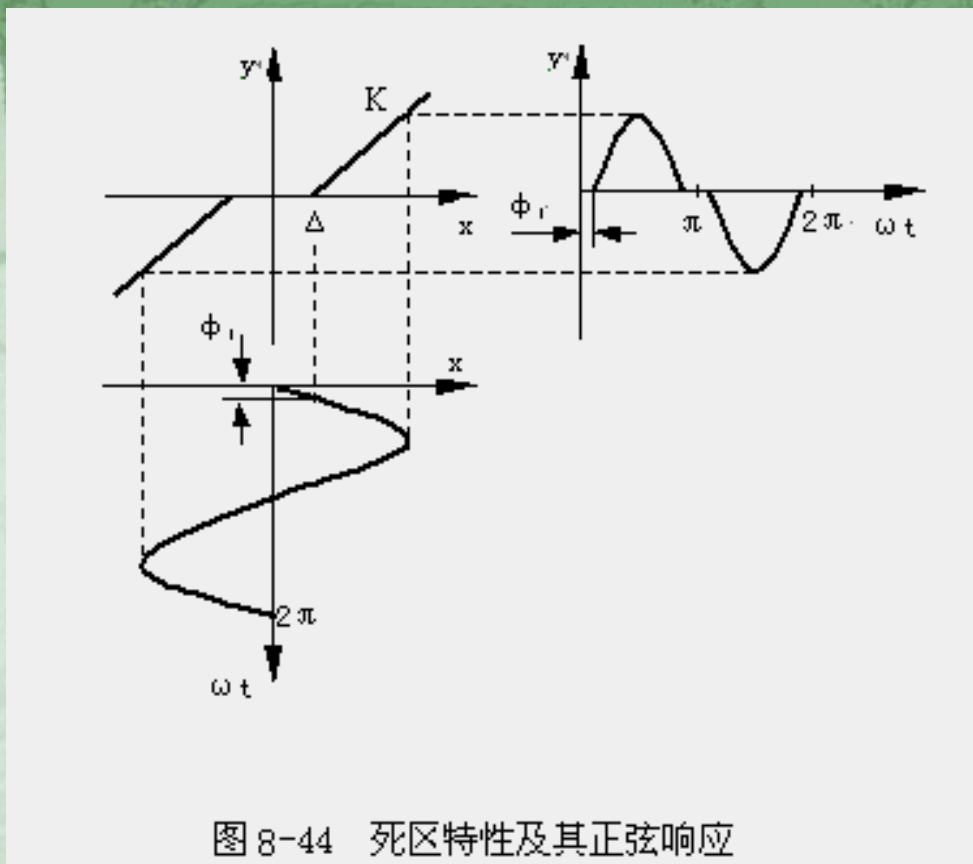


图 8-44 死区特性及其正弦响应

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} K(X \sin \omega t - \Delta) \sin \omega t d(\omega t) \\
&= \frac{4KX}{\pi} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \omega t d(\omega t) - \frac{4K\Delta}{\pi} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t d(\omega t) \\
&= \frac{4KX}{\pi} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right] \Big|_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4K\Delta}{\pi} \left[-\cos \omega t \right] \Big|_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4KX}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi_1 - \frac{\Delta}{X} \cos \phi_1 \right] = \frac{2KX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right]
\end{aligned}$$

于是可得死区特性的描述函数为：

$$N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X} \right)^2} \right], (X \geq \Delta)$$

死区特性的描述函数是输入信号幅值实函数，与输入正弦信号的频率无关。当 Δ/X 很小时， $N(X) \approx K$ ，即输入幅值很大或死区很小时，死区的影响可以忽略。

2: 饱和特性的描述函数

图8-45为饱和特性及其在正弦信号 $x(t) = X \sin \omega t$ 作用下的输出波形。输出 $y(t)$ 的数学表达式为:

$$y(t) = \begin{cases} KX \sin \omega t, & 0 \leq \omega t \leq \phi_1 \\ KS, & \phi_1 \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\phi_1 = \arcsin \frac{S}{X}$$

式中 S 为线性范围,
 K 为线性部分的斜率。由于饱和特性是单值奇对称的,所以 $A_1=0$, $\psi_1=0$ 。
 B_1 可按下式计算:

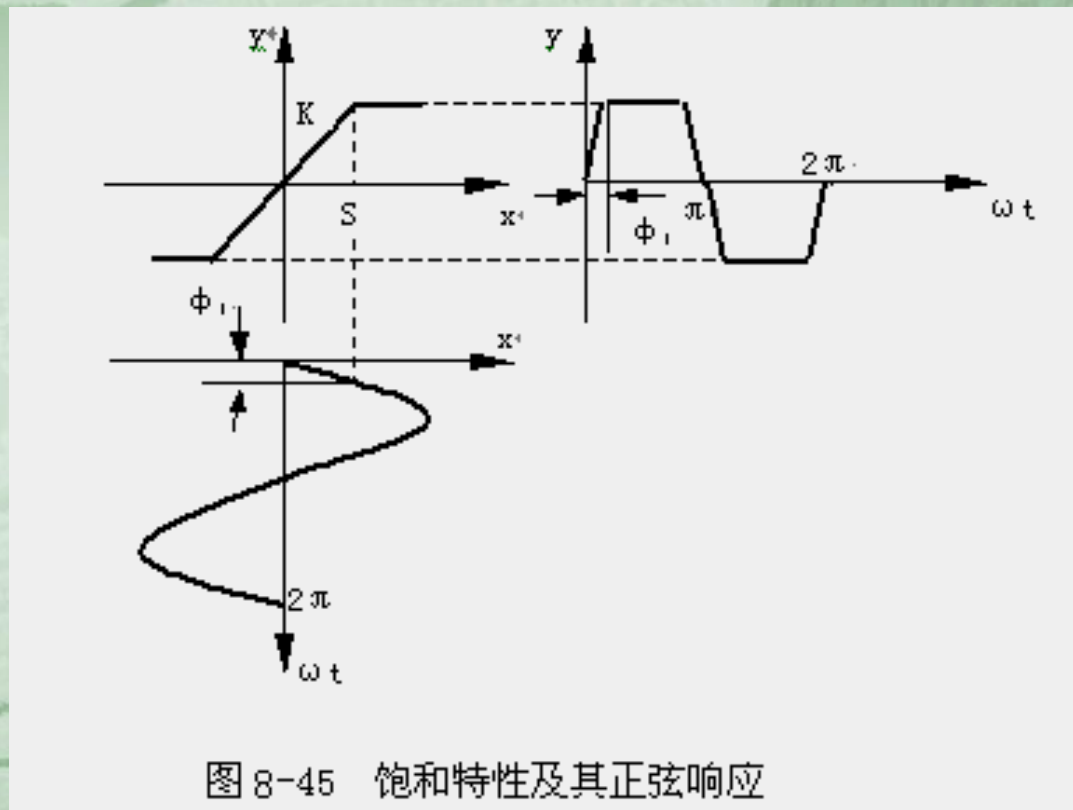


图 8-45 饱和特性及其正弦响应

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\phi_1} KX \sin^2 \omega t d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\phi_1}^{\frac{\pi}{2}} KS \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2KX}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X} \right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

于是可得饱和特性的描述函数为：

$$N(X) = \frac{B_1}{X} = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X} \right)^2} \right], (X \geq S)$$

由上式可见，饱和特性的描述函数是输入信号幅值的实函数，与输入频率无关。

3: 间隙特性的描述函数

图8-46为间隙特性及其在正弦信号

$x(t) = X \sin \omega t$ 作用下的输出波形。输出 $y(t)$ 的数学表达式为:

$$y(t) = \begin{cases} K(X \sin \omega t - b), & 0 \leq \omega t < \frac{\pi}{2} \\ K(X - b), & \frac{\pi}{2} \leq \omega t < \phi_1 \\ K(X \sin \omega t + b), & \phi_1 \leq \omega t < \pi \end{cases}$$

$$\phi_1 = \pi - \arcsin\left(1 - \frac{2b}{X}\right)$$

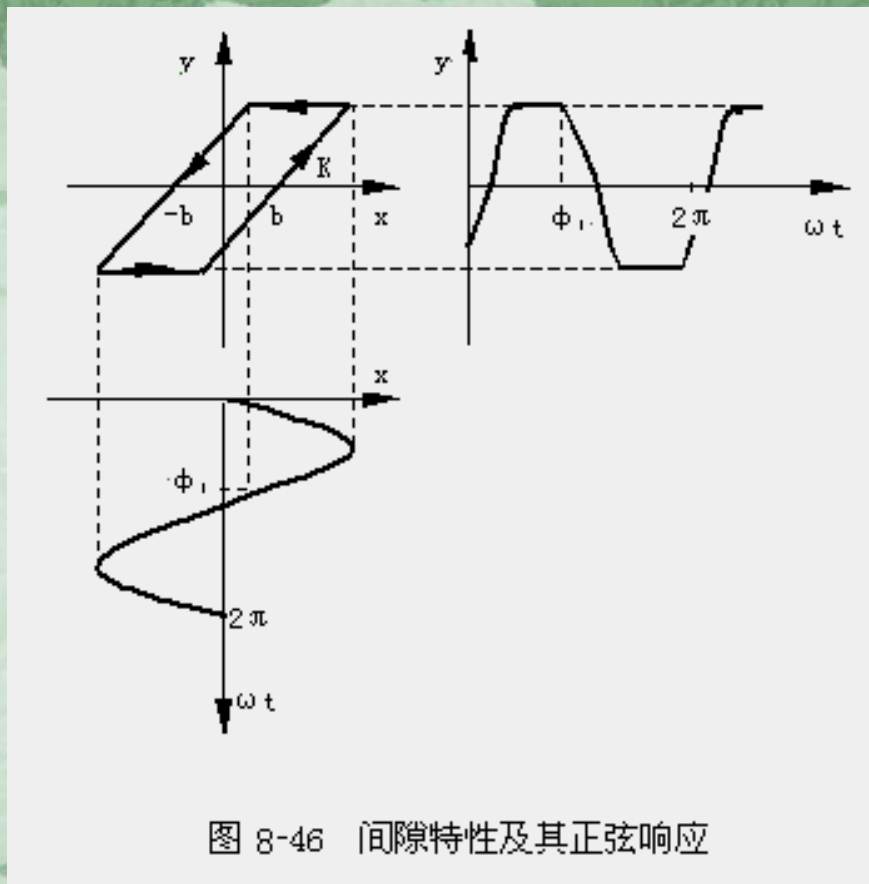


图 8-46 间隙特性及其正弦响应

由于间隙特性为多值函数，所以 A_1 、 B_1 都需要计算：

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} K(X \sin \omega t - b) \cos \omega t d(\omega t) + \int_{\pi/2}^{\phi_1} K(X - b) \cos \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\phi_1}^{\pi} K(X \sin \omega t + b) \cos \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{4Kb}{\pi} \left(\frac{b}{X} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} K(X \sin \omega t - b) \sin \omega t d(\omega t) + \int_{\pi/2}^{\phi_1} K(X - b) \sin \omega t d(\omega t) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\phi_1}^{\pi} K(X \sin \omega t + b) \sin \omega t d(\omega t) \right] \\ &= \frac{KX}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{X} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{X} \right) \sqrt{\frac{b}{X} \left(1 - \frac{b}{X} \right)} \right] \end{aligned}$$

于是可得间隙特性的描述函数为：

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X} \\ &= \frac{K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{X} \right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{X} \right) \sqrt{\frac{b}{X} \left(1 - \frac{b}{X} \right)} \right] \\ &\quad + j \frac{4Kb}{\pi X} \left(\frac{b}{X} - 1 \right), (X \geq b) \end{aligned}$$

由上式可见，间隙特性的描述函数是输入信号幅值的复函数，与输入频率无关。

4: 继电特性的描述函数

图8-47为继电特性及其在正弦信号 $x(t) = X \sin \omega t$ 作用下的输出波形。输出 $y(t)$ 的数学表达式为:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega t < \phi_1 \\ M, & \phi_1 \leq \omega t < \phi_2 \\ 0, & \phi_2 \leq \omega t < \pi \end{cases}$$

$$\phi_1 = \arcsin \frac{h}{X}, \phi_2 = \pi - \arcsin \frac{mh}{X}$$

由于继电特性为多值函数，所以 A_1 、 B_1 都需要计算:

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} M \cos \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2Mh}{\pi X} (m-1)$$

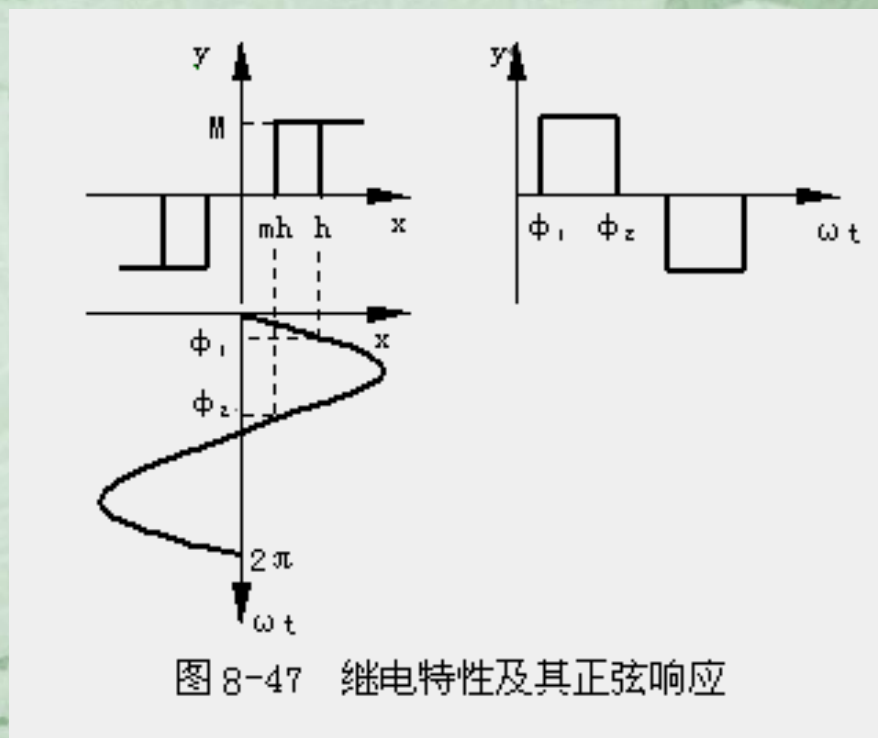


图 8-47 继电特性及其正弦响应

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} M \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{2M}{\pi} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{X}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

于是可得继电特性的描述函数为：

$$\begin{aligned}
 N(X) &= \frac{B_1}{X} + j \frac{A_1}{X} \\
 &= \frac{2M}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{X}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \right] + j \frac{2Mh}{\pi X^2} (m-1), (X \geq h)
 \end{aligned}$$

由上式可见，继电特性的描述函数是输入信号幅值的复函数，与输入频率无关。

令 $h=0$ ，就可得到两位置理想继电特性的描述函数：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X}$$

令 $m=1$,就可得到三位置理想继电特性的描述函数:

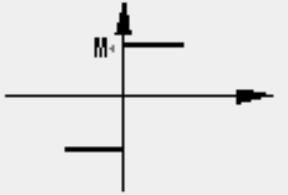
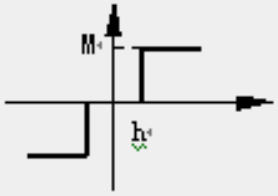
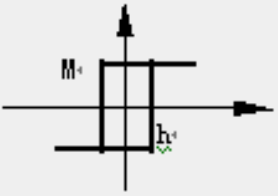
$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}, (X \geq h)$$

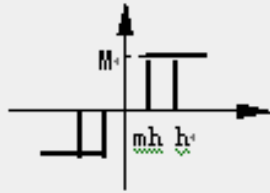
令 $m=-1$,就可得到具有滞环的两位置继电特性的描述函数:

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi X^2}, (X \geq h)$$

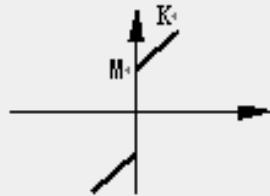
表8-1列出了一些常见非线性特性的描述函数,以供查用。

表 8-1 非线性特性及其描述函数

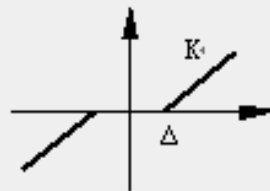
非线性特性	描述函数
	$\frac{4M}{\pi X}$
	$\frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}, X \geq h$
	$\frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} - j \frac{4Mh}{\pi X^2}, X \geq h$



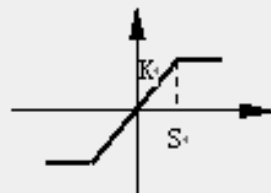
$$\frac{2M}{\pi X} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{mh}{X}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \right] + j \frac{2Mh}{\pi X^2} (m-1), X \geq h$$



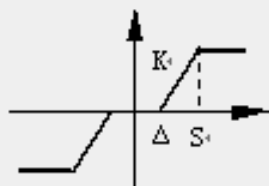
$$K + \frac{4M}{\pi X}$$



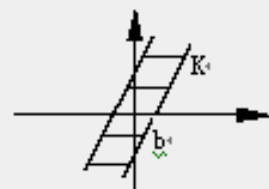
$$\frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right], X \geq \Delta$$



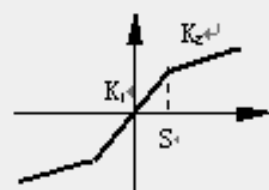
$$\frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \right], X \geq S$$



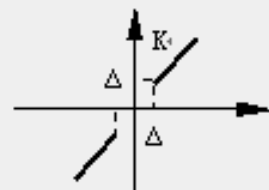
$$\frac{2K}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right], X \geq \Delta$$



$$\frac{K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2b}{X}\right) + 2 \left(1 - \frac{2b}{X}\right) \sqrt{\frac{b}{X} \left(1 - \frac{b}{X}\right)} \right] + j \frac{4Kb}{\pi X} \left(\frac{b}{X} - 1\right), (X \geq b)$$



$$K_2 + \frac{2(K_1 - K_2)}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{X} + \frac{S}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{X}\right)^2} \right], X \geq S$$



$$\frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{X} - \frac{\Delta}{X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2} \right] + \frac{4\Delta}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}, X \geq \Delta$$

5: 组合非线性特性的描述函数

当非线性系统中含有两个以上非线性环节时，一般不能简单地按照线性环节的串并联方法求总的描述函数，而应按照以下方法进行计算。

(1): 非线性特性的并联计算

设系统中有两个非线性环节并联，其描述函数分别为 $N_1(X)$ 和 $N_2(X)$ ，如图8-48所示。显然非线性环节并联后总输出为两个非线性环节的输出之和，即：

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

若将 $y(t)$ 展开成傅里叶级数，则 $y(t)$ 的一次谐波分量应为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 的一次谐波分量之和，按照描述函数的定义，总的描述函数应为： $N(X) = N_1(X) + N_2(X)$

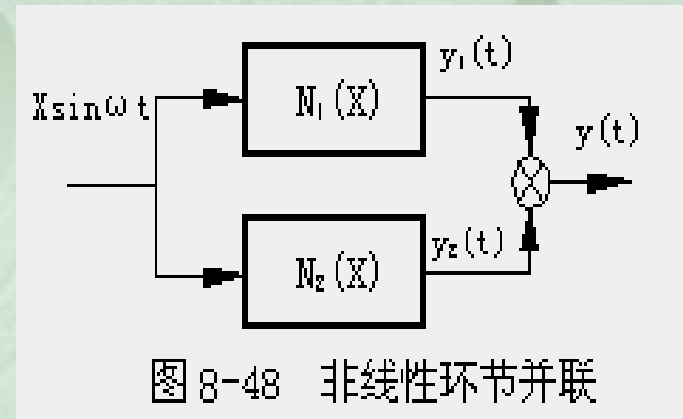


图 8-48 非线性环节并联

(2): 非线性特性的串联计算 当两个非线性环节串联时, 其总的描述函数不等于两个非线性环节描述函数的乘积, 而是需要通过折算, 先求出这两个非线性环节的等效非线性特性, 然后根据等效的非线性特性求总的描述函数。一般说来, 两个非线性环节串联的前后次序不同, 其等效的非线性特性不同, 总的描述函数也不一样, 这是与线性环节串联的区别。

8-5 用描述函数分析非线性系统

系统的典型结构及基本条件

设非线性系统经过等效变换，可表示为线性部分G与非线性部分N相串联的典型结构，如图8-49所示。

对非线性系统进行分析，首先考虑和关心的是稳定性和自持振荡。而描述函数法对系统的稳定性、产生自持振荡的条件、自持振荡振幅和频率的确定以及抑制自持振荡等问题，都能够给出比较符合实际的解答。

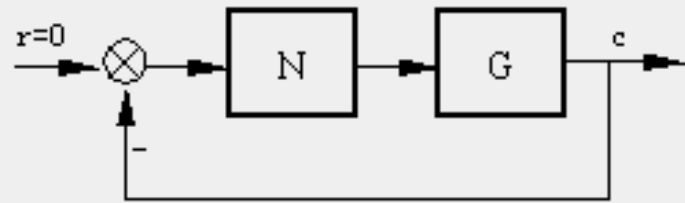


图 8-49 非线性系统的典型结构

描述函数法是基于这样的假设，即系统处于自持振荡状态时，非线性部分和线性部分的输入、输出均为同频率的正弦量。在这种条件下，非线性部分的特性可用描述函数表示，线性部分的特性可用频率特性表示，从而建立起非线性系统自持振荡时的理论模型，这是描述函数法分析系统的稳定性和自持振荡的必要的前提。

关于正弦量假设的合理性，说明如下。自持振荡是由非线性系统的内部自发的持续振荡，和加于系统的输入、干扰等外作用无关(分析时,可设 $r=0, n=0$)。假设自持振荡时非线性部分的输入端为正弦信号，则其输出除一次谐波分量外，还有高次谐波分量。但是，一般高次谐波的幅值比一次谐波分量的幅值要小，且在经过线性部分之后，由于线性部分的低通滤波效应，将使高次谐波分量进一步被衰减，致使线性部分的输出完全可认为只是一次谐波分量的响应。因此，系统自持振荡时各部分的输入、输出只是一次谐波分量的正弦量在起作用。实际系统的自持振荡表现也证明了这一点。

综上所述，描述函数法对系统的基本假设是：

- 1: 非线性系统可归纳为图8-49所示的典型结构。
- 2: 非线性环节在正弦信号作用下的输出中，高次谐波幅值小于一次谐波幅值，且非线性环节的输入输出特性是奇对称的，以保证非线性环节的输出中不包含直流分量。
- 3: 系统的线性部分具有较好的低通滤波性能。

非线性系统的稳定性分析

对于图8-49所示的非线性系统，假设非线性部分和线性部分满足描述函数法对系统的要求，则非线性部分的特性可用描述函数表示，线性部分的特性可用频率特性表示，于是非线性系统可看作一个等效的线性系统，闭环系统的频率特性为：

$$\Phi(j\omega) = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{N(X)G(j\omega)}{1 + N(X)G(j\omega)} \quad \text{或} \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

闭环系统的特征方程 $1 + N(X)G(j\omega) = 0$

在图8-49中，若假设非线性环节的输入信号为正弦信号 $X \sin \omega t$ ，其幅值 X 和频率 ω 满足上式，由于

$$N(X)G(j\omega) = -1$$

在系统的输出端出现的正弦信号为 $-X\sin\omega t$ ，系统中出现了等幅振荡，系统产生等幅振荡的条件：

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(X)}$$

$-\frac{1}{N(X)}$ 叫做非线性特性的负倒描述函数。

与线性系统中利用开环频率特性判断闭环系统稳定性的乃奎斯特判据相比较，非线性系统中的负倒描述函数相当于线性系统中的 -1 。在复平面上，非线性系统中的负倒描述函数曲线相当于线性系统中的 $(-1, j0)$ 点。据此，可以把线性系统中的乃氏判据推广到非线性系统中去。

若 $G(S)$ 的极点均在左半 S 平面，则推广的乃氏判据可叙述如下：

若 $G(j\omega)$ 曲线不包围
曲线， $-\frac{1}{N(X)}$ 如图
8-50(a)所示，则非线性
系统是稳定的；

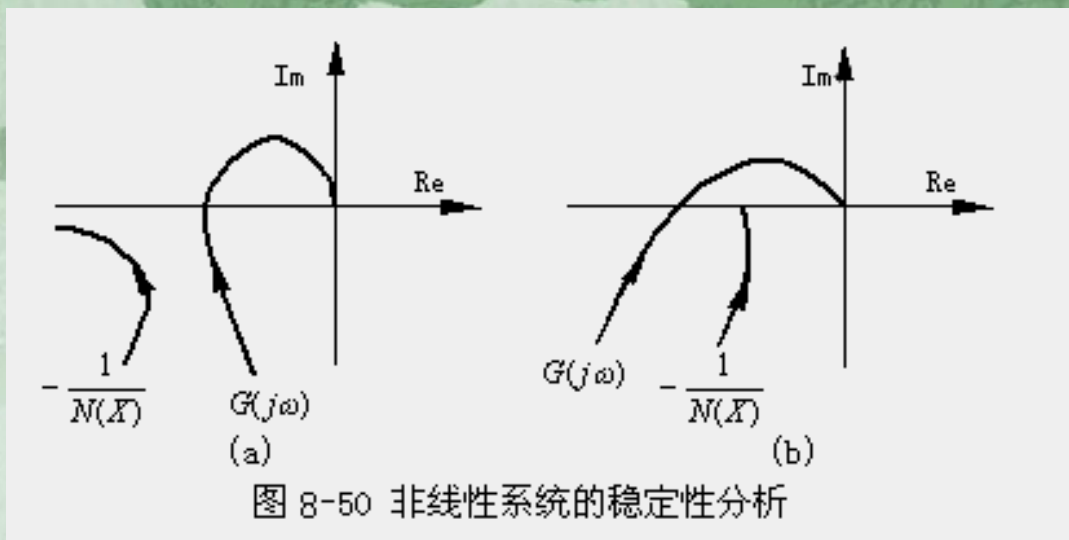


图 8-50 非线性系统的稳定性分析

若 $G(j\omega)$ 曲线包围了 $-\frac{1}{N(X)}$

曲线，如图8-50(b)所示，则非线性系统是不稳定的。

非线性系统的自持振荡分析

在非线性系统中，若 $G(j\omega)$ 曲线与非线性环节的负倒描述函数 $-\frac{1}{N(X)}$ 曲线相交，如图8-51所示，则交点处相当于线性系统中 $G(j\omega)$ 曲线通过 $(-1, j0)$ 点的情况，说明非线性系统中出现了等幅振荡。

在图8-51中， $G(j\omega)$ 曲线与 $-\frac{1}{N(X)}$

曲线有 M_1 和 M_2 两个交点。交点处

的幅值可由 $-\frac{1}{N(X)}$ 确定，而交点

处的频率则由 $G(j\omega)$ 确定。图

8-51表明，系统中可能有两种周

期运动发生。

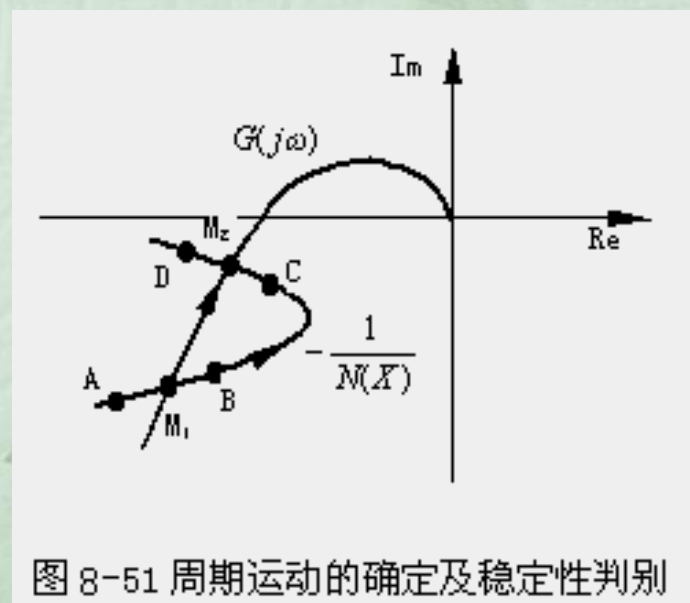


图 8-51 周期运动的确定及稳定性判别

系统中的自持振荡对应于稳定的周期运动。图8-51中只是确定了系统中可能的周期运动和它的参数，要判断系统中是否存在自持振荡还必须研究周期运动的稳定性。

首先讨论交点 M_1 处的情况，假定系统最初工作在 M_1 点，即发生了 $X_1 \sin \omega_1 t$ 的周期运动，如果给这个运动一个轻微的扰动，使非线性环节的输入幅度稍有增大，相当于工作点移到了B点，这时B点相当于线性系统中的 $(-1, j0)$ 点，而 $G(j\omega)$ 曲线包围了这一点，因此振幅将加大，而且离 X_1 越来越远。相反，如果加的扰动使非线性环节的输入幅度减小，这时相当于工作点移到了A点，由于 $G(j\omega)$ 曲线不包围A点，非线性环节的输入振幅将会进一步减小，而且离 X_1 越来越远。有以上分析可知， M_1 点对应的周期运动是不稳定的。 M_1 点对应的周期运动相当于相平面法中的不稳定的极限环，它在系统分析中的意义是给出了非线性系统分析中划分初始扰动的一个界限，当初始扰动小于 X_1 时，系统呈现出的运动是向平衡状态收敛；当初始扰动大于 X_1 时，系统呈现的是最终趋向于下面所说的振幅为 X_2 的自持振荡状态。

其次研究交点 M_2 处的情况，假定系统最初工作在 M_2 点，即发生了 $X_2 \sin \omega_2 t$ 的周期运动，如果给这个运动一个轻微的扰动，使非线性环节的输入幅度稍有增大，相当于工作点移到了D点，由于 $G(j\omega)$ 曲线不包围D点，系统的运动是收敛的，非线性环节的输入振幅将会减小；如果加的扰动使非线性环节的输入幅度减小，这时相当于工作点移到了C点，由于 $G(j\omega)$ 曲线包围了C点，系统的运动是发散的，可以使振幅增加。这就意味着 M_2 点所对应的振荡对扰动保持了稳定性。 M_2 点对应的周期运动相当于相平面法中的稳定的极限环，所以 M_2 点对应的是一个自持振荡。

例9-3:

非线性控制系统如图8-52所示，已知 $M=1.7$ ， $h=0.7$ ，试判断系统是否存在自持振荡，若有自持振荡，求出自持振荡的振幅和频率。

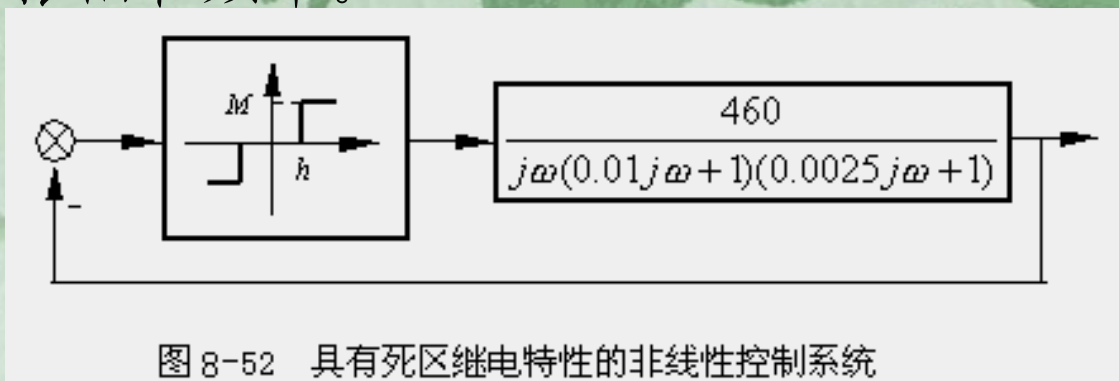


图 8-52 具有死区继电特性的非线性控制系统

解 死区继电特性的描述函数为：

$$N(X) = \frac{4M}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}$$

由于 $N(X)$ 中包含两个参数 M 和 h ，为使作图简单起见，常将 $N(X)$ 表示成相对描述函数的形式，即：

$$\begin{aligned} N(X) &= \frac{M}{h} \frac{4h}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \\ &= K_0 N_0(X) \end{aligned}$$

$$N_0(X) = \frac{4h}{\pi X} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2} \quad \text{称为相对描述函数}$$

$$K_0 = \frac{M}{h} \quad \text{称为非线性环节的尺度系数,}$$

非线性系统的闭环特征方程式 $1 + N(X)G(j\omega) = 0$ 可以改写为:

$$K_0 G(j\omega) = -\frac{1}{N_0(X)}$$

$-\frac{1}{N_0(X)}$ 称为负倒相对描述函数

对于本例
有:

$$-\frac{1}{N_0(X)} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{X}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{X}\right)^2}} \quad K_0 = \frac{M}{h} = \frac{1.7}{0.7} = 2.43$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\left(\frac{X}{h}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{X}{h}\right)^2 - 1}}, \quad X \geq h$$

下一步应在复平面上分别绘制 $K_0G(j\omega)$ 曲线和 $-\frac{1}{N_0(X)}$ 曲线。

给
下

ω (1/秒)	120	150	180	200	250	300	400
$ G(j\omega) $	2.35	1.59	1.13	0.92	0.58	0.39	0.20
$K_0 G(j\omega) $	5.7	3.9	2.75	2.23	1.40	0.94	0.48
$\angle G(j\omega)$	-155°	-165.5°	-173.7°	-180°	-189°	-196°	-209°

h/X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	-0.707	0.8	0.9	0.95	1
$-1/N_0(X)$	-7.89	-4.18	-2.74	-2.14	-1.81	-1.64	-1.57	-1.64	-2	-2.65	$-\infty$

依据以上数据作出曲线如图8-53所示。图中负倒相对描述函数曲线上的箭头方向表示了变量 h/X 的增加方向，即 X 的减小方向。

由图可知这两条曲线共有两个交点。从 $K_0G(j\omega)$ 曲线上找到交点处 $\omega=200$ 。从 $-1/N_0(X)$ 曲线上找到交点处 h/X 的值分别为0.92及0.38，振幅 X 则为0.757及1.84。这说明系统中存在着两个振幅不同的周期运动，但振荡频率相同。

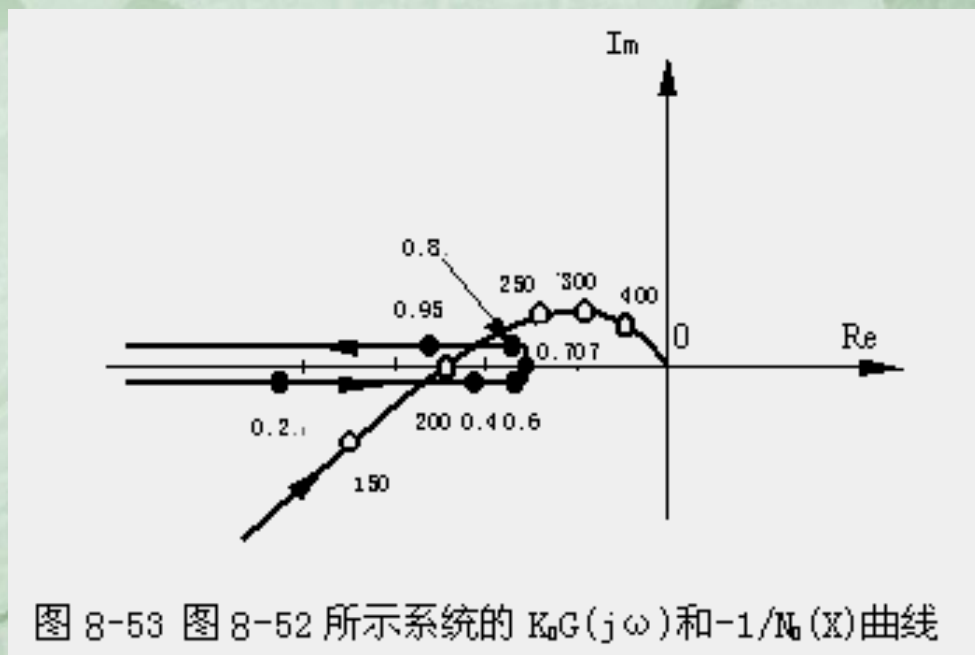


图 8-53 图 8-52 所示系统的 $K_0G(j\omega)$ 和 $-1/N_0(X)$ 曲线

由稳定性分析可知， $0.757\sin 200t$ 是不稳定的周期运动；而 $1.84\sin 200t$ 是稳定的周期运动。所以系统中存在一个自持振荡，它的振幅为1.84，频率为200。当系统的扰动较小时，系统不呈现自持振荡状态，而呈现趋于平衡状态(不灵敏区)的动态过程，或者说系统的平衡状态在小扰动时稳定的。由不稳定的周期运动的振幅0.757可知，如果只有幅值扰动，而扰动小于0.757时系统中的运动都趋向于平衡状态。当幅值扰动大于0.757时，系统最终表现出来的是自持振荡状态。

非线性系统结构图的简化

以上讨论的非线性系统，在其结构上均属于一个非线性部分和一个线性部分串联。然而实际系统作出的原始结构图，并非完全符合上述形式。为了应用描述函数法分析系统的自持振荡及稳定性，需要将各种结构形式归化为典型结构。

在讨论自持振荡及稳定性时，只研究由系统内部造成的周期运动，并不考虑外作用。因此，在将系统结构图进行归化变换时，可以认为所有外作用均为零，只考虑系统的闭环回路。

在结构归化时，若系统中出现两个非线性环节并联或串联结构，可以将两个非线性环节合并为一个等效环节进行处理。具体地说，两个非线性环节相并联，合并后的等效环节的描述函数为两个非线性环节的描述函数之和；两个非线性环节相串联，应先求出它们的等效非线性特性，再求其等效描述函数。

若非线性系统含有一个非线性环节和多个线性环节，此时可以按结构图等效变换法则对线性环节进行合并，将系统归化为典型结构形式。

图8-54给出了一个非线性系统，其中非线性环节被线性局部反馈所包围。对这种结构，可视 G_1 、 G_2 为并联结构，按结构图等效变换法将其合并为一个线性部分，则系统就归化为典型结构形式。

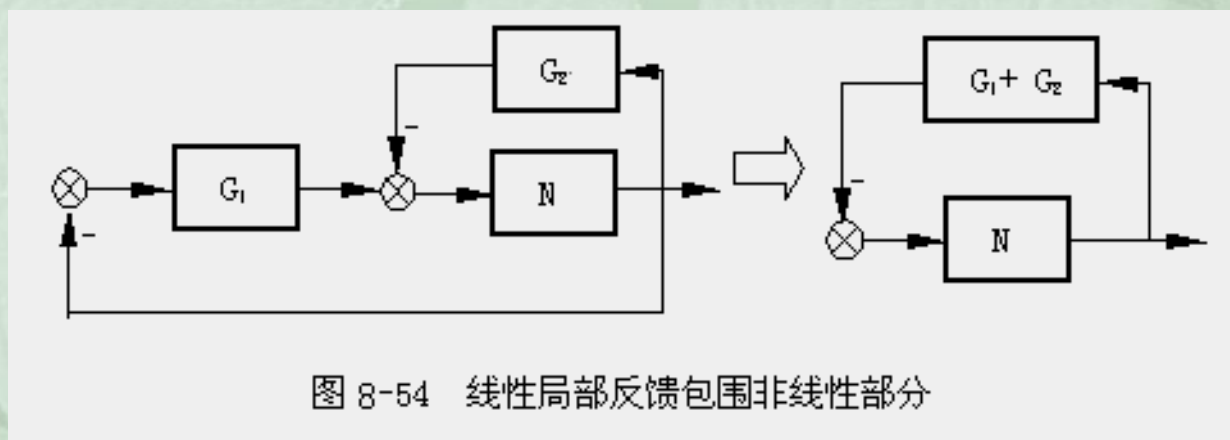


图 8-54 线性局部反馈包围非线性部分

若非线性环节处于局部反馈通道中，也可通过适当变换，将系统归化为一个线性部分和一个非线性部分的串联，如图8-55所示。

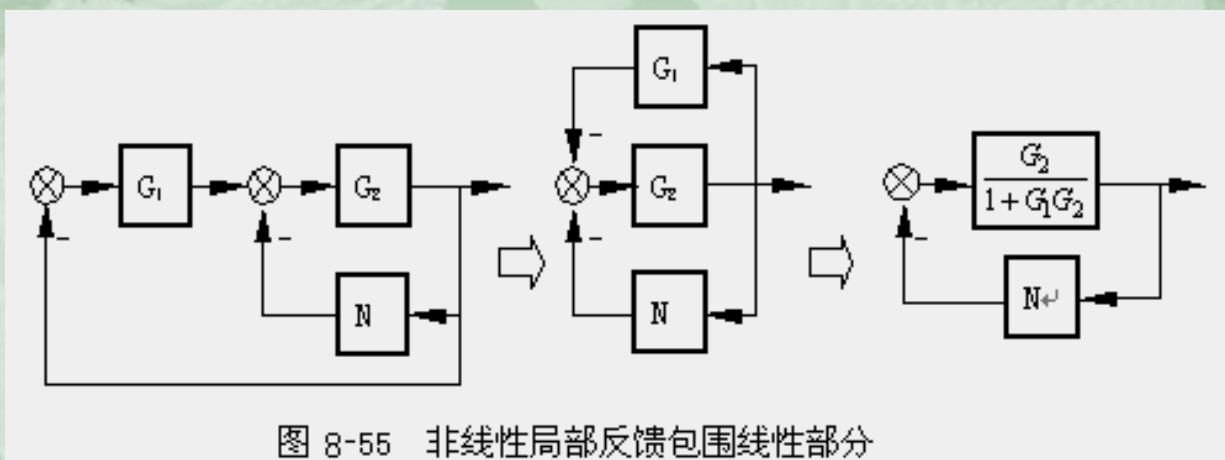


图 8-55 非线性局部反馈包围线性部分

小 结

严格地说，理想的线性系统在实际中并不存在。当实际系统中的非线性程度较小时，可以采用线性化的方法进行研究，此时采用线性系统理论进行分析和设计所得到的结论符合实际情况；当实际系统中的非线性程度比较严重时，采用线性方法进行研究得到的结论与实际系统的真实情况偏差较大，有时甚至会得出错误的结论，故有必要对非线性系统作专门的研究。本章讨论了非线性系统的研究方法，主要内容有：

- 1: 非线性系统的数学模型一般是非线性微分方程，它与线性系统的本质差别在于不能应用叠加原理。因此，非线性系统的动态响应有许多奇异现象，其中工程中最关心的是自持振荡。

2: 借助于线性系统的某些概念, 本章讨论了一些简单非线性系统运动过程的特点, 所得出的一些概念和结论对于从事实际系统的调试工作是具有参考价值的。

3: 非线性系统是各种各样的, 为了深入了解非线性系统的特性, 本章对几种有代表性的非线性系统进行了较为详细的分析。

4: 本章讨论了非线性系统的分析方法, 主要有相平面分析法和描述函数法。

5: 相平面法能精确地分析系统, 其要点是在相平面上作出状态变量随时间变化的相轨迹, 进而分析系统的性能, 但系统的阶次限于二阶或低于二阶。

6: 描述函数法实际上是对非线性特性进行谐波线性化, 其要点是用一次基波分量代替非线性环节输出的总体, 因而要求非线性环节输出中的高次谐波分量较小且系统线性部分具有低通滤波性能, 描述函数法是一种近似的分析方法, 在解决工程实际问题时应用广泛。

7: 利用非线性特性改善系统的动态性能, 往往可以取得较线性系统更为理想的效果, 实现起来也并不复杂, 本章通过几个例子介绍了这方面的情况。

8: 非线性问题的研究是控制理论的重要分支。由于求解非线性微分方程尚无统一的方法, 这就使得对非线性控制系统的研究缺乏统一而普遍的理论, 也使得对非线性控制系统的研究成为控制理论中最为活跃的分支之一。