

第七章 采样系统理论

7-1. 引言

近二十年来，随着微电子及数字信号技术的发展，特别是数字计算机广泛地应用于控制系统中，出现了离散化的控制器。一般地，采用数字计算机作为系统的控制器，对连续的控制对象进行控制的系统是最常见的采样系统。与连续系统不同的是：采样系统中至少有一个或几个变量是离散信号。

什么是离散信号呢？对一个连续变化的物理量，按一定的规律（通常是每隔一个时间间隔 T ），通过采样开关（可以是机电的或电子的装置，也可以是数字计算机定时执行读取命令）读取该物理量在某些瞬间的量值。这一系列量值就是该物理量的离散信号。如图7-1所示。

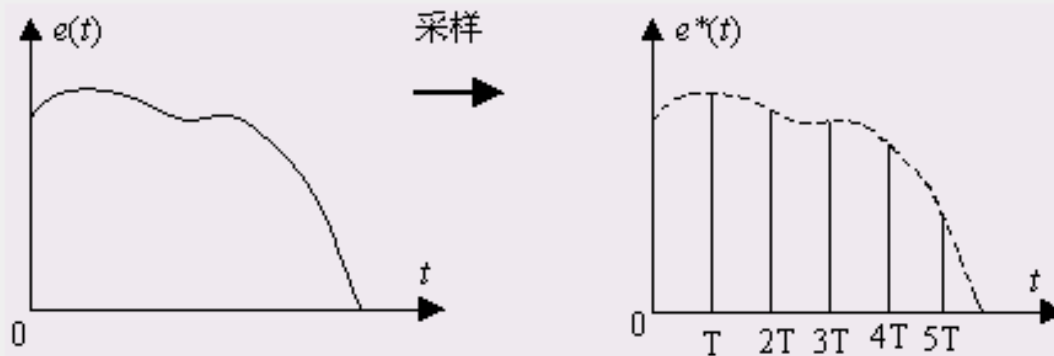


图 7-1 采样

为什么要对连续信号进行采样，使它变成离散信号呢？这完全是由于数字计算机的工作原理决定的。大家知道，目前数字计算机基本上是串行工作的，也就是它随着内部时钟的节拍，一条一条地执行着程序中的各种命令。如果它一刻不停地读取某一物理量，那么其它的事它什么也不能做了，而且这样做也是没有必要的。工程实践告诉我们：只要适当选取采样周期 T ，在采样时刻瞬时获取的一系列离散信号完全可以表示相应的连续信号所包含的绝大部分信息。完全可以满足对控制系统的性能指标要求。这样计算机就可以用采样时刻之间的大量时间去完成其它任务。

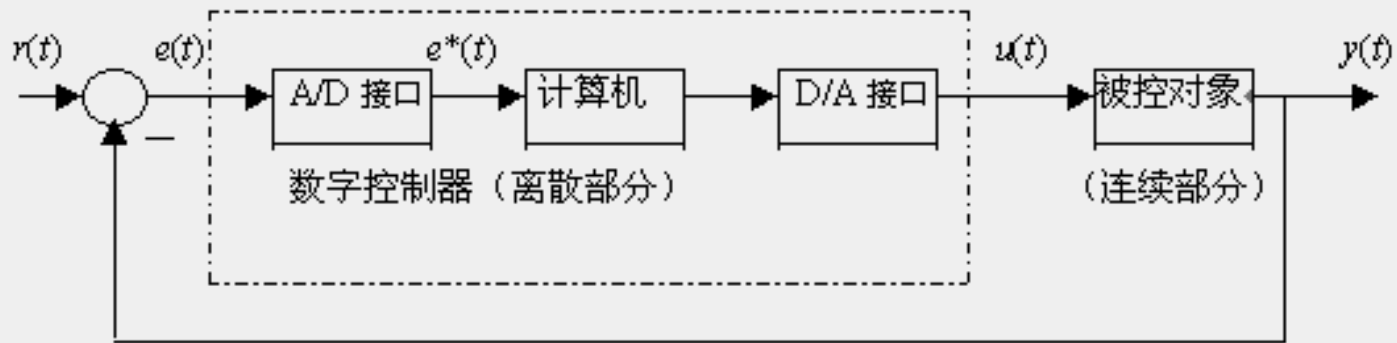
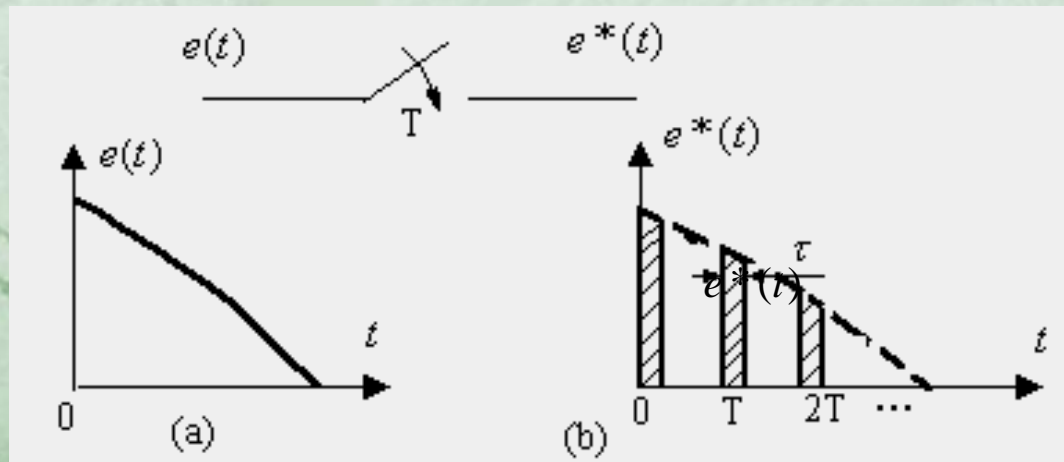


图 7-2，带有微型计算机的控制系统

本章我们将学习有关采样系统的基础理论。主要包括：采样定理、Z变换、采样系统的动态分析及稳定性分析。

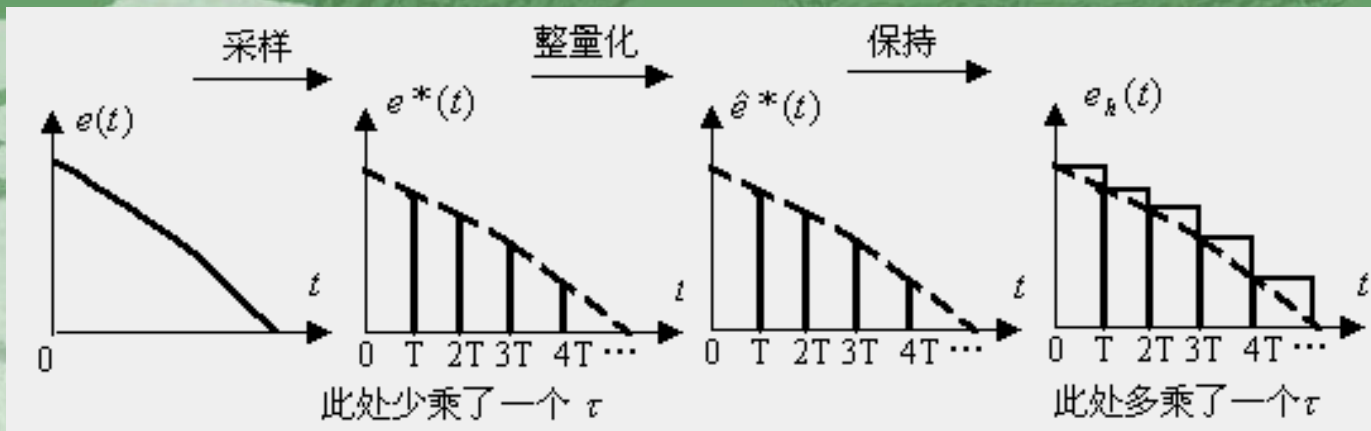
7-2. 采样及采样定理

我们已经知道，把连续信号转换成离散信号的过程叫做采样过程。实现采样的装置叫做采样开关。把连续信号加到采样开关的输入端，采样开关每 T 秒闭合一次，闭合持续时间为 τ ，于是在采样开关的输出端得到宽度为 τ 的脉冲序列（见图7-3 b）。由于采样持续时间与采样周期 T 相比很小（ $\tau \ll T$ ），在工程设计中通常忽略它的宽度。

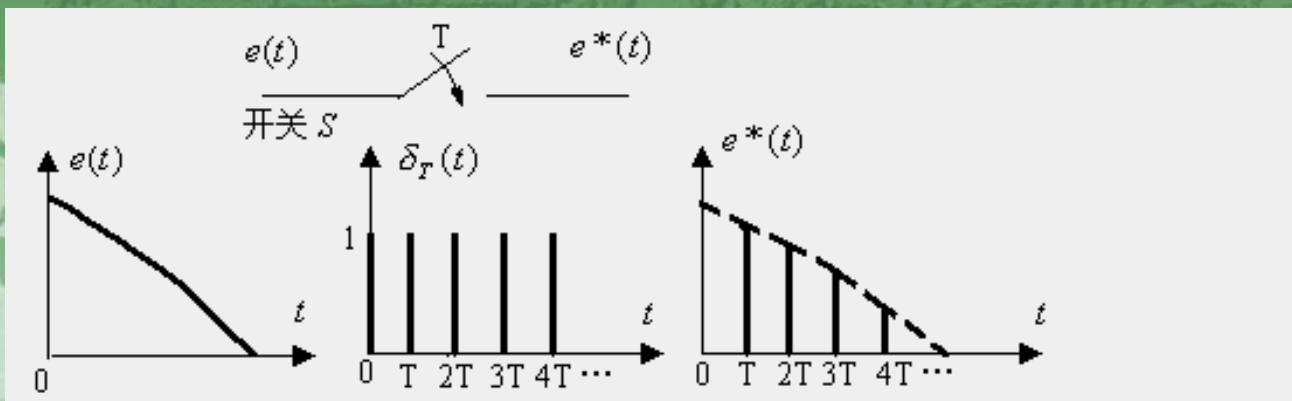


众所周知，在数字计算机内参与运算的信号是二进制编码的整量化的数字信号。因此，在量值上连续、时间上离散的误差信号 $e^*(t)$ 需要通过 A/D 转换器进行转换，通过量化处理把它变成时间上离散、量值上整量化的二进制数值 $\hat{e}^*(t)$ 。

在每一个采样周期 T 秒 ($t \in [kT, (k+1)T]$) 内，数字计算机总是把 $\hat{e}^*(kT)$ 的值当作 $e(t)$ 的值。实际上，这就相当于一个零阶保持器。关于零阶保持器我们后面还要详细讨论。因此，在计算机中是用 $\hat{e}^*(kT)$ 来近似表(缺) 的 (参见图7-4)。



采样过程是发生在采样控制系统中的实际情况，是工程实践中客观存在的问题。如何找出它的数学模型，用数学语言来描述它。这个问题摆在了控制理论界学者和工程师的面前，人们希望可以建立一种理论和方法来分析和设计这种系统。为了便于对采样系统进行理论分析，对于形状如同 $e^*(t)$ 这样的信号，人们很自然地想到用脉冲函数来描述它。我们把采样过程用一个周期性闭合的采样开关 S 来表示，如图7-5所示，其闭合的周期为 T ，持续时间 $\tau \ll T$ 并趋近于零。



$$\begin{aligned}
 e^*(t) &= e(0)[1(t) - 1(t - \tau)] + e(T)[1(t - T) - 1(t - T - \tau)] + \\
 &+ e(2T)[1(t - 2T) - 1(t - 2T - \tau)] + \cdots + e(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - \tau)] + \cdots \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} e(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - \tau)]
 \end{aligned}$$

因为 τ 很小,

$$1(t - kT) - 1(t - kT - \tau) = \tau \cdot \delta(t - kT)$$

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot \tau \cdot \delta(t - kT) = \tau \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

为了便于分析, 经过采样的信号表示为:

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

采样过程可以看成是一个幅值调制过程，其中 $\delta_T(t)$ 是调幅器的载波，它是以 T 为周期的单位理想脉冲序列，图7-5中脉冲高度为1。在数学上 $\delta_T(t)$ 应该是一连串宽度为 τ ，幅度为 $1/\tau$ ($\tau \rightarrow 0$) 的脉冲。

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$e^*(t) = e(t)\delta_T(t) = e(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

当载波 $\delta_T(t)$ 被输入连续信号 $e(t)$ 调幅后，其输出信号为 $e^*(t)$ 。这样的调制过程可以表示成：

通常在控制系统中，认为 $t < 0$ 时信号为零，即 $e(t) = 0$ (当 $t < 0$ 时)。因此，

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t - T) + e(2T)\delta(t - 2T) + \dots \\ + e(nT)\delta(t - kT) + \dots$$

$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$L[e^*(t)] = E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)e^{-kTs}$$

应当指出：上式把 $E^*(s)$ 与采样函数 $e(kT)$ 联系了起来，可以直接看出 $e^*(t)$ 的时间响应。但是要注意，对于那些 $e(t) = 0$ ($t < 0$)，而在 $t = 0$ 瞬间有跳跃的原函数 $e(t)$ ，也就是那些不满足 $\lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = 0$ 的 $e(t)$ ，当用上式求 $E^*(s)$ 时，由于 $e(0^-) \neq e(0^+)$ ，会导出不同的 $E^*(s)$ 。

例7-1 设 $e(t) = 1(t)$, 即 $e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

试求 $e^*(t)$ 的拉氏变

换。当采用 $e(0^+)$ 时, 因 $e(0^+) = 1$, $e(kT) \equiv 1 \quad (k > 0)$,

∴
$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots$$

它是一个公比为 e^{-Ts} 的无穷级数, 求和后得闭合形式:

$$E^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \quad |e^{-Ts} < 1|$$

如果采用 $e(0^-) = 0$, 则不难求出

$$E^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} - 1 = \frac{e^{-Ts}}{1 - e^{-Ts}} \quad |e^{-Ts} < 1|$$

从这个例子可以看出，那些在 $t=0$ 处不连续的函数 $e(t)$ ， $e(0^-) \neq e(0^+)$ ，当采用不同的初始采样值时，会导出不同的 $E^*(s)$ 。不过，很多实际给出的表格中，对于这一类所对应的 $E^*(s)$ ，一般都是采用 $e(0^+)$ 的初始值。

例7-2
$$e(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-at} & t \geq 0 \end{cases}$$

其中a为常数，试求 $e^*(t)$ 的拉氏变换。

解
$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \cdot e^{-kTs} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k(s+a)T}$$

$E^*(s)$ 的封闭形式为：

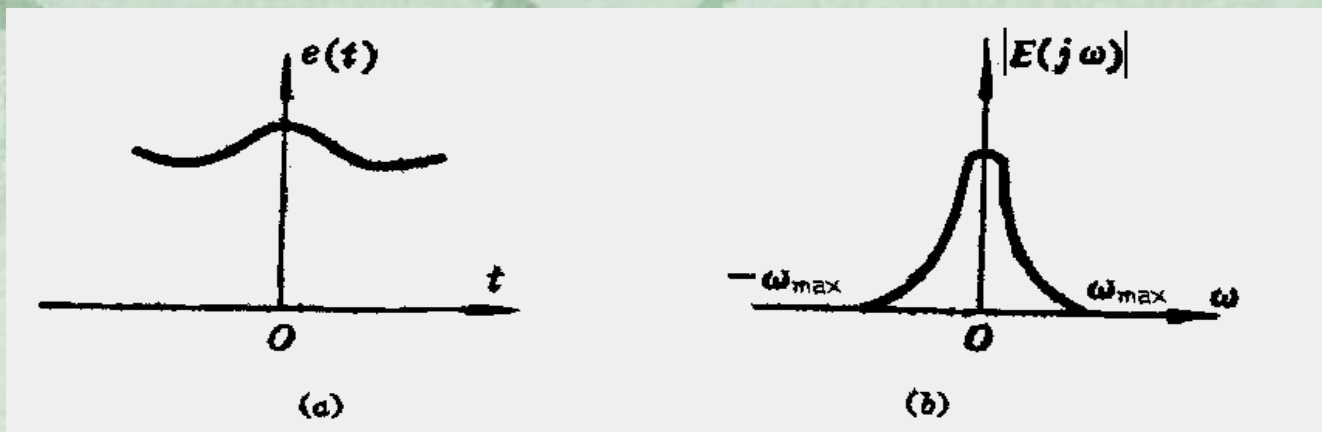
$$E^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-(s+a)T}} \quad \left| e^{-(\sigma+a)T} \right| < 1$$

式中 σ 为s的实部。

采样定理

连续信号 $e(t)$ 经过采样后，只能给出采样点上的数值，不能知道各采样时刻之间的数值。因此，从时域上看，采样过程损失了一部分 $e(t)$ 所含的信息。怎样才能使采样信号 $e^*(t)$ 大体上反映连续信号 $e(t)$ 的变化规律呢？定性地看，如果连续的周期信号 $e(t)$ 变化缓慢（即：它的频率域中，最大角频率 ω_{\max} 较低），而采样角频率 $\omega_s = 2\pi \cdot 1/T$ 比较高（即采样周期 T 比较小），则 $e^*(t)$ 就基本上能反映 $e(t)$ 的变化规律，经过保持器后，基本上能恢复原连续信号的形态。那么 ω_s 和 ω_{\max} 之间应保持怎样的关系，才能使采样信号基本上恢复原连续信号的形态呢？下面我们通过采样过程中信号频谱的变化来说明。

设连续信号 $e(t)$ 及其频谱 $E(j\omega)$ 如图7-6所示。信号 $e(t)$ 经过采样后变为 $e^*(t)$ ，从频域上看， $E^*(j\omega)$ 发生了什么样的变化呢？为此要研究采样信号 $e^*(t)$ 的频谱。



由于 $\delta_T(t)$ 本身是以 T 为周期的周期函数，因而可展成富氏级数：

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_s t}$$

其中 $\omega_s = \frac{2}{T}\pi$ ，为采样角频率。 c_k 为系数，且有：

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \cdot e^{-jk\omega_s t} dt$$

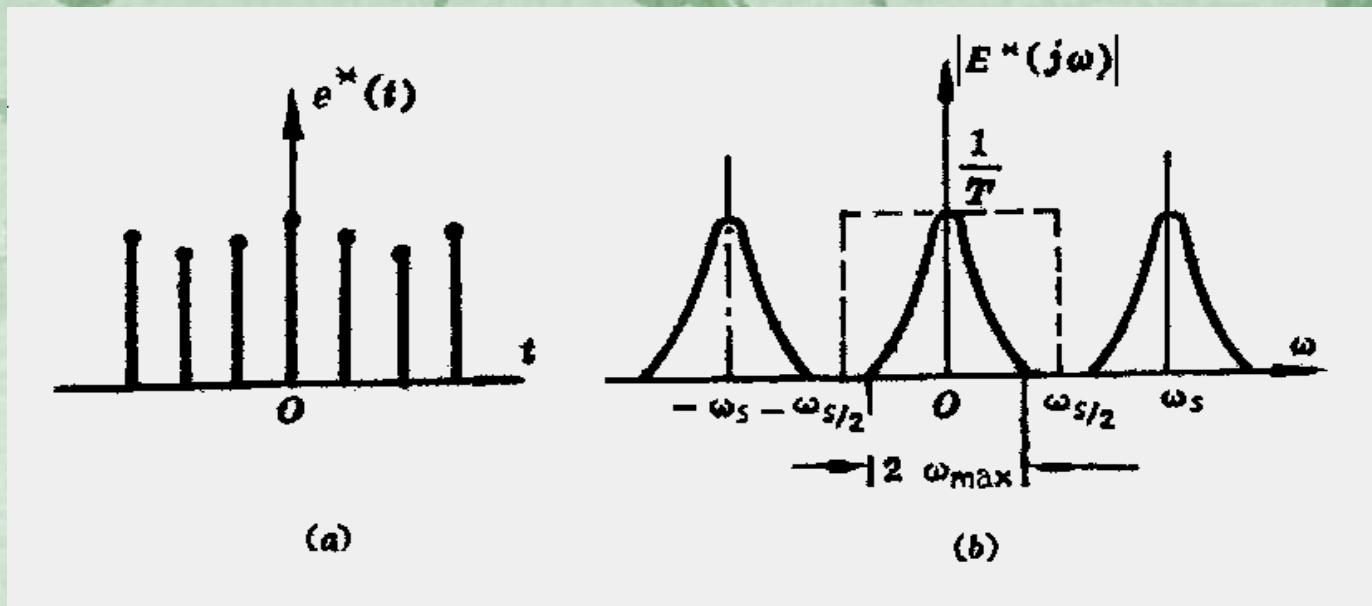
因为在 $-T/2$ 到 $+T/2$ 之间， $\delta_T(t)$ 仅在 $t=0$ 处值不为零，故

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{T}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_s t} \quad e^*(t) = -\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(t) e^{jk\omega_s t}$$

作富氏变换，并考虑到频移定理，有

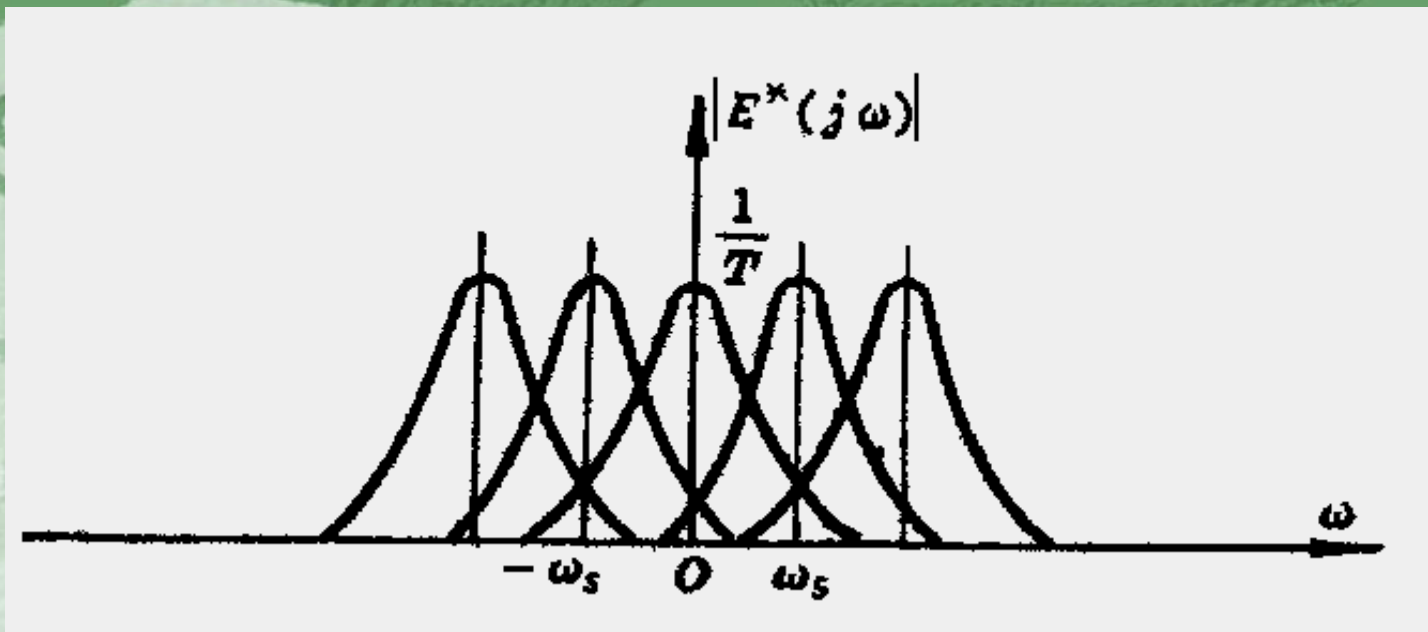
$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E[j(\omega + k\omega_s)]$$



对于周期性连续信号 $e(t)$ 而言，其频谱 $E(j\omega)$ 为一带宽有限的连续频谱，如图 7-6 (b) 所示。而采样信号 $e^*(t)$ 的频谱 $E^*(j\omega)$ 则具有以采样角频率 ω_s 为周期的无穷多个频谱分量，如图 7-7 (b) 所示。

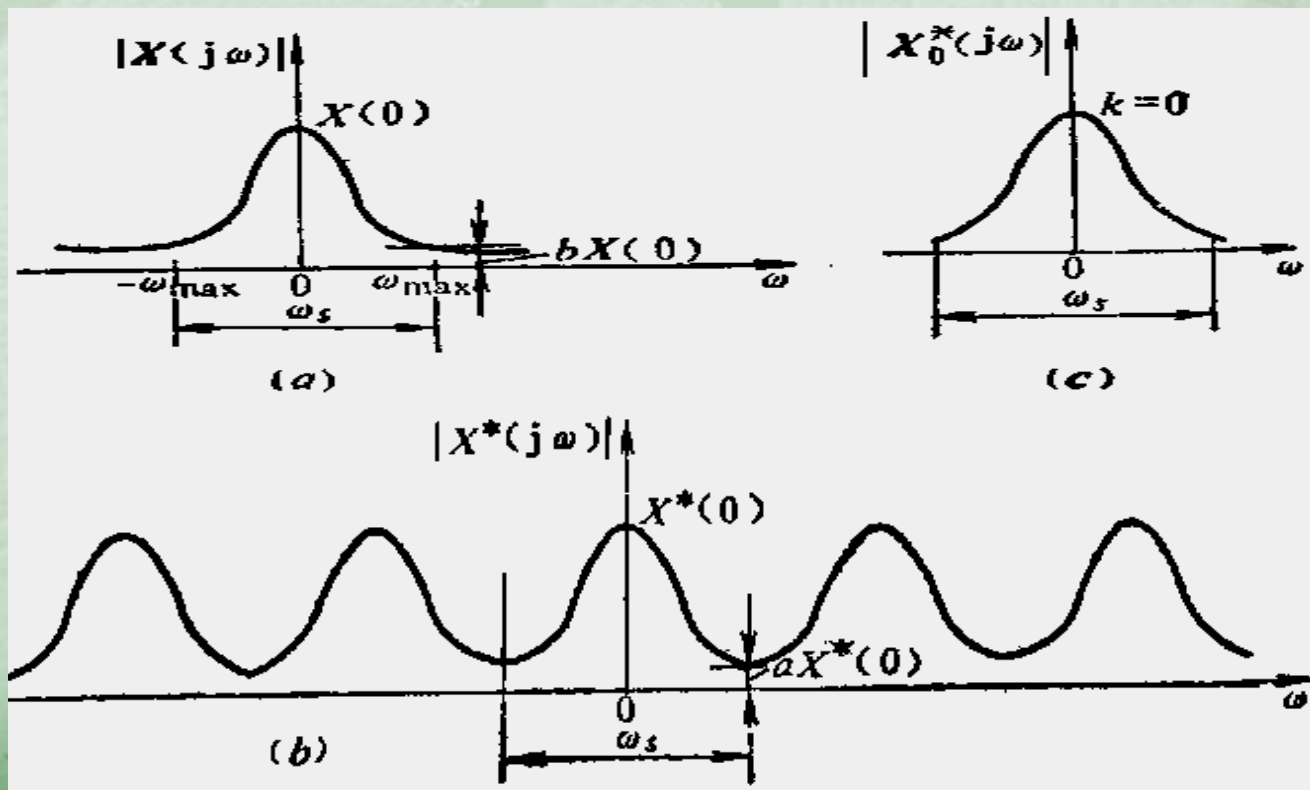
上式中，当 $k=0$ 时， $E^*(j\omega) = \frac{1}{T} E(j\omega)$ ，称为 $E^*(j\omega)$ 的主分量，其余 $k \neq 0$ 时的频谱分量，称为 $E^*(j\omega)$ 的补分量，它们是在采样过程中所产生的高频分量。

如果 $\omega_s > 2\omega_{\max}$ ，则 $E^*(s)$ 的各频谱分量彼此不发生重叠，连续信号的频谱 $E(j\omega)$ 仍能被保存，因此通过理想低通滤波器（图 7-7 (b) 中虚线所示），滤掉高频分量后，就能复现原连续信号 $e(t)$ 。反之，如果 $\omega_s < 2\omega_{\max}$ ，则 $E^*(s)$ 的各频谱分量彼此重叠在一起，如图 7-8 所示，其中已不能完全保留周期性连续信号的频谱 $E(s)$ ，这样就不能复现原来的连续信号。因此为了能从采样信号中大体上复现原周期性连续信号，采样频率必须满足 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$



这就是香农 (Shannon) 采样定理。式中 ω_{\max} 为连续信号所含最高频率分量的角频率， ω_s 为采样角频率。

对于实际的非周期性信号，其频谱中最高频率是无限的，如图7-9 (a) 那样。即使采样频率很高，采样后脉冲序列的频谱波形总是相互搭接的 (图7-9 (b))。但是当频率相当高时，它的模并不大。所以，若把高频部分长“尾巴”割掉，认为实际信号具有有限的最高频率值，则信息的损失不会很大，按照采样定理选择的采样频率也不至于太高。



香农采样定理的意义在于：它告诉我们，如果选择这样一个采样角频率对于周期性连续信号所含的最高频率分量来说，能做到在它的一个周期内采样两次以上，那么经采样所获得的脉冲序列中，就包含了连续信号的全部信息。如果一个周期内采样次数少于两次，就做不到无失真地再现原连续信号。而对于非周期性的连续信号而言，只要采样频率充分高，就可基本上恢复原连续信号而不至于损失太多信息。这就告诉我们：在设计计算机控制系统时，要综合考虑，兼顾连续信号的特点和计算机的速度，选择一个适当的采样频率。

7-3、信号的复现

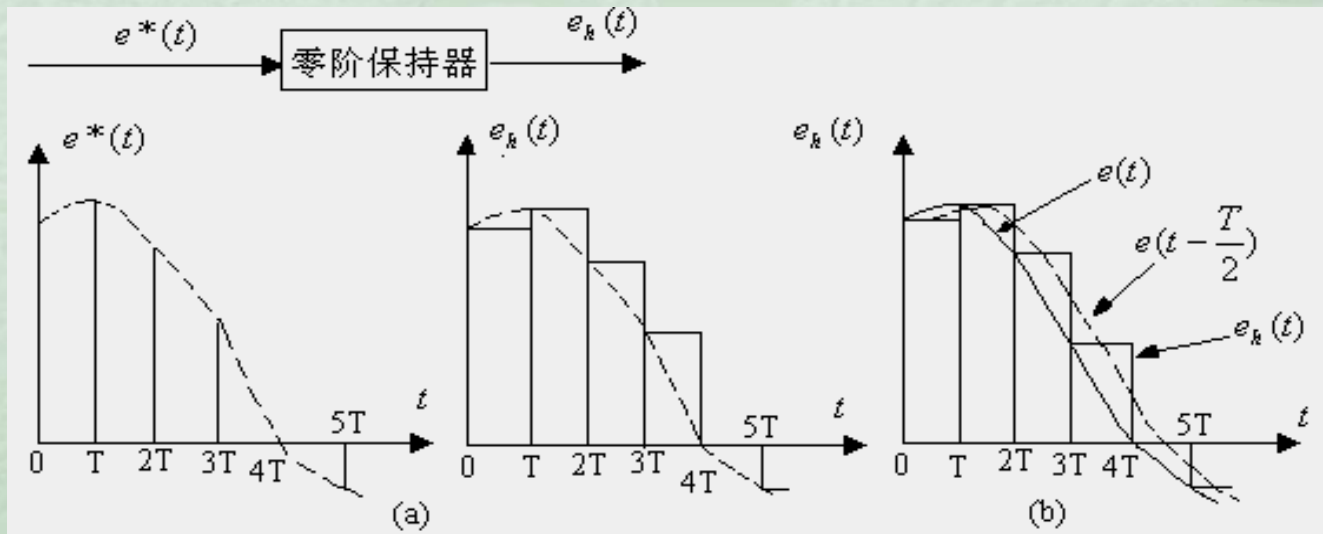
采样器的输出 $e^*(t)$ 为脉冲信号，其频谱中含有许多高频分量。显然，如果不经过滤波器将高频分量滤掉，则相当于给系统加入噪声，严重时会使系统部件受损，系统工作不正常。因此在实际应用中，采样开关后面总是串联一个保持器，其作用就是一个信号复现滤波器，通过它，可使脉冲信号 $e^*(t)$ 复原成连续信号。

理想的滤波器应具有图7-7 (b) 中虚线所示的频率特性，在 $\pm \omega_s/2$ 处突然截止。因此，可以把 $E^*(j\omega)$ 中的高频分量全部滤掉，不失真地保留主分量 $E(j\omega)$ ，而 $E(j\omega)$ 就是连续信号 $e(t)$ 的频谱。所以经过这种理想滤波器，脉冲信号能恢复成原来的连续信号。但是，在现实中这种理想滤波器是无法实现的。工程上通常采用接近理想滤波器性能的保持器来代替。

保持器是将采样信号转换成连续信号的元件，其作用是在采样时刻之间的时间段上为该信号提供插值。在采样系统中，最简单也最常用的是具有常值外推功能的保持器，称为零阶保持器。

在数字计算机控制系统中，往往通过A/D转换器对某一物理量采样一次后，将这一数值存放在某一存储单元内，直到下次采样时再把这一数值刷新，而在两次采样之间，计算机运行程序用到这一物理量时，通常就是使用上次采样进来的值。这也就相当于一个零阶保持器。有时，根据需要，采用一些不同的算法，还可以构成一阶或二阶保持器。这里限于篇幅对一阶及二阶保持器就不介绍了。

零阶保持器的作用是使采样信号 $e^*(t)$ 每一个采样瞬时的值 $e(kT)$ 一直保持到下一个采样瞬时 $e[(k+1)T]$ ，从而使采样信号 $e^*(t)$ 变成阶梯信号 $e_k(t)$ ，如图7-10所示。由于是常值外推，在每个采样区间内的值为常数，其导数为零，故称为零阶保持器。如果把阶梯信号 $e_k(t)$ 的每个区间的中点连接起来（如图7-10所示），则可得到与 $e(t)$ 形状一致而在时间上滞后了 $T/2$ 的时间曲线 $e(t-T/2)$ 。

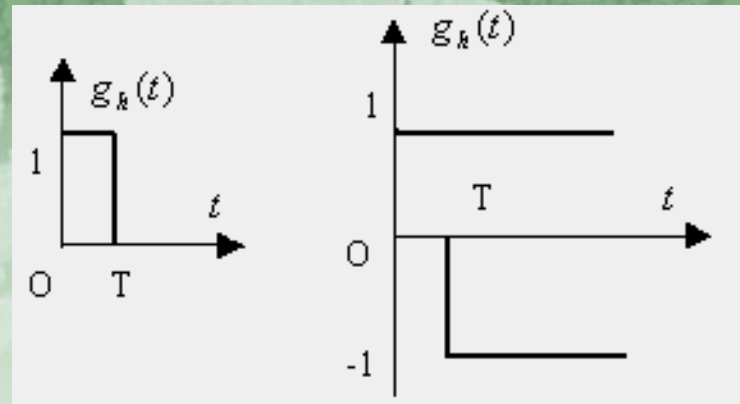


零阶保持器是采样控制系统的基本元件之一，为了分析采样系统，需要了解零阶保持器的传递函数和频率特性。

从前面分析看出，零阶保持器输入单位脉冲时，其输出是一个高度为1宽度为T的矩形波

$$g_k(t) = 1(t) - 1(t - T)$$

零阶保持器的传递函数即为上式的拉氏变换

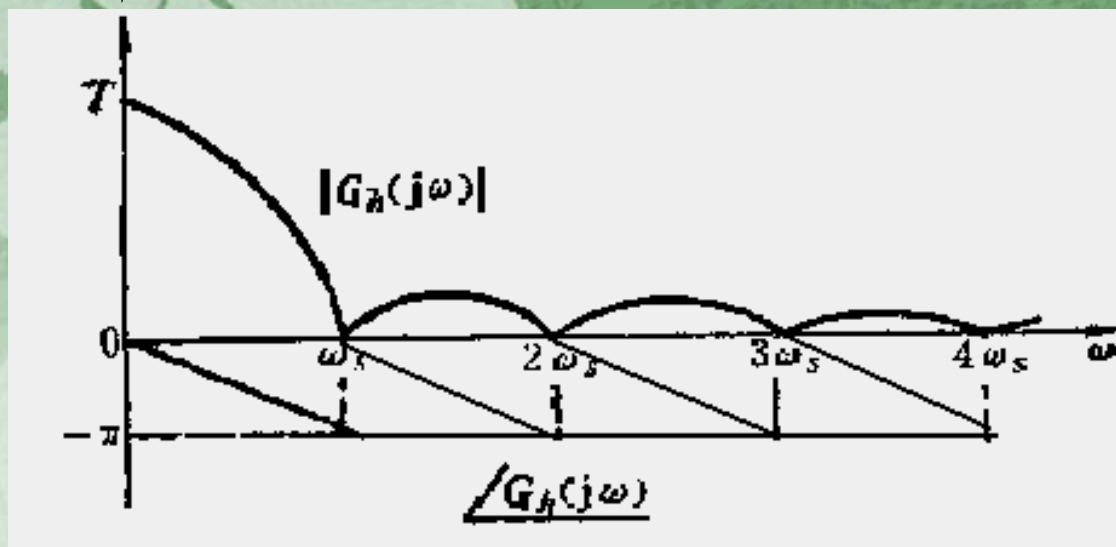


$$G_h(s) = L[g_h(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

用 $j\omega$ 代替上式中的 s ，得零阶保持器的频率特性

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})}{j\omega} = T \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}$$

$G_k(j\omega)$ 的幅频特性 $|G_k(j\omega)|$ 和相频特性 $\angle G_k(j\omega)$ 如图7-12所示。

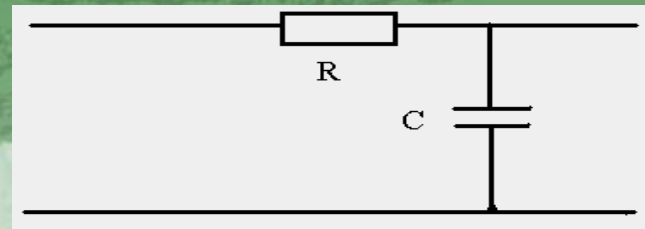


由上图可以看出，零阶保持器是一个低通滤波器，但不是一个理想的低通滤波器。它除了允许采样信号的主频谱分量通过以外，尚允许部分高频分量通过。因此由保持器恢复的连续信号与原来的连续信号 $e(t)$ 相比有一定程度的失真。从相频特性看出，零阶保持器是一个相位滞后元件，滞后量随采样频率 ω_s 增加而减小。

用无源网络可近似实现零阶保持器。如果把 e^{Ts} 展开成级数 $e^{Ts} = 1 + Ts + \frac{1}{2!}T^2s^2 + \dots$

取前两项，则有

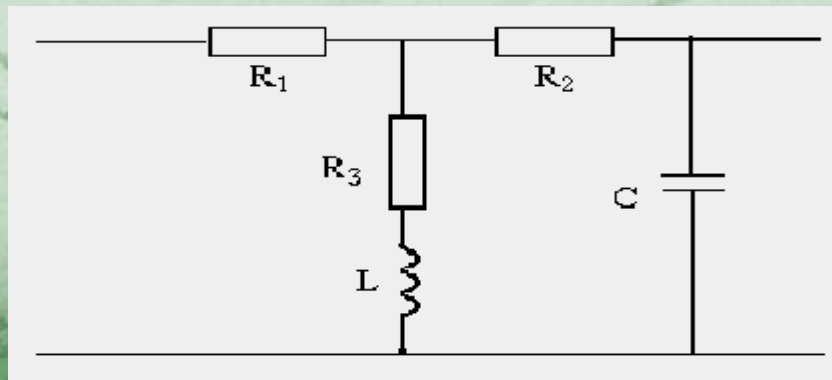
$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{e^{Ts}} \right) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{1 + Ts} \right) = \frac{T}{1 + Ts}$$



这就是图7-13所示的RC低通网络的传递函数。

若取 e^{Ts} 的幂级数的前三项，则有 $G_h(s) = T \cdot \frac{1 + Ts/2}{1 + Ts + T^2s^2/2}$

因此，零阶保持器更精确一点的实现，可以采用图7-14所表示的R-L-C无源网络。



7-4. Z变换与Z反变换

我们在分析连续系统中，应用拉普拉斯变换作为数学工具，将系统的微分方程转化为代数方程，建立了以传递函数为基础的复域分析法，使问题大大简化。那么，采样系统的分析中，是否也有类似的途径呢？答案是：有的。在采样系统中，采用Z变换法，也可以将差分方程转化为代数方程，同样可以建立以脉冲传递函数为基础的Z域分析法。

一：Z变换的定义

Z变换是由采样函数的拉氏变换演变而来的。采样信号的

数学表达式
$$e^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

对上式进行拉氏变换

$$E^*(s) = L[e^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot e^{-kTs}$$

从上式看出，在 $E^*(s)$ 中含有 e^{Ts} 因子，由于它是 s 的超越函数，而不是有理函数，因此引入新的变量 z ，令

$$z = e^{Ts} \quad s = \frac{1}{T} \ln z$$

式中 s 是拉普拉斯算子， T 为采样周期， z 是用 Z 平面来定义的一个复变量，通常称它为 Z 变换算子。

$$\begin{aligned} E^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} &= E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k} \\ &= e(0)z^0 + e(T)z^{-1} + \cdots + e(kT)z^{-k} + \cdots \end{aligned}$$

我们称 $E(z)$ 为 $e^*(t)$ 的 Z 变换，记作 $Z[e^*(t)] = E(z)$

$$Z[e(t)] = E(z)$$

可以看出，采样函数的 Z 变换是变量 z 的幂函数。其一般项 $e(kT)z^{-k}$ 的物理意义是： $e(kT)$ 表征采样脉冲的幅值， z 的幂次表征采样脉冲出现的时刻。因此，它既包含了量值信息 $e(kT)$ ，又包含了时间信息 z^{-k} 。

典型信号的Z变换

(1). 单位脉冲函数

设 $e(t) = \delta(t)$ ，求Z变换 $E(z)$

因为 $\delta(t)$ 只有在 $t=0$ 处值为1，其余均为零，所以有：

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k} = 1 \cdot z^0 = 1$$

(2). 单位阶跃信号

设 $e(t) = 1(t)$ ，求Z变换 $E(z)$ 。

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT) \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

这是一个公比为 z^{-1} 的等比级数，当 $|z^{-1}| < 1$ ，即 $|z| > 1$ 时，级数收敛，可写成闭合形式：

$$E(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad |z| > 1$$

(3). 单位理想脉冲序列

$$e(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

求 $e(t)$ 的Z变换。

$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT) \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

比较式(2)和(3)我们可以看出,不同的 $e(t)$,可以得到相同的 $E(z)$ 。这是由于阶跃信号采样后 $e^*(t)$ 与理想脉冲串是一样的。所以Z变换只是对采样点上的信息有效,只要 $e^*(t)$ 相同, $E(z)$ 就相同,但采样前的 $e(t)$ 可以是不同的。

(4). 单位斜坡信号

设 $e(t) = t$, 求 Z 变换 $E(z)$ 。

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \cdot z^{-k}$$

由于

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

两边对 z 求导数,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-k) \cdot z^{-k-1} = \frac{-1}{(z - 1)^2}$$

两边同乘 $(-Tz)$ 得单位斜坡信号的 Z 变换

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \cdot z^{-k} = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \quad |z| > 1$$

(5). 指数函数信

号设 $e(t) = e^{-at}$, 求Z变换 $E(z)$, 其中 a 为常数。

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \cdot z^{-k}$$

这是一个公比为 $(e^{-aT}z^{-1})$ 的等比级数, 当 $|e^{-aT}z^{-1}| < 1$ 时, 级数收敛, 可写成闭合形式

$$E(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

(6). 正弦信号

设 $e(t) = \sin \omega t$, 求z变换 $E(z)$ 。

$$e(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2j} (e^{j\omega kT} - e^{-j\omega kT}) \cdot z^{-k} = \frac{1}{2j} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{j\omega kT} \cdot z^{-k}) - \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-j\omega kT} \cdot z^{-k}) \right]$$

$$E(z) = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{z(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})}{z^2 - z(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) + 1} \right] = \frac{z \cdot \sin \omega T}{z^2 - 2z \cdot \cos \omega T + 1}$$

在控制系统中， $e(t)$ 常常是以拉氏变换形式 $E(s)$ 给出的，以下是一个由 $E(s)$ 求Z变换的例子：

(7) . 设 $E(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 求 $E(s)$ 的Z变换。

$$E(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$e(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] = 1 - e^{-t}$$

$$E(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{z(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

这里要注意的是，不能直接在 $E(s)$ 中将 $s = \frac{1}{T} \ln z$ 代入，因为Z变换是对连续信号采样后进行变换的。

表7-1中，列出了常用的时间函数及其拉氏变换和它们的Z变换。从表中可以看出，常用函数的Z变换都是 z 的有理分式，且分母阶次大于等于分子阶次。

表 7-1. Z 变换表

序 号	$E(s)$	$e(t)$ 或 $e(k)$	$E(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	e^{-kTs}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{2}{s^3}$	t^2	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{z}{z-1}$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
10	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \cdot \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
11	$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \leftrightarrow$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
12	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \leftrightarrow$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{z \cdot e^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
13	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - z \cdot e^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}} \leftrightarrow$
14		a^k	$\frac{z}{z-a}$
15		$a^k \cdot \cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

二: Z变换的基本定理

1: 线性定理

若已知 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 的Z变换分别为 $E_1(z)$ 和 $E_2(z)$, 且 a_1 和 a_2 为常数, 则有:

$$Z[a_1e_1(t) \pm a_2e_2(t)] = a_1E_1(z) \pm a_2E_2(z)$$

证

$$Z[a_1e_1(t) \pm a_2e_2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} [a_1e_1(kT) \pm a_2e_2(kT)]z^{-k}$$

明:

$$= a_1 \sum_{k=0}^{\infty} e_1(kT)z^{-k} \pm a_2 \sum_{k=0}^{\infty} e_2(kT)z^{-k} = a_1E_1(z) \pm a_2E_2(z)$$

2: 时移定理 (实数位移定

理若 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$, 则有

$$Z[e(t - nT)] = z^{-n}E(z)$$

$$Z[e(t + nT)] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(kT)z^{-k} \right]$$

证明:

$$\begin{aligned} Z[e(t-nT)] &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT-nT) \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-n} \cdot e(kT-nT) \cdot z^{-k} \cdot z^n = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} e(kT-nT) \cdot z^{-(k-n)} \\ &= z^{-n} \sum_{j=-n}^{\infty} e(jT) \cdot z^{-j} \quad (j=k-n) \end{aligned}$$

由于 $j < 0$ 时, $e(jT) = 0$, 所以和式下标取 $j=0$ 开始, 有

$$Z[e(t-nT)] = z^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} e(jT) \cdot z^{-j} = z^{-n} E(z)$$

$$Z[e(t+nT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT+nT) z^{-k}$$

$$= \sum_{k+n=n}^{\infty} e[(k+n)T] z^{-(k+n)} z^n = z^n \sum_{k=n}^{\infty} e(kT) z^{-k}$$

$$= z^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} e(kT) z^{-k} - \sum_{k=0}^{n-1} e[kT] z^{-k} \right] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e[kT] z^{-k} \right]$$

若函数在时域内延迟了 n 个采样周期，在 Z 域内表现为它的 Z 变换函数乘以 z^{-n} 。而若函数在时域内超前 n 个采样周期。这只有当满足 $0 \leq k \leq n-1$ 时， $e(kT)=0$ 时，才在 Z 域内表现为它的 Z 变换函数乘上 z^n 。否则必须将 $e(kT)$ 从 $k=0$ 到 $k=n-1$ 的初始值减去后再乘上 z^n 。时移定理在用 Z 变换法求解差分方程时经常用到。

例7-3. 已知 $e(t) = 1(t-T)$, 求它的Z变换函数

解:
$$\frac{E(z)}{Z[1(t-T)]} = z^{-1} \cdot Z[1(t)] = z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}$$

此例即利用时移定理求延迟一个采样周期的单位阶跃函数的Z变换。

例7-4. 试用时移定理求延迟一个采样周期的单位斜坡函数的Z变换。已知 $e(t) = t - T$, 求 $E(z)$ 。

解：
$$Z[e(t)] = Z[t - T] = z^{-1} \cdot Z[t]$$

：
$$E(z) = z^{-1} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{(z-1)^2}$$

3：复数位移定理：

若已知 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$, 则有

$$Z[e(t) \cdot e^{\mp at}] = E(z \cdot e^{\pm aT})$$

式中 a 为常

证。根据Z变换定义

$$Z[e(t) \cdot e^{\mp at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot e^{\mp akT} \cdot z^{-k}$$

$$Z[e(t) \cdot e^{\mp at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot (ze^{\pm aT})^{-k} = E(z \cdot e^{\pm aT})$$

例7-5. 已知 $e(t) = te^{-at}$, 求Z变换 $E(z)$

$$Z[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad Z[t \cdot e^{-at}] = \frac{T(z \cdot e^{aT})}{(z \cdot e^{aT} - 1)^2}$$

4: z域微分定理:

若 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$ 则 $Z[t \cdot e(t)] = -Tz \frac{d}{dz}[E(z)]$

证明: $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot z^{-k}$

上式两边对z求导数 $\frac{d}{dz} E(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot z^{-k}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} E(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \frac{d}{dz} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot (-k) \cdot z^{-k-1} \\ &= \frac{-z^{-1}}{T} \sum_{k=0}^{\infty} [kT \cdot e(kT)] z^{-k} = -\frac{z^{-1}}{T} Z[t \cdot e(t)] \end{aligned}$$

$$Z[t \cdot e(t)] = -Tz \frac{d}{dz}[E(z)]$$

利用此定理求单位斜坡函数的Z变换，只要对单位阶跃函数的Z变换求导数再乘上一 Tz ，即

$$Z[t] = -Tz \cdot \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{z-1} \right] = -Tz \cdot \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

同理可得 $Z[t^2 e(t)] = -Tz \frac{d}{dz} \left[-Tz \frac{d}{dz} E(z) \right]$

$$Z[t^3 e(t)] = -Tz \cdot \frac{d}{dz} \left\{ -Tz \frac{d}{dz} \left[-Tz \frac{d}{dz} E(z) \right] \right\}$$

5: z域尺度定理:

若已知 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$, 则

$$Z[a^k \cdot e(t)] = E\left(\frac{z}{a}\right) \quad (\text{其中 } a \text{ 为常数})$$

证
明:

$$Z[a^k \cdot e(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot e(kT) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \left(\frac{z}{a}\right)^{-k} = E\left(\frac{z}{a}\right)$$

例7-6. 试求 $\beta^k \cos \omega t$ 的Z变换.

$$Z[\cos \omega t] = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

$$Z[\beta^k \cdot \cos \omega t] = \frac{\frac{z}{\beta} \left[\frac{z}{\beta} - \cos \omega T \right]}{\left(\frac{z}{\beta} \right)^2 - 2 \cdot \frac{z}{\beta} \cos \omega T + 1} = \frac{1 - \beta z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2\beta z^{-1} \cos \omega T + \beta^2 z^{-2}}$$

6: 初值定理:

若 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$, 并有极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$ 存在, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0} [e^*(t)] = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$$

证

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot z^{-k} = e(0) + e(T)z^{-1} + e(2T)z^{-2} + \dots$$

明:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E(z) = e(0) = \lim_{t \rightarrow 0} e^*(t)$$

7: 终值定理:

若 $e(t)$ 的Z变换为 $E(z)$, 且 $E(z)$ 在 z 平面的单位圆上没有二重以上极点, 在单位圆外解析. 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)$$

证明: $Z[e(t+T) - e(t)] = zE(z) - ze(0) - E(z) = (z-1)E(z) - ze(0)$

$$(z-1)E(z) = ze(0) + Z[e(t+T) - e(t)]$$

两边取极限, 并由Z变换定义有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ ze(0) + \sum_{k=0}^{\infty} [e((k+1)T) - e(kT)]z^{-k} \right\} \\ &= e(0) + [e(T) - e(0)] + [e(2T) - e(T)] + [e(3T) - e(2T)] + \cdots = e(\infty) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z)$$

以上两个定理的应用, 类似于拉氏变换中的初值定理和终值定理。如果已知 $e(t)$ 的Z变换 $E(z)$, 在不求反变换的情况下, 可以方便地求出 $e(t)$ 的初值和终值。

三：Z反变换

同连续系统中应用拉氏变换法一样，对于采样系统，通常在z域中进行计算后，需用反变换确定时域解。

从z域函数 $E(z)$ ，求时域函数 $e^*(t)$ ，叫做Z反变换。记作

$$Z^{-1}[E(z)] = e^*(t)$$

它只能给出采样信号 $e^*(t)$ ，而不能提供连续信号 $e(t)$ 。对于常见的典型信号的Z反变换，可以由表7-1查出，但实际中会遇到各种各样的函数，需要通过Z反变换来求得时域解。

通常有以下三种方法来求 $E(z)$ 的Z反变换。

1. 部分分式展开法

部分分式展开法是将 $E(z)$ 展成若干个分式和的形式，而每一个分式可通过表7-1查出所对应的时间函数 $e(t)$ ，并将其转变为采样信号 $e^*(t)$ 。在进行部分分式展开时，与拉氏变换稍有不同，由Z变换表7-1看出，所有的 $E(z)$ 在其分子上都有因子 z ，所以需先把 $E(z)/z$ 展开成部分分式，然后将所得结果的每一项都乘以 z ，即得 $E(z)$ 的展开式。

例 7-7. 已知Z变换函数

$$E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

试求其Z反变换。

解 首先将 $E(z)/z$ 展开成部分分式

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{10}{(z-1)(z-2)} = \frac{-10}{z-1} + \frac{10}{z-2}$$

$$E(z) = -10 \cdot \frac{z}{z-1} + 10 \cdot \frac{z}{z-2}$$

查表7-1有 $Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1$ $Z^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = 2^k$

$$e(kT) = (-1 + 2^k) \times 10$$

$$\begin{aligned} e^*(t) &= e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \dots \\ &= 0 + 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \dots \end{aligned}$$

例7-8. 已知Z变换函数

$$E(z) = \frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$$

试求其Z反变换。

解

$$\frac{E(z)}{z} = \frac{1 - e^{-aT}}{(z-1)(z - e^{-aT})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z - e^{-aT}}$$

:

$$E(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

查表7-1得 $e(t) = 1 - e^{-at}$

$$e(kT) = 1 - e^{-akT}$$

$$e^*(t) = e(0)\delta(t) + e(T)\delta(t-T) + e(2T)\delta(t-2T) + \dots$$

$$= 0 + (1 - e^{-aT})\delta(t-T) + (1 - e^{-2aT})\delta(t-2T) + (1 - e^{-3aT})\delta(t-3T) + \dots$$

2. 幂级数法（长除法）

通常 $E(z)$ 是 z 的有理函数，可表示为两个 z 的多项式之比

$$E(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad n \geq m$$

用分母去除分子，并将商按 z^{-1} 的升幂排列

$$E(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots + c_k z^{-k} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot z^{-k}$$

恰为 Z 变换的定义式，其系数 c_k （ $k=0, 1, 2, \dots$ ）就是 $e(t)$ 在采样时刻 $t=kT$ 时的值 $e(kT)$ 。此法在实际中应用较为方便，通常计算有限几项就够了，缺点是要得到 $e(kT)$ 的一般表达式较为困难。

例7-9. $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

试求其反变换。

解: $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)} = \frac{10z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

$$\begin{array}{r} 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + \dots \\ 1 - 3z^{-1} + 2z^{-2} \overline{) 10z^{-1}} \\ \underline{-) 10z^{-1} - 30z^{-2} + 20z^{-3}} \\ 30z^{-2} - 20z^{-3} \\ \underline{-) 30z^{-2} - 90z^{-3} + 60z^{-4}} \\ 70z^{-3} - 60z^{-4} \end{array}$$

$$E(z) = 10z^{-1} + 30z^{-2} + 70z^{-3} + \dots$$

$$e^*(t) = 0 + 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \dots$$

结果与例7-5用部分分式法所得结果完全一致。

3. 留数法 由Z变换定义 $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{-k}$

上式两边分别乘以 z^{m-1} (m 为正整数) 得

$$E(z) \cdot z^{m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)z^{m-k-1}$$

两边取沿围线 Γ 的积分, Γ 为包围 $E(z) z^{m-1}$ 的所有极点的封闭曲线。

$$\oint_{\Gamma} E(z) \cdot z^{m-1} dz = \oint_{\Gamma} \left[\sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \cdot z^{m-k-1} \right] dz = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \left[\oint_{\Gamma} z^{m-k-1} dz \right]$$

根据复变函数中的柯西定理知 $\oint_{\Gamma} z^{n-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

这样, 上式中的右边, 只存在 $m=k$ 的一项, 其余项均为零, 于是上式变成 $e(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} E(z) \cdot z^{k-1} dz$

由于 Γ 包围了 $E(z) z^{k-1}$ 的所有极点, 所以又可以表示为 Γ 内所含各极点的留数之和, 即 $e(kT) = \sum [E(z) \cdot z^{k-1} \text{在} \Gamma \text{内极点的留数}]$

例7-10. $E(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

试用留数法求 $e^*(t)$ 。

解 $E(z) \cdot z^{k-1} = \frac{10z \cdot z^{k-1}}{(z-1)(z-2)} = \frac{10z^k}{(z-1)(z-2)}$

:

$$e(kT) = \frac{10z^k}{z-1} \Big|_{z=2} + \frac{10z^k}{z-2} \Big|_{z=1} = 10 \times 2^k - 10 = (-1 + 2^k) \times 10$$

$$e^*(t) = 10\delta(t-T) + 30\delta(t-2T) + 70\delta(t-3T) + \dots$$

结果与例7-5 完全一致。

四：用Z变换法解差分方程

连续系统的动态过程，可以用微分方程来描述；采样系统的动态过程用差分方程来描述。如同用拉氏变换解微分方程那样，在采样系统中用Z变换法解差分方程也很方便。因为它使时域中的差分方程转化为z域中的代数方程。

差分的定义

有连续函数 $e(t)$ ，采样后为 $e(kT)$ ，通常为方便起见，写作

$$e(kT) = e(k)$$

差分可分为前向差分和后向差分两种。

一阶前向差分定义为 $\Delta e(k) = e(k+1) - e(k)$

二阶前向差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^2 e(k) &= \Delta[\Delta e(k)] = \Delta[e(k+1) - e(k)] = \Delta e(k+1) - \Delta e(k) \\ &= e(k+2) - e(k+1) - [e(k+1) - e(k)] \\ &= e(k+2) - 2e(k+1) + e(k)\end{aligned}$$

n 阶前向差分定义为 $\Delta^n e(k) = \Delta^{n-1} e(k+1) - \Delta^{n-1} e(k)$

同理，一阶后向差分定义为 $\nabla e(k) = e(k) - e(k-1)$

二阶后向差分定义为 $\nabla^2 e(k) = \nabla e(k) - \nabla e(k-1)$
 $= e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)$

n 阶后向差分定义为 $\nabla^n e(k) = \nabla^{n-1} e(k) - \nabla^{n-1} e(k-1)$

差分方程

如果方程的变量除了含有 $e(k)$ 本身外，还有 $e(k)$ 的差分 $\Delta e(k) \dots \Delta^n e(k)$ ，则此方程为差分方程。对于输入、输出均为采样信号的线性定常采样系统，它们的动态过程一般均可表示成如下线性定常差分方程：

$$\begin{aligned} c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \dots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) \\ = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k) \end{aligned}$$

差分方程求解

例7-11. 一阶采样系统的差分方程为 $c(k+1) - b \cdot c(k) = r(k)$

已知输入信号 $r(k) = a^k$, 初始条件 $c(0) = 0$, 求响应 $c(k)$

解 对差分方程两边进行Z变换,

$$: \quad zC(z) - zc(0) - bC(z) = R(z)$$

$$R(z) = Z[a^k] = \frac{z}{z-a}$$

初始条件 $c(0) = 0$, 所以方程为 $zC(z) - bC(z) = \frac{z}{z-a}$

$$C(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$

上式为输出的Z变换。为得到时域响应 $c(k)$, 再对 $C(z)$ 进行Z反变换, 将 $C(z)$ 展开部分分式:

$$C(z) = \frac{1}{a-b} \left[\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-b} \right] \quad C(k) = \frac{1}{a-b} (a^k - b^k)$$

例7-12. 用Z变换法解差分方程:

$$c(k+2) + 3c(k+1) + 2c(k) = 0$$

初始条件 $c(0) = 0$, $c(1) = 1$, 求 $c(k)$ 。

解: 对方程两边进行Z变换

$$z^2 C(z) - z^2 c(0) - z c(1) + 3z C(z) - 3z c(0) + 2C(z) = 0$$

代入初始条件并化简,

$$(z^2 + 3z + 2)C(z) = z$$

$$C(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2}$$

$$c(k) = (-1)^k - (-2)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

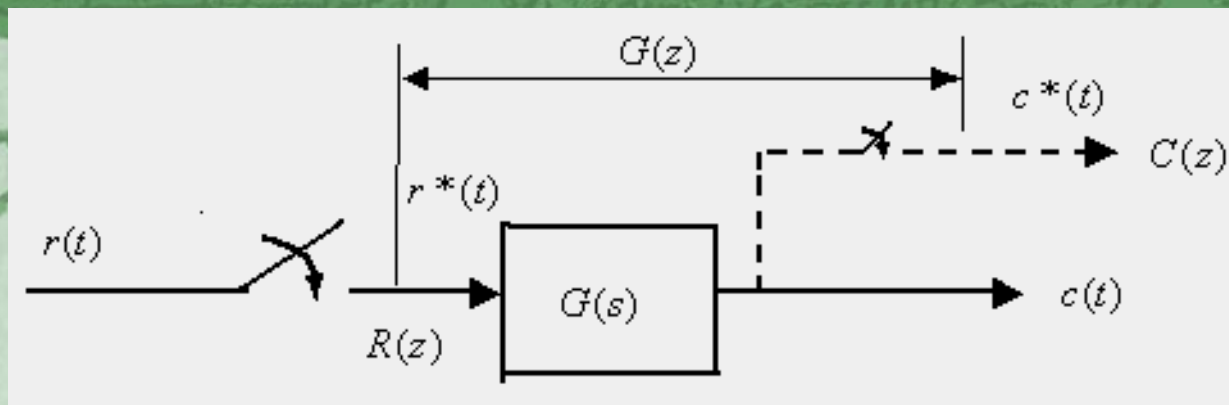
7-5 脉冲传递函数

在上一节中,我们介绍了采样信号 $e^*(t)$ 与其Z变换 $E(z)$ 之间的关系。在连续系统中由时域函数及其拉氏变换之间的关系所建立起的传递函数,是经典控制理论中研究系统控制性能的重要数学模型。对于采样系统来说,研究的思路与连续系统完全类似,同样可以在z域中,通过脉冲传递函数来研究采样系统的控制性能。

一: 脉冲传递函数定义

系统输入信号为 $r(t)$,经采样后 $r^*(t)$ 的Z变换为 $R(z)$,连续部分输出为 $c(t)$,采样后 $C^*(t)$ 的Z变换为 $C(z)$,见图7-15。则脉冲传递函数定义为系统的初始条件为零时,输出采样信号的Z变换与输入采样信号的Z变换之比,用 $G(z)$ 表示。

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$



如果已知系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 及输入信号的 Z 变换 $R(z)$ ，那么输出的采样信号就可求得：

$$c^*(t) = Z^{-1}[C(z)] = Z^{-1}[G(z) \cdot R(z)]$$

因此，求解 $C^*(t)$ 的关键就在于怎样求出系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 。但是对于大多数实际系统来说，其输出往往是连续信号 $c(t)$ 而不是采样信号 $C^*(t)$ 。在这种情况下，我们可以在输出端虚设一个采样开关，如图7-15中虚线所示。它与输入端采样开关一样，以周期 T 同步工作。如果系统的实际输出比较平滑，在采样点处无跳变，那么我们就可以用 $C^*(t)$ 来近似描述系统的实际输出 $c(t)$ 。

二：开环系统（或环节）的脉冲传递函数

1: 脉冲传递函数的推导

设开环系统结构图如图7-15所示。推导脉冲传递函数的思路是：先求出连续部分在理想脉冲串作用下的连续输出，即从 $r^*(t)$ 求出 $c(t)$ ，然后在对 $c(t)$ 采样求出 $c^*(t)$ 及其Z变换。

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

在理想脉冲作用下，线性连续部分的输出响应为脉冲过渡函数 $g(t)$ ，由叠加原理可得：

$$c(t) = r(0) \cdot g(t) + r(T) \cdot g(t - T) + \cdots + r(nT) \cdot g(t - nT) + \cdots$$

$$c(kT) = r(0) \cdot g(kT) + r(T) \cdot g(kT - T) + \cdots + r(nT) \cdot g(kT - nT) + \cdots$$

等式两边乘以 z^{-k} ，并对 k 取和式

$$\sum_{k=0}^{\infty} c(kT) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [r(0)g(kT) + r(T)g(kT - T) + \cdots + r(nT)g(kT - nT) + \cdots] \times z^{-k}$$

第一项:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(0)g(kT) \cdot z^{-k} = r(0)g(0) + r(0)g(T)z^{-1} + \cdots = r(0)[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \cdots]$$

第二项:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r(T)g(kT-T) \cdot z^{-k} &= r(T)[g(-T) + g(0)z^{-1} + g(T)z^{-2} + \cdots] \\ &= r(T)z^{-1}[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \cdots] \end{aligned}$$

第三项

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(2T)g(kT-2T) \cdot z^{-k} = r(2T)z^{-2}[g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \cdots]$$

下面各项依次类推, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c(kT)z^{-k} &= [g(0) + g(T)z^{-1} + g(2T)z^{-2} + \cdots] \times [r(0) + r(T)z^{-1} + r(2T)z^{-2} + \cdots] \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \cdot z^{-k} \right] \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot z^{-k} \right] \end{aligned}$$

上式可写为 $C(z) = G(z) \cdot R(z)$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \cdot z^{-k}$$

所以脉冲传递函数 $G(z)$ ，就是连续系统脉冲过渡函数 $g(t)$ 经采样后 $g^*(t)$ 的Z变换。

2: 怎样求脉冲传递函数 $G(z)$

第一步，由已知系统的传递函数 $G(s)$ ，用拉氏反变换求出 $g(t)$ ，

第二步，对 $g(t)$ 采样，得 $g^*(t)$

第三步，对 $g^*(t)$ 进行Z变换，得 $G(z)$ 。

通常，可以直接查表7-1，在表中，每一项时间函数 $e(t)$ ，都有拉氏变换式 $E(s)$ 及对应的Z变换式 $E(z)$ 。所以把表中 $e(t)$ 看成 $g(t)$ ，则 $E(s)$ 即为 $G(s)$ ， $E(z)$ 即为 $G(z)$ 。

例7-13. 系统结构如图7-15所示, 其中连续部分传递函数

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

试求该开环系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 。

解 $g(t) = L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{10}{s(s+10)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}\right] = 1 - e^{-10t}$

:

$$g^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [1(kT) - e^{-10kT}] \cdot \delta(t - kT)$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-10kT} \cdot z^{-k} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-10T}} = \frac{z(1-e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

此例也可由 $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+10}$ 直接查表7-1得:

$$G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-10T}} = \frac{z(1-e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})}$$

例7-14. 系统结构如图7-15所示，其中连续部分传递函数

$$G(s) = \frac{k}{(s+a)(s+b)}$$

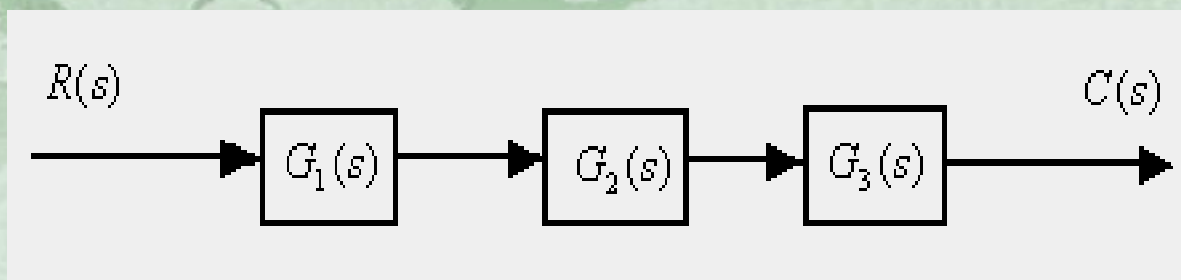
试求该系统的脉冲传递函数 $G(z)$ 。

解： 将 $G(s)$ 展开成部分分式

$$G(s) = \frac{k}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right)$$
$$G(z) = \frac{k}{b-a} \left(\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right) = \frac{k}{b-a} \cdot \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}$$

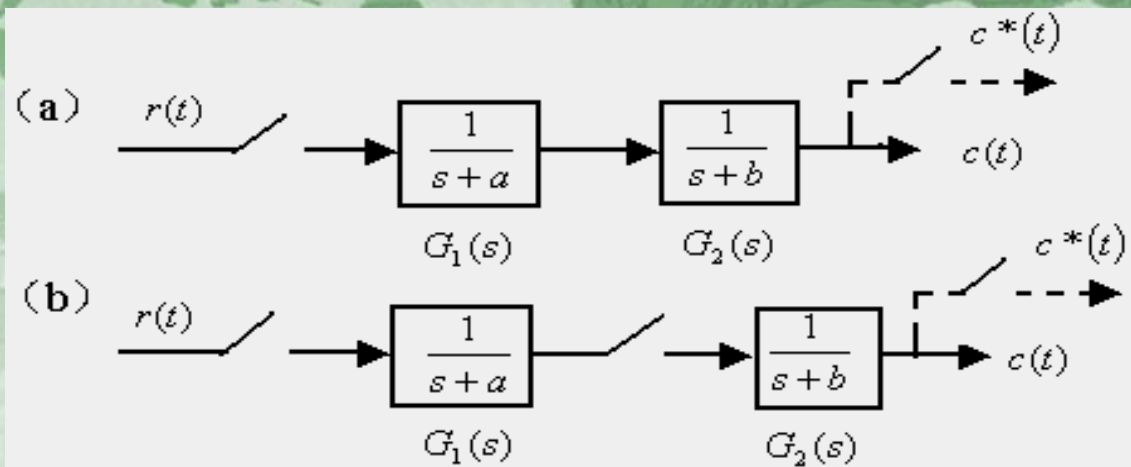
3: 串联环节的脉冲传递函数

在连续系统中，串联环节的传递函数等于各环节传递函数之积，见图7-16，有 $G(s) = G_1(s)G_2(s)G_3(s)$



在采样系统中，串联环节的脉冲传递函数就不完全是这样了，要由环节之间有无采样开关而定。我们先看下面这个例子。

例7-15. 有两个开环采样系统，其结构如图7-17 (a)、(b)所示。试求这两个开环系统的脉冲传递函数。



解 先求系统(a)的脉冲传递函数，因为

$$: \quad G_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad G_2(s) = \frac{1}{s+b}$$

连续部分的传递函数 $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

由例7-12的结果，得 $G(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{z(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$

下面我们再求系统 (b) 的脉冲传递函数, 因为在 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之间有采样开关, 所以有

$$G_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad G_1(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s-b} \quad G_2(z) = \frac{z}{z - e^{-bT}}$$

系统的开环脉冲传递函数

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \cdot \frac{z}{z - e^{-bT}} = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}$$

显然, 系统 (a) 与系统 (b) 的脉冲传递函数是不相等的。为此, 我们必须区别两种情况来讨论串联环节的脉冲传递函数。一种是环节之间有采样开关隔开的情况; 另一种是环节之间没有采样开关隔开的情况。如图 7-18 (a) 与 (b) 所示。

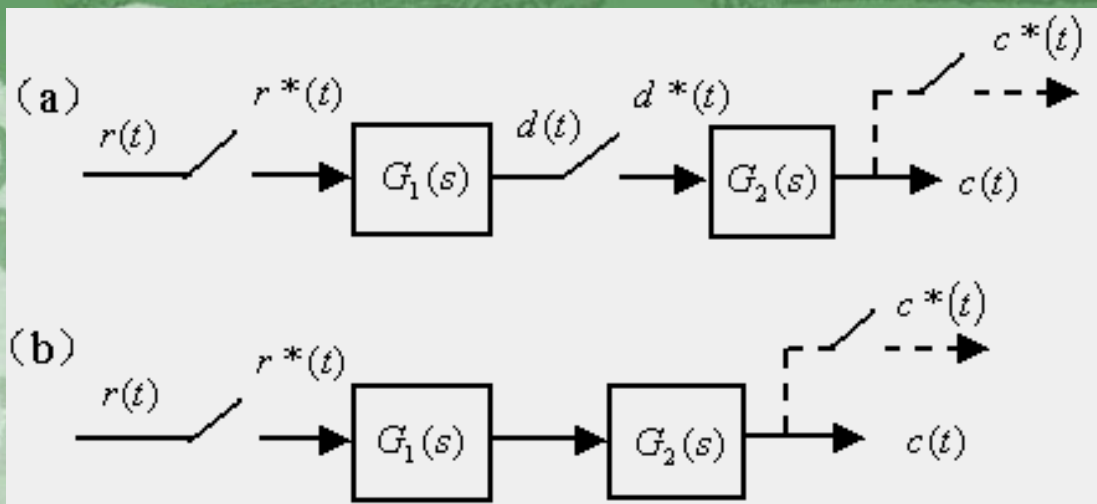


图7-18 (a) 为两个串联环节之间有采样开关隔开，所以有

$$D(z) = G_1(z)R(z)$$

$$C(z) = G_2(z) \cdot D(z)$$

其中 $G_1(z)$ 、 $G_2(z)$ 分别为线性环节 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的脉冲传递函数

$$C(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot R(z)$$

系统 (a) 的脉冲传递函数为 $G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z)$

由此可知，两个串联环节之间有采样开关隔开时，其脉冲传递函数等于两个环节各自的脉冲传递函数之乘积。对于 n 个串联环节之间有采样开关隔开时，其脉冲传递函数为：

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \cdots G_n(z)$$

现在我们来研究图7-18 (b) 的系统，由于 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 之间无采样开关隔开，所以

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

则脉冲传递函数 $G(z)$ 为 $G(s)$ 的Z变换

$$G(z) = Z[G(s)] = Z[G_1(s)G_2(s)] = G_1G_2(z)$$

由此可知，两个串联环节之间无采样开关隔开时，系统的脉冲传递函数等于两个传递函数乘积经采样后的Z变换。同理，此结论也适用于 n 个环节串联而无采样开关隔开的情况，即

$$G(z) = Z[G_1(s) \cdot G_2(s) \cdots G_n(s)] = G_1 G_2 \cdots G_n(z)$$

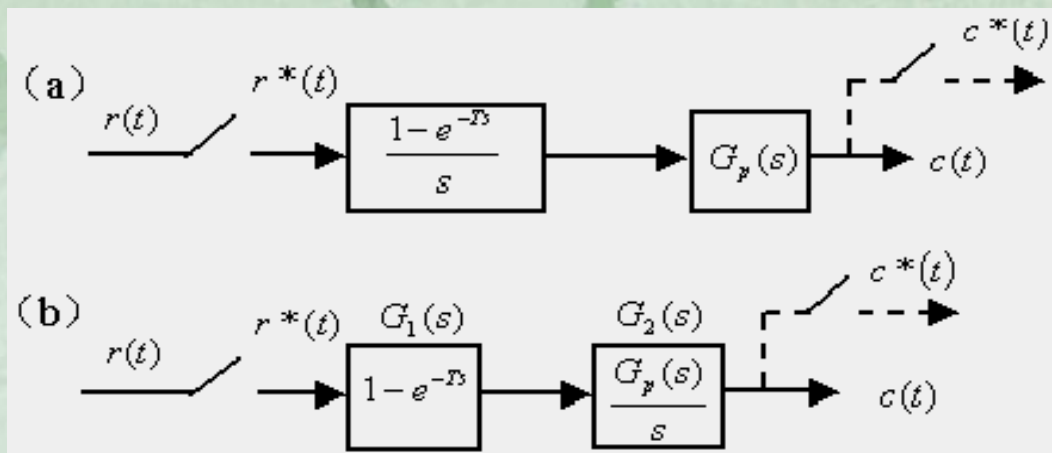
由上面分析看出，显然 $G_1(z)G_2(z) \neq G_1 G_2(z)$

也即各环节传递函数Z变换的乘积不等于各环节传递函数乘积的Z变换。

4: 有零阶保持器时的开环脉冲传递函数

具有零阶保持器的开环系统如图7-19 (a) 所示。图中零阶

保持器的传递函数为 $G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$



为分析方便，将图7-19 (a) 等效成图7-19 (b) 的形式。

因为 $c^*(t)$ 中包含两个分量，一个分量是输入采样信号 $r^*(t)$ 经过 $G_2(s)$ 后所产生的响应，其Z变换为

$$C_1(z) = G_2(z) \cdot R(z) \quad G_2(z) = Z[G_2(s)] = Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]$$

另一个分量是输入采样信号 $r^*(t)$ 经过 $e^{-Ts} G_2(s)$ 所产生的响应

$$C_2(z) = z^{-1} G_2(z) \cdot R(z)$$

$$C(z) = C_1(z) - C_2(z) = (1 - z^{-1}) G_2(z) \cdot R(z) = \frac{z-1}{z} G_2(z) \cdot R(z)$$

故开环脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[\frac{G_p(s)}{s} \right]$$

例7-16. 具有零阶保持器的开环采样系统结构图如图7-19(a)所示, 其中 $G_p(s) = \frac{10}{s(s+10)}$

试求开环系统的脉冲传递函数 $G(z)$

解:
$$\frac{G_p(s)}{s} = \frac{10}{s^2(s+10)} = \frac{-0.1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{0.1}{s+10}$$

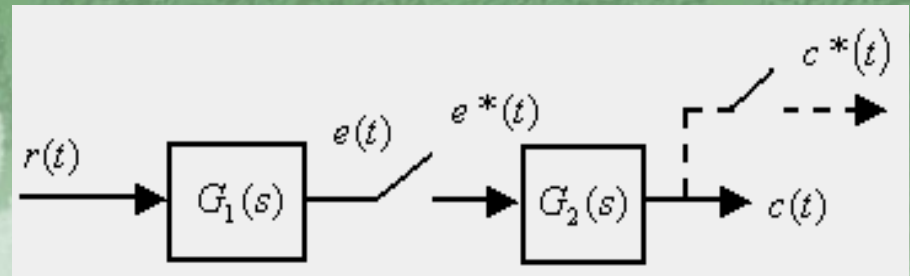
$$Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] = \left[\frac{-0.1z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{0.1z}{z-e^{-10T}} \right]$$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{z-1}{z} \left[\frac{0.1z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{0.1z}{z-e^{-10T}} \right] \\ &= \frac{(T-0.1+0.1e^{-10T})z + (0.1-Te^{-10T}-0.1e^{-10T})}{(z-1)(z-e^{-10T})} \end{aligned}$$

与例7-13相比, 可以看出 $G(z)$ 的极点完全相同, 也即引入零阶保持器后, 只改变的分子.

5: 连续信号直接进入连续环节时的情况

开环采样系统结构如图7-20所示, 输入信号未经采样开关直接进入 $G_1(s)$ 。下面求该系统的脉冲传递函数。



连续环节 $G_1(s)$ 的输入为连续量 $r(t)$, 输出也是连续量 $e(t)$, 所以有 $E(s) = G_1(s) \cdot R(s)$

对上式进行采样, 用右上角加“*”表示。

$$E^*(s) = [G_1(s) \cdot R(s)]^* \quad \mathbf{E}(z) = \mathbf{C}^1 \mathbf{B}(z)$$

连续环节 $G_2(s)$ 的输入为采样信号 $e^*(t)$, 输出为连续信号 $c(t)$, 所以有

$$C(s) = G_2(s) \cdot E^*(s)$$

$$C^*(s) = G_2^*(s) \cdot E^*(s)$$

$$C(z) = G_2(z) \cdot E(z)$$

$$C(z) = G_2(z) \cdot G_1 R(z)$$

式中 $G_1 R(z)$ 为 $G_1(s) R(s)$ 乘积之Z变换。由式(7-73)看出, 当连续信号直接进入连续环节时, 表示不出 $C(z)/R(z)$ 的形式, 只能求得输出的Z变换表达式 $C(z)$, 而求不到脉冲传递函数 $G(z)$ 。

三：闭环系统脉冲传递函数

在连续系统中，闭环传递函数与相应的开环传递函数之间有着确定的关系，所以可用一种典型的结构图来描述一个闭环系统。而在采样系统中，由于采样开关在系统中所设置的位置不同，可以有多种结构形式，所以没有唯一的典型结构图。下面我们讨论几种闭环采样系统的脉冲传递函数。

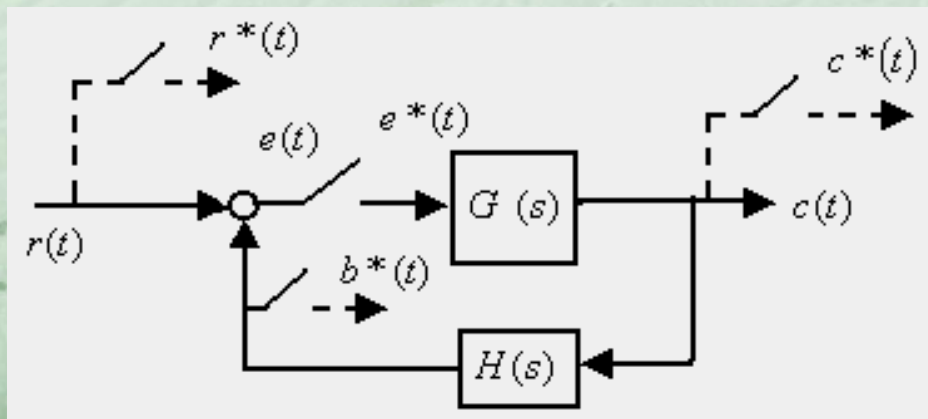
1: 图7-21是一种比较常见的采样系统结构图。图中虚线所示的采样开关是为了分析方便而虚设的，且它们均以周期 T 同步工作。闭环系统的输入 $r(t)$ ，输出 $c(t)$ 均为连续量，闭环系统脉冲传递函数应是输出、输入采样信号的 Z 变换之比。

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$E^*(s) = R^*(s) - B^*(s)$$

$$E(z) = R(z) - B(z)$$

$$B(s) = [G(s)H(s)]E^*(s)$$



$$B^*(s) = [G(s)H(s)]^* E^*(s)$$

$$B(z) = GH(z) \cdot E(z)$$

$$E(z) = R(z) - GH(z) \cdot E(z) \quad E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot R(z)$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + GH(z)} = \Phi_{eR}(z)$$

$$C(s) = G(s) \cdot E^*(s) \quad C(z) = G(z) \cdot E(z)$$

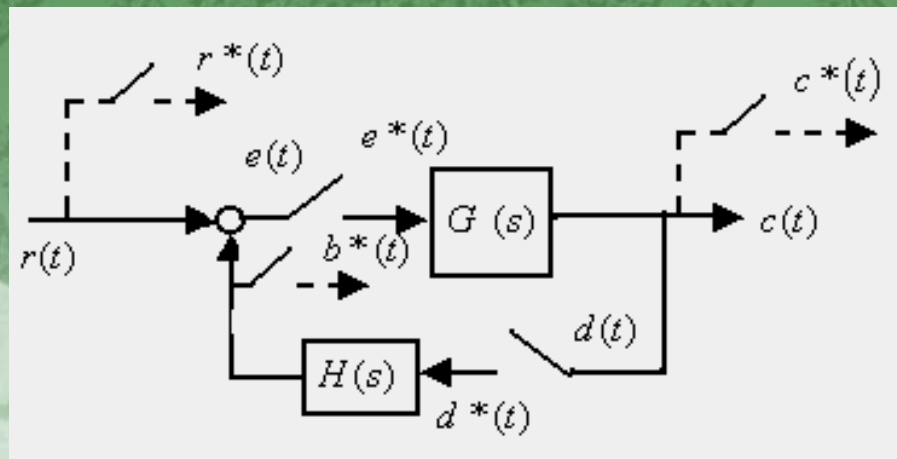
$$C(z) = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \cdot R(z) \quad \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} = \Phi_{CR}(z)$$

当系统为单位反馈时

$$\Phi_{eR}(z) = \frac{1}{1 + G(z)}$$

$$\Phi_{CR}(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)}$$

2: 图7-22是与图7-21类似的系统，只是在反向通道之前，多设置一个采样开关。设系统中的采样开关是同步动作的。



$$E(z) = R(z) - B(z)$$

$$B(z) = H(z) \cdot C(z)$$

$$C(z) = G(z) \cdot E(z)$$

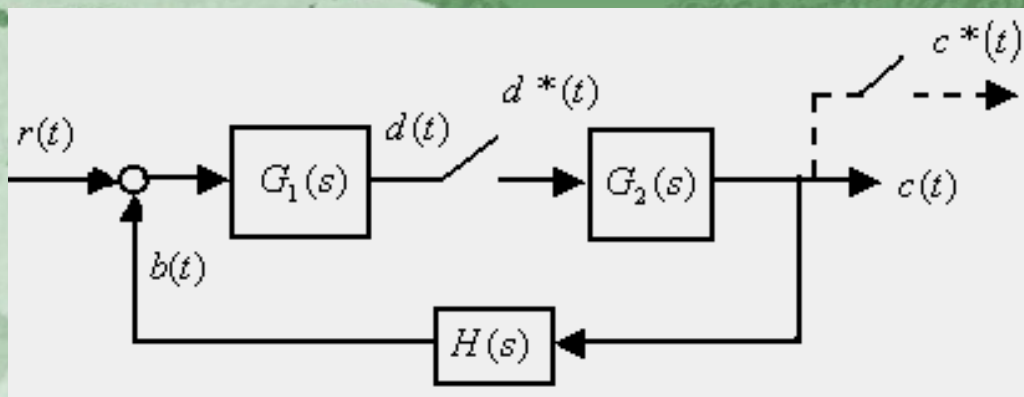
$$E(z) = R(z) - G(z) \cdot H(z) \cdot E(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \cdot R(z)$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z)H(z)} = \Phi_{eR}(z)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z)} = \Phi_{cR}(z)$$

3: 图7-23为一种闭环采样系统结构图。



$$D(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)H(s) \cdot D^*(s)$$

$$D^*(s) = [G_1(s)R(s)]^* - [G_1(s)G_2(s)H(s)]^* D^*(s)$$

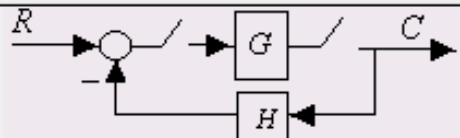
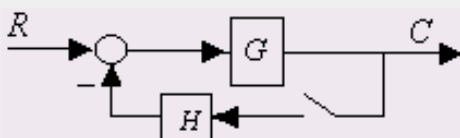
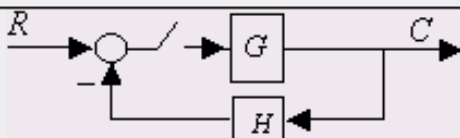
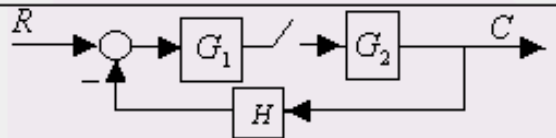
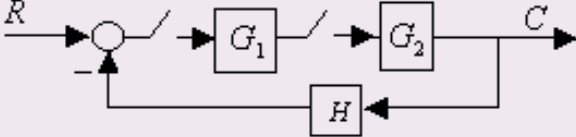
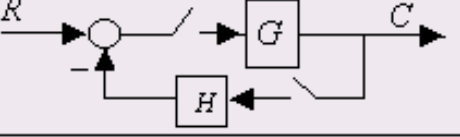
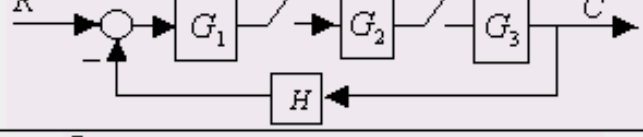
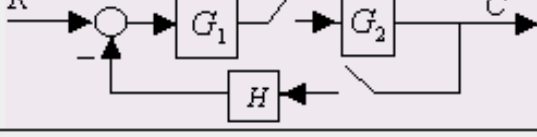
$$D(z) = G_1R(z) - G_1G_2H(z) \cdot D(z) \quad D(z) = \frac{G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

$$C(s) = G_2(s) \cdot D^*(s) \quad C^*(s) = G_2^*(s) \cdot D^*(s)$$

$$C(z) = G_2(z)D(z)$$

$$C(z) = \frac{G_2(z) \cdot G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$$

上面我们仅介绍了三种闭环采样系统的结构图及其脉冲传递函数。对于采样开关在系统中具有各种配置的闭环结构图及其输出采样信号的Z变换表达式 $C(z)$ ，可参阅表7-2。

	结 构 图	$C(z)$
1		$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
2		$C(z) = \frac{GR(z)}{1 + GH(z)}$
3		$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + GH(z)}$
4		$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_1G_2H(z)}$
5		$C(z) = \frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1 + G_1(z)G_2H(z)}$
6		$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1 + G(z)H(z)}$
7		$C(z) = \frac{G_2(z)G_3(z)G_1R(z)}{1 + G_2(z)G_1G_3H(z)}$
8		$C(z) = \frac{G_2(z)G_1R(z)}{1 + G_2(z)G_1H(z)}$

四：应用Z变换法分析系统的条件

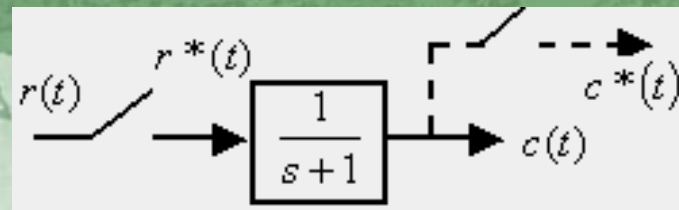
在用Z变换法求系统的时域解时，必须有一定的限制，否则会得出错误的结论。因为Z变换法只能求出采样瞬时的信息，即得到 $c^*(t)$ ，而通常系统的受控对象输出为连续信号 $c(t)$ ，那么是否只要把采样点上的值连接起来，就可以完全反映连续信号 $c(t)$ 呢？采样间隔中的状况如何呢？我们不妨看一个例子。

例7-17. 开环采样系统结构如图7-24所示。已知输入 $r(t)=1(t)$ ，采样周期 $T=1$ （秒），试求 $c^*(t)$ 及 $c(t)$ 。

解

:

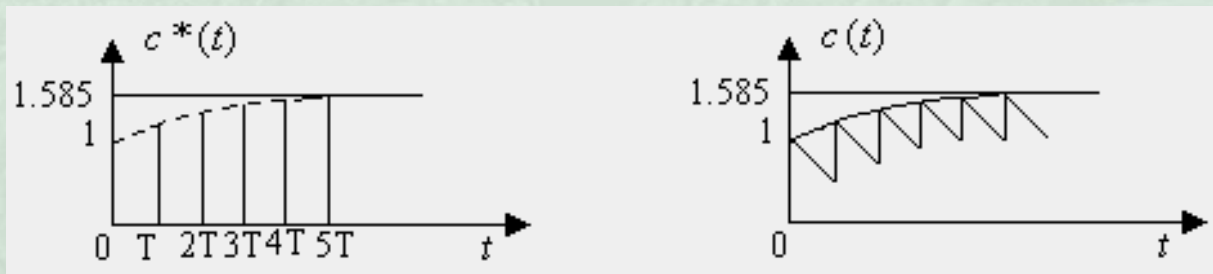
$$C(z) = G(z) \cdot R(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-e^{-T}}$$



$$C(z) = 1 + 1.368z^{-1} + 1.5z^{-2} + 1.55z^{-3} + 1.56z^{-4} + \dots$$

$$c^*(t) = \delta(t) + 1.368\delta(t-T) + 1.5\delta(t-2T) + 1.55\delta(t-3T) + \dots$$

作出 $c^*(t)$ 曲线如图7-25所示。



$$r^*(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) \quad R^*(s) = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \dots$$

$$C(s) = \frac{1}{s+1} \cdot R^*(s) \quad c(t) = L^{-1}[C(s)] = e^{-t} + e^{-(t-T)} + e^{-(t-2T)} + e^{-(t-3T)} + \dots$$

可以看出连续信号在采样瞬时呈现跳跃，即 $c^*(kT^+) \neq c^*(kT^-)$ 。因此如果直接把图 $c^*(kT)$ 各采样点的值连接起来，并不能代表真正的 $c(t)$ ，也即采样间隔中的信息失真了。其原因是：由于当连续环节 $1/(s+1)$ 的输入是经过采样后的冲击序列时，对它不具备足够的平滑作用，所以在采样点处出现跳变。如果我们把连续环节改为 $1/s(s+1)$ ，那么就能平滑冲击输入，或在 $1/(s+1)$ 的前面加一个零阶保持器，使冲击输入转换为矩形脉冲输入，这样 $1/(s+1)$ 的输出就不会产生跳变。

由此得出结论：当连续部分的输入直接为理想脉冲串（即冲击序列）时，其传递函数必须满足极点数比零点数多两个以上，即满足条件

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 0$$

则系统的连续输出信号 $c(t)$ 在采样点不会产生跳变，这样可以把 $c^*(t)$ 的采样瞬时值连接起来得到 $c(t)$ 而不至于产生太大的误差。

我们用了较多的篇幅来介绍Z变换，建立了采样系统在z域中的数学模型——脉冲传递函数。类似于连续系统，可以在此基础上分析采样系统的控制性能，诸如稳定性、稳态误差、瞬态响应特性等。

7-6 采样系统的性能分析

一: 稳定性 我们知道, 线性连续系统的稳定性分析是基于闭环特征根在s平面中的位置, 若全在虚轴以左, 则系统稳定。那么在z平面上如何来分析采样系统的稳定性呢? 首先, 我们要弄清s平面与z平面的关系。

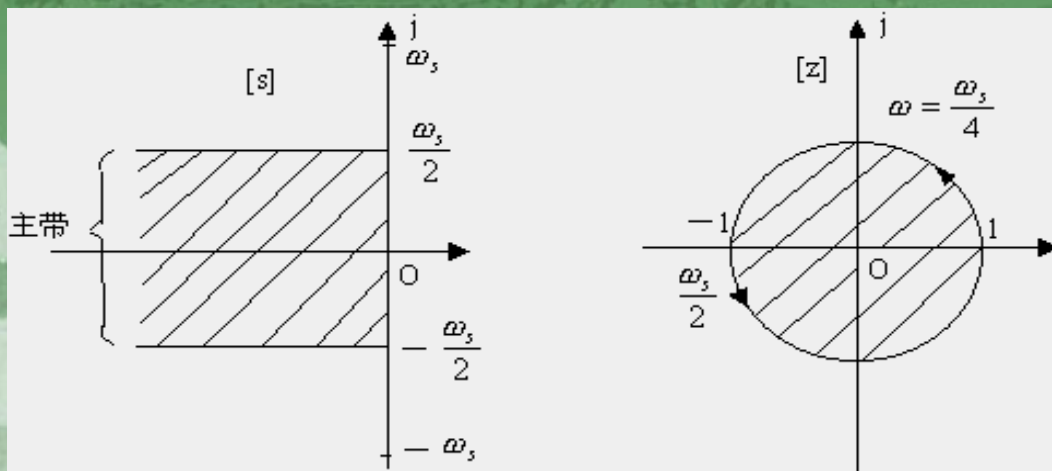
1: 从s平面到z平面的映射

$$z = e^{sT} \quad s = \sigma + j\omega$$
$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = |z| \cdot e^{j\theta}$$

在s平面上的虚轴, 即 $\sigma = 0$, $s = j\omega$, 那么在z平面上为

$$|z| = e^{0T} = 1 \quad \theta = \omega T \quad z = e^{j\omega T}$$

即s平面上的虚轴, 映射到z平面上为一个模始终等于1, 相角为 ωT 的复数。随着 ω 变化, 它的图形为一个半径等于1, 以z平面原点为圆心的单位圆。如图7-27所示。



$$s = -j\frac{\omega_s}{2}, z = e^{Ts} = e^{-jT\frac{\omega_s}{2}} = e^{-j\pi}$$

$$s = -j\frac{\omega_s}{4}, z = e^{Ts} = e^{-jT\frac{\omega_s}{4}} = e^{-j\pi/2}$$

$$s = -j0, z = e^{Ts} = 1$$

$$s = j\frac{\omega_s}{4}, z = e^{Ts} = e^{jT\frac{\omega_s}{4}} = e^{j\pi/2}$$

$s = j\frac{\omega_s}{2}, z = e^{Ts} = e^{jT\frac{\omega_s}{2}} = e^{j\pi}$ 映射到z平面上的点沿单位圆刚好逆时针转过一圈。

若 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化，z平面上点将沿着单位圆逆时针转无穷多圈。由以上分析，我们可以看出，左半s平面内每一条宽度为 ω_s 的带，都映射到z平面的单位圆内。一般把从 $j\omega_s/2$ 到 $-j\omega_s/2$ 的带称为主带，而其余的称为次要带。

由此可知，位于左半s平面的点有 $\sigma < 0$ ，则 $|z| < 1$ 映射到z平面上在单位圆内；而s右半平面上的点，映射到z平面上位于单位圆外。所以采样系统的稳定的条件就很容易得到了。

采样系统稳定的充要条件是系统的特征根必须全部位于z平面的单位圆内，只要有一个特征值在单位圆外，系统就不稳定；若有一个正好在单位圆上时，系统处于临界稳定。

正如分析连续系统的稳定性一样，用解特征方程根的方法，来分析高阶采样系统的稳定性是很不方便的，特别是在研究系统结构、参数对稳定性的影响时。为此，必须建立一些比较实用的分析采样系统稳定性的方法。在这里我们着重介绍劳斯判据，顺便提一下对数稳定判据。

2: z域到w域的映射及w域稳定性判据

连续系统中的劳斯判据是判别系统特征根是否全在s左半平面，从而确定系统的稳定性。而在z平面内，稳定性取决于根是否全在单位圆内。因此劳斯判据是不能直接应用的，如果将z平面再复原到s平面，则系统的方程中又将出现超越函数。所以我们要想办法再寻找一种新的变换，使z平面的单位圆内映射到一个新的平面的虚轴之左而又不至于出现超越函数。这个新的平面我们把它称为w平面，在此平面上，我们就可直接应用劳斯判据了。

作双线性变换

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$

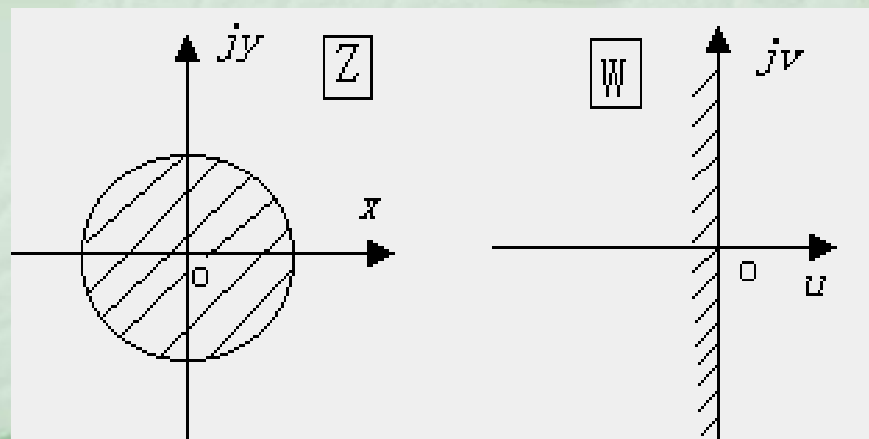
$$z = x + jy \quad w = u + jv$$

$$w = u + jv = \frac{x + jy + 1}{x + jy - 1} = \frac{[(x+1) + jy][(x-1) - jy]}{(x-1)^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 - 2jy}{(x-1)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x-1)^2 + y^2}$$

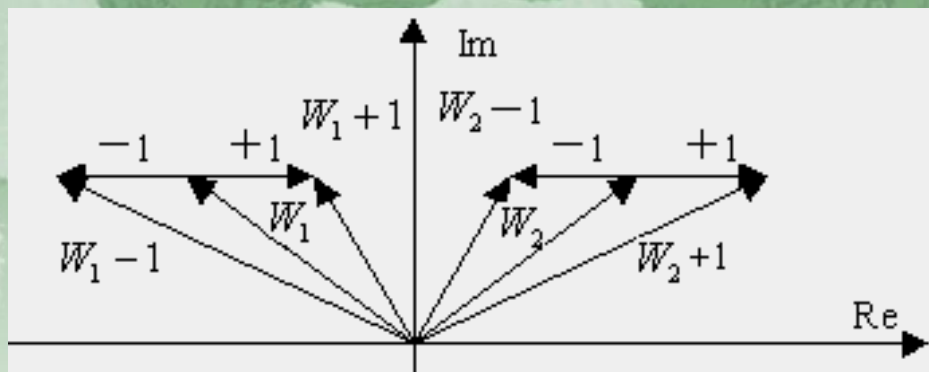
w平面的实部为 $u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$

若极点在z平面的单位圆内，
 则有 $x^2 + y^2 < 1$ ，对应于w平面
 中 $u < 0$ ，即虚轴以左；若极点
 在z平面的单位圆外，
 $x^2 + y^2 > 1$ ，对应于w平面的
 $u > 0$ ，就是虚轴以右。如图7-
 28所示。



上述对应关系还可以从平面的向量几何图形中得到。如图7-29所示，若在左半平面中有任意一点 w_1 ，则由向量相加关系可以得到

$$|z_1| = \frac{|w_1 + 1|}{|w_1 - 1|} < 1$$



表明 w_1 点在左半平面时，相应的 z_1 一定在单位圆内。

同理，若有点 w_2 在右半平面，则

$$|z_2| = \frac{|w_2 + 1|}{|w_2 - 1|} > 1$$

即 w_2 点在右半平面时，相应的 z_2 点一定在单位圆外。

利用上述变换，可以将特征方程 $D(z)=0$ ，转换成 $D(w)=0$ ，然后就可直接应用连续系统中所介绍的劳斯判据了。其步骤是：

- 1) 求出采样系统的特征方程 $D(z)=0$;
- 2) 进行 w 变换，整理后得 $D(w)=0$;
- 3) 应用劳斯判据判别采样系统的稳定性。

例7-18. 设闭环采样系统的特征方程为

$$D(z) = 45z^3 - 117z^2 + 119z - 39 = 0$$

试判断系统稳定性。

解

$$z = \frac{w+1}{w-1}$$

:

$$45\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 117\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 119\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 39 = 0$$

$$D(w) = w^3 + 2w^2 + 2w + 40 = 0$$

$$w^3 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$

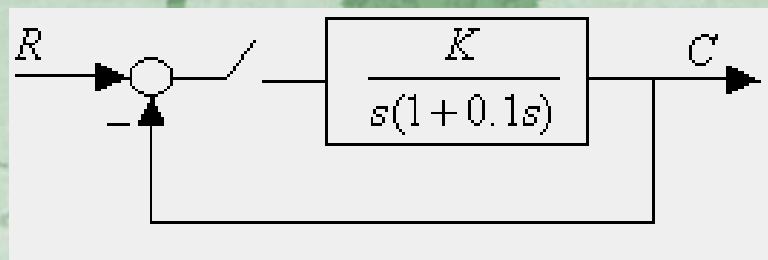
$$w^2 \quad 2 \quad 40$$

$$w^1 \quad -18$$

$$w^0 \quad 40$$

因第一列有两次符号改变，所以有两个根在 w 平面的右半平面，或者说有两个根在 z 平面的单位圆之外，系统不稳定。

例7-19 设闭环采样系统如图7-30所示，试求系统稳定时 K 的取值范围。其中采样周期 $T=0.1$ (秒)。



解
$$G(z) = \frac{0.632Kz}{z^2 - 1.368z + 0.368}$$

:

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

从特征方程 $1+G(z)=0$ 可得 $z^2 + (0.632K - 1.368)z + 0.368 = 0$

$$z = \frac{w+1}{w-1} \quad \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (0.632K - 1.368)\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 0.368 = 0$$

$$0.632Kw^2 + 1.264w + (2.736 - 0.632K) = 0$$

w^2	$0.632K$	$2.736 - 0.632K$
w^1	1.264	0
w^0	$2.736 - 0.632K$	

为保证系统稳定，从劳斯表第一列系数可以看出，必须使 $K > 0$ ，和 $2.736 - 0.632K > 0$ ，即

$K < 4.32$ 。因此系统稳定时， K 的取值范围是：

$$0 < K < 4.32$$

可以看出，当系统中没有采样器时，二阶连续系统总是稳定的。有了采样器后，由于信息损失，加大开环增益 K 会导致系统不稳定。一般来说，提高采样频率，可使采样系统的稳定性得到改善。这是因为提高采样频率，会使采样系统中信息损失减少，使其工作情况更接近于连续系统。

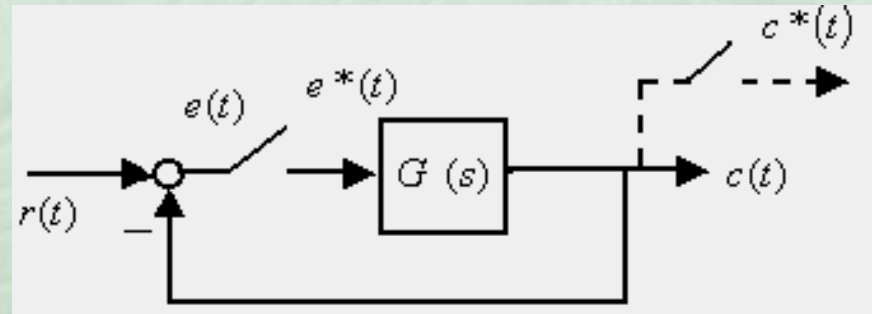
二：采样瞬时的稳态误差

在连续系统中，我们知道稳态误差的大小既与系统本身的结构、参数有关，又与输入信号有关。我们曾经介绍了建立在终值定理基础上的误差计算方法以及稳态误差与系统结构之间的关系。对于采样系统来说，可以采用类似于连续系统中的分析计算方法来求采样瞬时的稳态误差。

设系统结构如图7-31所示。其中 $G(s)$ 为连续部分传递函数， $e(t)$ 是误差信号，而 $e^*(t)$ 为采样误差信号。系统的误差脉冲传递函数为

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)}$$

$$E(z) = \frac{1}{1+G(z)} \cdot R(z)$$



若 $E(z)$ 的全部极点在 z 平面的单位圆内（或在 $z=1$ 处）。则由终值定理
$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot R(z)$$

1: 当输入信号为单位阶跃函数时的稳态误差

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+G(z)}$$

定义静态位置误差系数 $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p}$$

当中有一个以上 $z=1$ 的极点时, 有 $K_p = \infty$

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

如果我们将 $G(z)$ 中含有一个 $z=1$ 的极点的系统称为 I 型系统, 则 I 型以上系统, 在单位阶跃输入下的稳态误差为零。换言之, 单位反馈系统, 在阶跃输入下无差的条件是 $G(z)$ 中至少有一个 $z=1$ 的极点。

2: 当输入信号为单位斜坡函数时的稳态误差

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)[1+G(z)]} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)G(z)}$$

定义静态速度误差系数 $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)G(z)$

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v}$$

当G(z)中有两个以上z=1的极点时, 有 $K_v = \infty$

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v} = 0$$

所以单位反馈系统, 在斜坡输入下无差的条件是G(z)中至少要有两个z=1的极点。

3: 当输入信号为单位加速度函数时的稳态误差

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 G(z)}$$

定义静态加速度误差系数 $K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z)$

$$e(\infty) = \frac{T^2}{K_a}$$

当 $G(z)$ 中有三个以上 $z=1$ 的极点
时,

$$K_a = \infty$$

$$e(\infty) = \frac{T^2}{K_a} = 0$$

所以单位反馈系统在加速度输入下无差的条件是 $G(z)$ 中至少有三个 $z=1$ 的极点。

与连续系统对照，可以清楚地看到采样系统在典型输入下的稳态误差与 $G(z)$ 中 $z=1$ 的极点密切相关，它与连续系统 $G(s)$ 中 $s=0$ 的极点数完全对应。同样，我们把 $G(z)$ 中有 ν 个 $z=1$ 的极点的系统，称之为 ν 型系统，所以也有0型、I型、II型等等。系统型数与稳态误差的关系见表7-3。

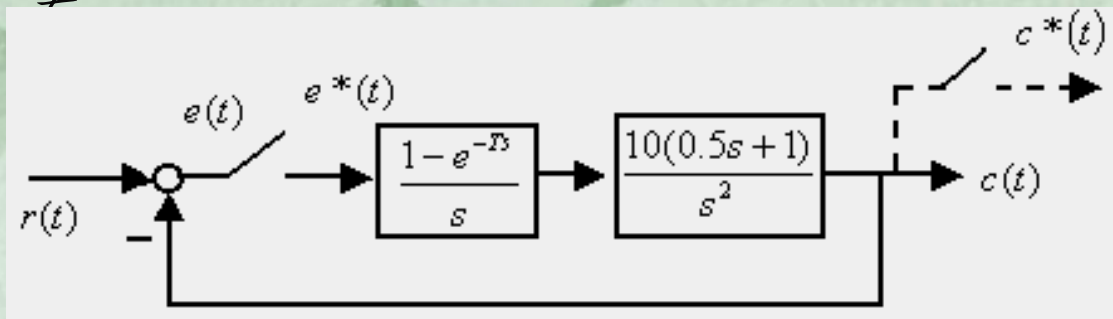
表 7-3 典型输入作用下的稳态误差

系统型别	$r(t) = 1(t)$ 时的误差 ϵ	$r(t) = t$ 时的误差 ϵ	$r(t) = \frac{1}{2}t^2$ 时的误差 ϵ
0型	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I型	0	T/K_v	∞
II型	0	0	T^2/K_a
III型	0	0	0

上面我们仅就单位反馈系统在输入作用下的稳态误差进行计算，对于非单位反馈系统，则必须明确稳态误差是指输入采样开关后面的 $e^*(t)$ ，那么上述结论同样适用。

例 7-20 已知采样系统结构如图7-32所示。采样周期 $T=0.2$ 秒，输入信号 $r(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2$ ，

试用静态误差系数法，求该系统的稳态误差



解 先求 $G(z)$ ，因有零阶保持器，故

$$: \quad G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[\frac{10(0.5s+1)}{s^3} \right] = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left[\frac{10}{s^3} + \frac{5}{s^2} \right]$$

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{5T^2 z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{5Tz}{(z-1)^2} \right]$$

$$G(z) = \frac{1.2z - 0.8}{(z-1)^2}$$

为应用终值定理，必须判别系统的特征根是否在单位圆内，特征方程

$$1 + G(z) = 0$$

$$z^2 - 0.8z + 0.2 = 0$$

进行W变换，并使用劳斯判据进行判别，可知系统是稳定的。

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1.2z - 0.8}{(z - 1)^2} = \infty$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1.2z - 0.8}{(z - 1)} = \infty$$

$$K_a = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^2 G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1.2z - 0.8) = 0.4$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p} + \frac{T}{K_v} + \frac{T^2}{K_a} = 0 + 0 + \frac{0.2^2}{0.4} = 0.1$$

三、采样系统极点分布与瞬态性能之间关系

研究采样系统的结构、参数对瞬态性能的影响，可以采用频率法、零点-极点法。这里我们仅就系统的极点分布与瞬态性能的关系进行讨论。

设系统的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_m)}{a_0 (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (z - z_i)}{\prod_{k=1}^n (z - p_k)}$$

当输入信号 $r(t) = 1(t)$ ，且 $\Phi(z)$ 无重极点时，有

$$C(z) = \Phi(z) \cdot R(z) = \frac{M(z)}{D(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$C(z) = \frac{M(1)}{D(1)} \cdot \frac{z}{z-1} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - p_k}$$

$$c(mT) = \frac{M(1)}{D(1)} + \sum_{k=1}^n c_k \cdot p_k^m$$

式中第一项为稳态分量，第二项为瞬态分量，其中 $c_k p_k^m$ 是收敛，还是发散、振荡，完全取决于极点 p_k 在 z 平面上的分布。现在我们分别进行讨论。

1: 当 $0 < p_k < 1$ 时，极点位于 z 平面单位圆内的正实轴上，响应为单调收敛，且越靠近原点，其值越小，收敛越快。如图7-33所示。

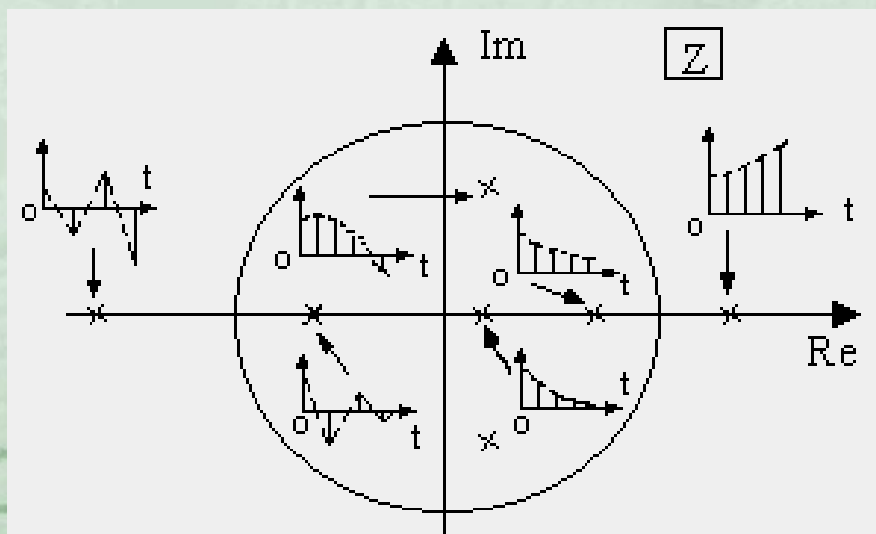
2: 当 $-1 < p_k < 0$ 时，极点位于单位圆内的负实轴上，且当 m 为偶数时， $c_k p_k^m$ 为正值，当 m 为奇数时， $c_k p_k^m$ 为负值。因此该瞬态分量为正、负交替，由于在单位圆内，所以呈现为正、负交替收敛，或称振荡收敛。

3: 当 $p_k > 1$ 或 $p_k < -1$ 时, 极点为单位圆外的实根, 且 $p_k > 1$ 为正实根, 响应为单调发散; 当 $p_k < -1$ 时, 为负实根, 响应为正、负交替发散。

4: 当 p_k 为共轭复根时, 其成对出现有 p_k, p_{k+1} 或 $p_k, p_{k+1}^* = |p_k| e^{\pm j\theta_k}$ 对应的瞬态分量为

$$Z^{-1} \left[\frac{c_k z}{z - p_k} + \frac{c_{k+1} z}{z - p_{k+1}} \right]$$

$$c_k, c_{k+1} = |c_k| \cdot e^{\pm j\phi_k}$$



$$c_k \cdot p_k^m + c_{k+1} \cdot p_{k+1}^m = |c_k| \cdot e^{j\varphi_k} \cdot |p_k|^m \cdot e^{jm\theta_k} + |c_k| \cdot e^{-j\varphi_k} \cdot |p_k|^m \cdot e^{-jm\theta_k}$$

$$= |c_k| \cdot |p_k|^m [e^{j(m\theta_k + \varphi_k)} + e^{-j(m\theta_k + \varphi_k)}] = 2|c_k| \cdot |p_k|^m \cos(m\theta_k + \varphi_k)$$

所以，共轭极点所对应的瞬态分量是以余弦规律振荡。当 $|p_k| > 1$ 时，振荡发散， $|p_k| < 1$ 时，振荡衰减，极点越靠近原点，衰减越快。振荡角频率与共轭极点的幅角 θ_k 有关， θ_k 越大，振荡频率越高。各瞬态分量可参见图7-33。

通过上面介绍，我们定性地了解了z平面内的极点位于单位圆内，则该极点所对应的瞬态分量总是衰减的；极点离原点越近，衰减越快。当极点在单位圆内正实轴上为单调衰减；在单位圆内负实轴上以角频率 π/T 进行振荡衰减；极点为共轭复数时，以角频率 θ_k/T 进行振荡衰减。

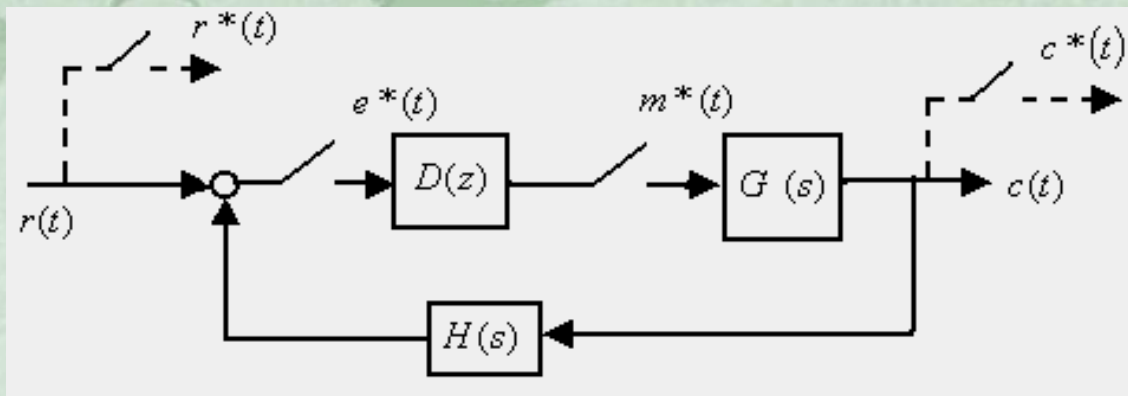
7-7 采样系统的数字校正

采样系统的设计方法主要有模拟化设计和离散化设计两种。模拟化设计方法就是把控制系统按模拟化进行分析，求出数字部分的等效连续环节，然后按连续系统理论设计校正装置，再将该校正装置数字化。而离散化设计方法则是直接在Z域中设计采样控制系统，又称直接数字设计法。

本节将主要介绍直接数字设计法，研究数字控制器的脉冲传递函数，最少拍控制系统的设计等问题。

一、 数字控制器的脉冲传递函数

设离散控制系统如图7-34所示。其中， $D(z)$ 为数字控制器的脉冲传递函数， $G(s)$ 为保持器与被控对象的传递函数， $H(s)$ 为反馈通道传递函数。



假设 $H(s)=1$ ， $G(s)$ 的Z变换为 $G(z)$ ，可以求出系统的闭环脉冲传递函数为：
$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{C(z)}{R(z)}$$

以及误差脉冲传递函数为：

$$\Phi_e(z) = \frac{1}{1 + D(z)G(z)} = \frac{E(z)}{R(z)}$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)[1 - \Phi(z)]}$$

$$D(z) = \frac{1 - \Phi_e(z)}{G(z)\Phi_e(z)}$$

离散系统的数字校正问题就是：根据对离散系统性能指标的要求，确定闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或误差脉冲传递函数 $\Phi_e(z)$ ，然后利用上式确定数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ ，并且加以实现。

二、最少拍系统设计

在采样过程中，通常称一个采样周期为一拍。所谓最少拍系统是指在典型输入作用下，能够以有限拍结束响应过程，且在采样时刻上无稳态误差的离散系统。

最少拍系统的设计，是针对典型输入作用进行的。常见的典型输入有：单位阶跃函数、单位速度函数、单位加速度函数，等等。它们的Z变换分别为：

$$Z[1(t)] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Z[t] = \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$Z\left[\frac{1}{2}t^2\right] = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} = \frac{\frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

这些典型输入的Z变换具有以下一般形式：
$$R(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

其中， $A(z)$ 是不含 $(1-z^{-1})$ 因子的 z^{-1} 多项式。例如：当 $r(t)=1(t)$ 时，则有 $m=1$ ， $A(z)=1$ ；当 $r(t)=t$ 时有 $m=2$ ， $A(z)=T z^{-1}$ ；当 $r(t)=t^2/2$ 时有 $m=3$ ， $A(z)=T^2 [(z^{-1})^2+z^{-1}]/2$ 。

最少拍系统的设计原则是：若系统的广义被控对象 $G(z)$ 无时延且在Z平面单位圆上及单位圆外无零极点，要求选择闭环脉冲传递函数 $\phi(z)$ ，使系统在典型输入作用下，经最少采样周期后能使输出序列在各采样时刻的稳态误差为零，达到完全跟踪的目的，从而确定所需要的数字控制器的脉冲传递函数 $D(z)$ 。

根据这一设计原则，需要求出稳态误差 $e(\infty)$ 的表达式。由于误差信号 $e(t)$ 的Z变换为：

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = \frac{\Phi_e(z)A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)z^{-n} = e(0) + e(T)z^{-1} + e(2T)z^{-2} + \dots$$

最少拍系统要求上式自某个 k 开始，当 $k \geq n$ 时，有 $e(kT) = e[(k+1)T] = \dots = 0$ ，此时系统的动态过程在 $t = kT$ 时结束，其调节时间 $t_s = kT$ 。

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \cdot z \cdot \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \Phi_e(z)$$

上式表明，使 $e(\infty)$ 为零的条件是 $\Phi_e(z)$ 中包含有 $(1-z^{-1})^m$ 的因子，即 $\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^m F(z)$

式中， $F(z)$ 为不含 $(1-z^{-1})$ 因子的多项式。为了使求出的 $D(z)$ 简单，阶数最低，可取 $F(z)=1$ 。可以证明，取 $F(z)=1$ 的意义是使 $\Phi(z)$ 的全部极点均位于 Z 平面的原点。

下面讨论最少拍系统在不同典型输入作用下，数字控制器 $D(z)$ 脉冲传递函数的确定方法。

(1)， 单位阶跃输入

由于 $r(t)=1(t)$ 时，有 $m=1$ ， $A(z)=1$

$$\Phi_e(z) = 1 - z^{-1} \quad \Phi(z) = z^{-1}$$

$$D(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})G(z)}$$

$$E(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) = 1$$

上式表明： $e(0)=1$ ， $e(T)=e(2T)=\dots=0$ 。可见，最少拍系统经过一拍便可以完全跟踪输入 $r(t)=1(t)$ ，其调节时间 $t_s=T$ 。单位斜坡输入

由于 $r(t)=t$ 时，有 $m=2$ ， $A(z)=Tz^{-1}$ ，故

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^m F(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{z^{-1}(2 - z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2 G(z)}$$

$$E(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^m} \Phi_e(z) = Tz^{-1}$$

上式表明： $e(0)=0$ ， $e(T)=T$ ， $e(2T)=e(3T)=\dots=0$ 。可见，最少拍系统经过二拍便可以完全跟踪输入 $r(t)=t$ ，其调节时间 $t_s=2T$ 。

(3), 单位加速度输入

由于 $r(t) = t^2/2$ 时, 有 $m=3$, $A(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1}(1+z^{-1})$

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^3 F(z) = (1-z^{-1})^3$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

$$D(z) = \frac{z^{-1}(3-3z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^3 G(z)}$$

$$E(z) = \frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \Phi_e(z) = A(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1} + \frac{1}{2}T^2 z^{-2}$$

于是有: $e(0)=0$, $e(T)=T^2/2$, $e(2T)=T^2/2$, $e(3T)=e(4T)=\dots=0$

可见, 最少拍系统经过三拍便可完全跟踪输入

$r(t) = t^2/2$, 其调节时间 $t_s = 3T$ 。

例 7-21 设单位反馈线性定常离散系统的连续部分和零阶保持器的传递函数分别为

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)} \quad G_h(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

其中采样周期为 $T=1$ (s)。若要求系统在单位斜坡输入时实现最少拍控制，试求出数字控制器脉冲传递函数 $D(z)$ 。

解 系统的开环传递函数 $G(s) = G_p(s)G_h(s) = \frac{10(1-e^{-sT})}{s^2(s+1)}$

$$G(z) = 10(1-z^{-1}) \left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \right] = \frac{3.68z^{-1}(1+0.717z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

最少拍系统应具有闭环脉冲传递函数和误差脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = 2z^{-1}(1-0.5z^{-1}) \quad \Phi_e(z) = (1-z^{-1})^2$$

$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.543(1-0.368z^{-1})(1-0.5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.707z^{-1})}$$

三、数字控制器的实现

在最少拍系统设计中，如果 $G(z)$ 含有时间延迟因子 z^{-1} 及单位圆上和单位圆外的零极点，必须对 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 的选择加以限制，否则将造成 $D(z)$ 实现上的困难。

由于图7-34所示的采样控制系统具有以下关系

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = D(z)G(z)\Phi_e(z)$$

为了保证闭环系统稳定， $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 不应该含有单位圆上或单位圆外的极点。这时，如果用 $D(z)$ 的零点去补偿 $G(z)$ 在单位圆上或单位圆外的极点，则会由于不可避免的参数波动，形成不完全补偿；也不能用 $D(z)$ 的极点去补偿 $G(z)$ 在单位圆上或单位圆外的零点，否则可能导致数字控制器的不稳定，当用算法软件去实现 $D(z)$ 时，就会形成算法发散而失效。对于 $G(z)$ 中所包含的延迟因子 z^{-1} ，也不允许用 $D(z)$ 来对消，因为这将要求作为数字控制器的计算机有超前输出，这在物理上是无法实现的。因此， $G(z)$ 所含有的延迟因子 z^{-1} 和单位圆上及单位圆外的零极点，必须由 $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 的零点去补偿。

为了使求出的 $D(z)$ 是物理可实现的，在最少拍设计中， $\Phi(z)$ 和 $\Phi_e(z)$ 的选择应遵循以下原则：

(1) $D(z)$ 在物理上应是可实现的有理多项式，而且零点的数目不能大于极点的数目；

(2) $\Phi_e(z)$ 应把 $G(z)$ 在单位圆上及单位圆外的极点作为自己的零点；

(3) $\Phi(z)$ 应把 $G(z)$ 在单位圆上及单位圆外的零点作为自己的零点，当 $G(z)$ 中含有 z^{-1} 因子时，要求 $\Phi(z)$ 也含有 z^{-1} 的因子；

(4) 由于 $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$ 应为 z^{-1} 的多项式，且其应与 $G(z)$ 中分子 z^{-1} 因子的方次相等，所以 $\Phi_e(z)$ 还应成为包含常数项等于1的 z^{-1} 的多项式；

根据上述原则，当 $G(z)$ 含有单位圆上及单位圆外的零极点以及延迟因子 z^{-1} 时，选择 $\Phi_e(z)$ 时，不能再取 $F(z)=1$ ，而应使 $F(z)$ 的零点能够补偿 $G(z)$ 在单位圆上及单位圆外的极点。此时，系统的调节时间要延长，从而变成准最少拍系统。

在数字控制系统中，数字控制器 $D(z)$ 又称为数字补偿器或数字滤波器，可以用计算机程序来实现 $D(z)$ 所描述的数字校正规律。

设数字控制器的脉冲传递函数有如下一般形式

$$D(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}) E_2(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}) E_1(z)$$

对上式取Z反变换，并经过整理得

$$e_2(kT) = \sum_{i=0}^n b_i e_1[(k-i)T] - \sum_{i=1}^n a_i e_2[(k-i)T]$$

可见，若实现其描述的校正规律，除了需要现在采样时刻信息 $e_1(kT)$ 外，还需要从存储单元调用过去采样时刻的信息，如

$$\sum_{i=1}^n b_i e_1[(k-i)T] - \sum_{i=1}^n a_i e_2[(k-i)T]$$

因此，在每一个采样时刻上出现的输入 e_1 及计算结果 e_2 都要送入存储单元，以便用于下一个采样时刻的计算。

例 7-22 试写出例7-21中数字控制器脉冲传递函数 $D(z)$ 的实现程序。

解
$$D(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)\Phi_e(z)} = \frac{0.543(1-0.368z^{-1})(1-0.5z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.707z^{-1})}$$

:

$$E_2(z) = 0.543E_1(z) - 0.471E_1(z) + 0.0999z^{-2}E_1(z) + 0.282z^{-1}E_2(z) + 0.717z^{-2}E_2(z)$$

$$e_2(kT) = 0.543 \cdot e_1(kT) - 0.471 \cdot e_1[(k-1)T] + 0.0999 \cdot e_1[(k-2)T] + 0.282e_2[(k-1)T] + 0.717e_2[(k-2)T],$$

上式就是例7-21中 $D(z)$ 的程序实现。

小 结

本章介绍了采样系统的一些基本原理及分析方法，为读者进一步学习有关方面内容奠定一个必要的基础。

1. 1: 与连续系统一样，采样系统所要研究的问题也是系统的控制性能。只是基于采样系统含有离散信号，因此所采用的数学工具及研究方法与连续系统有所不同。

2. 2: 采样系统的数学模型是差分方程及脉冲传递函数。而在系统分析中，应用更为广泛的是基于Z变换原理的脉冲传递函数。因为应用脉冲传递函数在Z域中分析，避免了求解高阶差分方程的麻烦。

3. 3: 由于Z变换只能反映采样点上的信息，不能描述采样间隔中的状态，因此用Z变换分析系统，当周期T很小时，才能使 $c(t)$ 与 $c^*(t)$ 基本接近，否则会带来较大的误差。所以香农采样定理只是一个低限，实际应用中，采样角频率 ω_s 比 ω_{\max} 大得多。

4: 当系统连续部分传递函数不满足分母比分子阶次高两阶以上，即不满足条件

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) = 0$$

且采样信号后面没有零阶保持器时，用Z变换法分析系统所得到的 $c^*(t)$ 来代替 $c(t)$ ，会得出错误的结果。这是用Z变换法分析系统的局限性。

5: 由s域到z域的映射, 可得到z域中的稳定条件; 而由z域到w域的映射, 则可直接应用连续系统中所有的判别稳定性的方法。此外, 在w域中, 连续系统中的频率法, 稳定裕度及关于Bode图的校正方法均可以直接应用。

6: 对采样控制系统可以直接在z域中进行设计(直接数字设计)。其中最少拍系统可以使系统输出在有限的若干拍内实现对输入的完全跟踪。