

第五章控制系统的频域分析

由于求解高阶系统时域响应十分困难，时域分析法主要适用于低阶系统的性能分析，在高阶系统的性能分析中，应用时域分析法较为困难。

频域分析法主要适用于线性定常系统，是分析和设计控制系统的一种实用的工程方法，应用十分广泛。它克服了求解高阶系统时域响应十分困难的缺点，可以根据系统的开环频率特性去判断闭环系统的稳定性，分析系统参数对系统性能的影响，在控制系统的校正设计中应用尤为广泛。

频率特性是频域分析法分析和设计控制系统时所用的数学模型，它既可以根据系统的工作原理，应用机理分析法建

立起来，应用机理分析法建立起来，也可以由系统的其它数学模型（传递函数、微分方程等）方便地转换过来，或用实验法来确定。

本章介绍频率特性的基本概念、典型环节和系统的开环频率特性、乃奎斯特稳定判据和系统的相对稳定性、由系统开环频率特性求闭环频率特性的方法、系统性能的频域分析方法以及频率特性的实验确定方法。

5-1 频率特性及其与时域响应的关系

1: 频率特性的基本概念

在上几章，讨论了阶跃、斜坡、抛物线以及脉冲等函数的输入信号对控制系统的作用。现在考虑另一种重要函数——正弦函数作为输入信号对系统的作用。

例如对于图5-1所示的典型一阶系统，系统的闭环传递函数

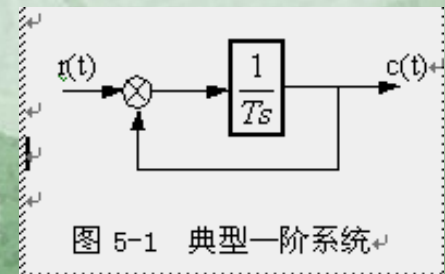
为：

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

若输入为一正弦信号，即： $r(t) = R_0 \sin \omega t$ ，则：

$$c(t) = \frac{R_0 \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{R_0}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin[\omega t - \arctg(\omega T)]$$

经拉氏反变换，得： $C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{R_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$



$$c(t) = \frac{R_0 \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{R_0}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin[\omega t - \arctg(\omega T)]$$

系统的输出 $c(t)$ 由两项组成，第一项为瞬态分量，其值随着时间的增长而趋于零，第二项为稳态分量，它是一个频率为 ω 的正弦信号。当时间 t 趋于无穷时，稳态分量即为系统的稳态输出，说明在正弦信号作用下系统的稳态输出为一个频率为 ω 的正弦信号。

定理5-1

对于一个稳定的线性定常系统，在其输入端施加一个正弦信号时，当动态过程结束后，在其输出端必然得到一个与输入信号同频率的正弦信号，其幅值和初始相位为输入信号频率的函数。

[定理5-1]证明

对于图5-2所示一般线性定常系统，可列出描述输出量 $c(t)$ 和输入量 $r(t)$ 关系的微分方程：

$$\begin{aligned} & \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t) \end{aligned}$$

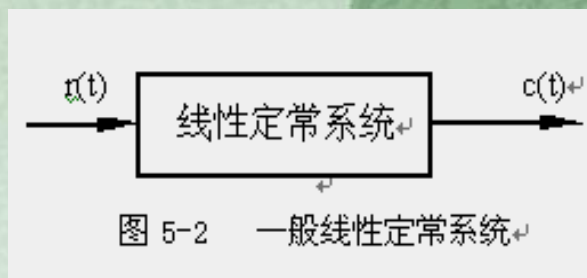
与其对应的传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

如果在系统输入端加一个正弦信号，
即：

$$r(t) = R_0 \sin \omega t$$

式中， R_0 是幅值， ω 是频率。



由于:
$$R(s) = \frac{R_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

所以:
$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{s - s_i} + \frac{B}{s + j\omega} + \frac{D}{s - j\omega}$$

其中 s_i 为系统的闭环极点, C_i 、 B 、 D 为常数, 对式 (5-5) 进行拉氏反变换, 可求得系统的输出, 其稳态分量为:

$$C_S(t) = B e^{-j\omega t} + D e^{j\omega t}$$

其中:

$$B = \Phi(s)R(s)(s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = \Phi(-j\omega)R_0 \frac{1}{-2j} = \frac{1}{2} |\Phi(j\omega)| R_0 e^{-j[\angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2}]}$$

$$D = \frac{1}{2} |\Phi(j\omega)| R_0 e^{j[\angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2}]}$$

故稳态分量为:

$$\begin{aligned} C_S(t) &= |\Phi(j\omega)| R_0 \frac{1}{2} \left[e^{j(\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2})} + e^{-j(\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2})} \right] \\ &= |\Phi(j\omega)| R_0 \cos\left[\omega t + \angle\Phi(j\omega) - \frac{\pi}{2}\right] \\ &= |\Phi(j\omega)| R_0 \sin[\omega t + \angle\Phi(j\omega)] \end{aligned}$$

对于稳定的系统,瞬态分量随着时间的增长而趋于零,稳态分量 $C_S(t)$ 即为系统的稳态响应.

可见在正弦信号作用下,系统的稳态输出也是同频率的正弦信号.

定理5-1证毕.

由于一个稳定的线性定常系统，在其输入端施加一个正弦信号时，当动态过程结束后，在其输出端必然得到一个与输入信号同频率的正弦信号。

可以定义该正弦信号的幅值与输入信号的幅值之比为幅频特性 $A(\omega)$ ，相位之差为相频特性 $\phi(\omega)$ ，则有：

$$A(\omega) = |\Phi(j\omega)|$$

$$\phi(\omega) = \angle \Phi(j\omega)$$

频率特性是指系统的幅频特性和相频特性，通常用复数来表示，即：

$$A(\omega) e^{j\phi(\omega)} = \Phi(j\omega) = \Phi(s) \Big|_{s=j\omega}$$

显然，只要在传递函数中令 $s=j\omega$ 即可得到频率特性。可以证明，稳定系统的频率特性等于输出量富氏变换与输入量富氏变换之比。

对于不稳定的线性定常系统，在正弦信号作用下，其输出信号的瞬态分量不可能消逝，瞬态分量和稳态分量始终存在，系统的稳态分量是无法观察到的，但稳态分量是与输入信号同频率的正弦信号，可定义该正弦信号的幅值与输入信号的幅值之比为幅频特性 $A(\omega)$ ，相位之差为相频特性 $\phi(\omega)$ 。据此可定义出不稳定线性定常系统的频率特性。

2:三种数学模型之间的关系

频率特性和传递函数、微分方程一样，也是系统的数学模型。三种数学模型之间的关系如图5-3所示。

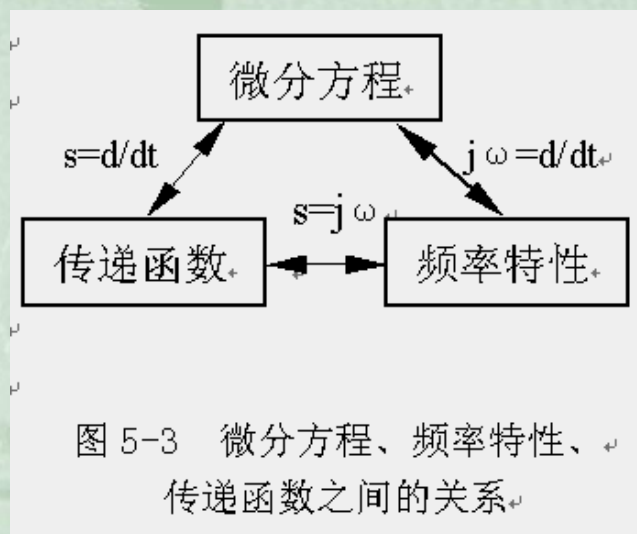


图 5-3 微分方程、频率特性、传递函数之间的关系

例5-1

单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

若输入信号 $r(t) = 2\sin 2t$ ，试求系统的稳态输出和稳态误差。

[例5-1]解:

在正弦信号作用下,稳定的线性定常系统的稳态输出和稳态误差也是正弦信号,本题可以利用频率特性的概念来求解。

控制系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

对应的频率特性为

$$\Phi(j\omega) = \frac{4}{4 - \omega^2 + j2\omega}$$

由于输入正弦信号的频率为 $\omega = 2 \text{ sec}^{-1}$, 可以算得:

$$\Phi(j2) = -j = 1 \cdot e^{-j90^\circ}$$

即: $A(2) = 1$, $\phi(2) = -90^\circ$, 因此稳态输出为 $C_S(t) = 2 \cdot A(2) \sin(2t + \phi(2)) = 2 \sin(2t - 90^\circ)$ 。

在计算稳态误差时，可把误差作为系统的输出量，利用误差传递函数来计算，即：

$$\Phi_e(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 4}$$

$$\Phi_e(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\omega}{4 - \omega^2 + j2\omega}$$

$$\Phi_e(j2) = \frac{-4 + j4}{j4} = \sqrt{2} e^{j45^\circ}$$

因此稳态误差为：

$$e_s(t) = 2\sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ)$$

例5-1解毕

从例5-1可以看出，在正弦信号作用下求系统的稳态输出和稳态误差时，由于正弦信号的象函数 $R(s)$ 的极点位于虚轴上，不符合拉氏变换终值定理的应用条件，不能利用拉氏变换的终值定理来求解，但运用频率特性的概念来求解却非常方便，需要注意的是，此时的系统应当是稳定的。

3: 频率特性的几何表示法

在工程分析和设计中，通常把频率特性画成一些曲线，从频率特性曲线出发进行研究。这些曲线包括幅频特性和相频特性曲线，幅相频率特性曲线，对数频率特性曲线以及对数幅相曲线等。

幅频特性和相频特性曲线是指在直角坐标系中分别画出幅频特性和相频特性随频率 ω 变化的曲线，其中横坐标表示频率 ω ，纵坐标分别表示幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\phi(\omega)$ 。

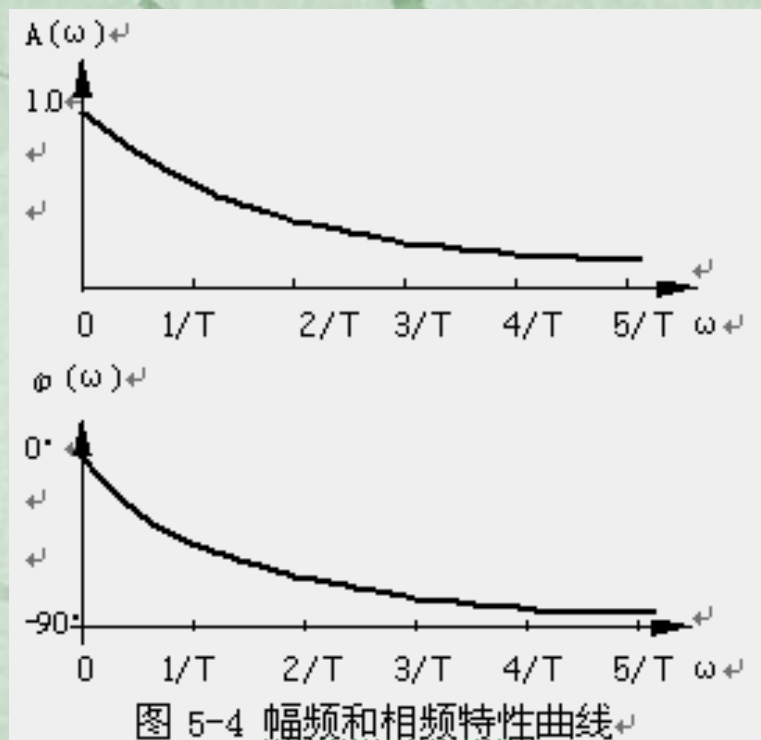
例如设：
$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$A(\omega) = 1/\sqrt{1+(\omega T)^2} \quad \phi(\omega) = -\arctg \omega T$$

表5-1

ω	0	$1/(2T)$	$1/T$	$2/T$	$3/T$	$4/T$	$5/T$	∞
$A(\omega)$	1	0.89	0.71	0.45	0.32	0.24	0.20	0
$\phi(\omega)$	0°	-26.6°	-45°	-63.5°	-71.5°	-76°	-78.7°	-90°

图5-4是根据表5-1绘制的幅频和相频特性曲线。



幅相频率特性曲线简称幅相曲线，是频率响应法中常用的一种曲线。其特点是把频率 ω 看作参变量，将频率特性的幅频特性和相频特性同时表示在复数平面上，例如按表5-1所示频率特性数据，可画出幅相曲线如图5-5所示，

图中实轴正方向为相角的零度线，逆时针转过的角度为正角度，顺时针转过的角度为负角度。对于某一频率 ω ，必有一个幅频特性的幅值和一个相频特性的相角与之对应，此幅值和相角在复数平面上代表一个向量。当频率 ω 从零到无穷大变化时，相应向量的矢端就绘出一条曲线。这条曲线就叫做幅相曲线。

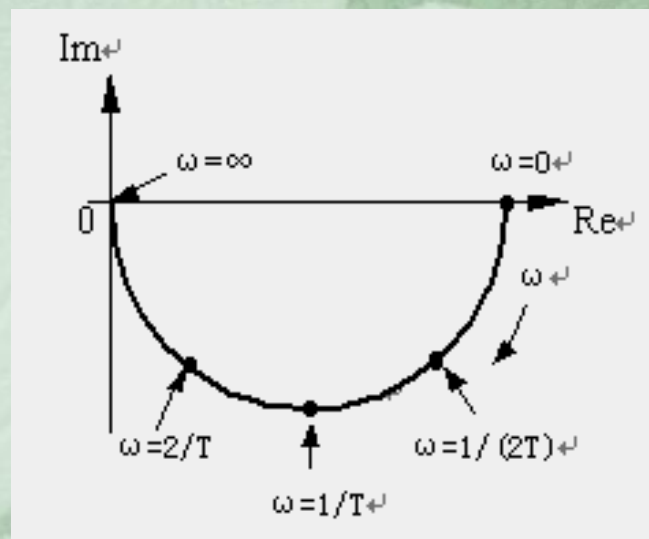


图 5-5 $\Phi(j\omega)=1/(1+j\omega T)$ 幅相曲线

幅相曲线中常用箭头方向代表 ω 增加时，幅相曲线改变的方向。鉴于幅频特性是 ω 的偶函数，相频特性是 ω 的奇函数，一旦画出了 ω 从零到无穷大时的幅相曲线，则 ω 从零到负无穷大时的幅相曲线，根据对称于实轴的原理立即可得。因此，一般只需研究 ω 从零到无穷大时的幅相曲线，这种画有幅相曲线的图形称为极坐标图。

对数频率特性曲线又称伯德曲线，包括对数幅频和对数相频两条曲线，是频率响应法中广泛使用的一组曲线。这两条曲线连同它们的坐标组成了对数坐标图或称伯德图。

对数频率特性曲线的横坐标表示频率 ω ，并按对数分度，单位是[弧度/秒]。所谓对数分度，是指横坐标以 $\lg \omega$ 进行均匀分度，即横坐标对 $\lg \omega$ 来讲是均匀的，对 ω 而言却是不均匀的，如图5-6所示。从图中可以看出，频率 ω 每变化十倍（称为一个十倍频程），横坐标的间隔距离为一个单位长度。横坐标以 ω 标出，一般情况下，不应标出 $\omega=0$ 的点（因为此时 $\lg \omega$ 不存在）。若 ω_2 位于 ω_1 和 ω_3 的几何中点，此时应有 $\lg \omega_2 - \lg \omega_1 = \lg \omega_3 - \lg \omega_2$ ，即 $\omega_2^2 = \omega_1 \omega_3$ ，例如 $\omega=1$ 和 $\omega=10$ 两点的几何中点为 $\omega=3.162$ 。

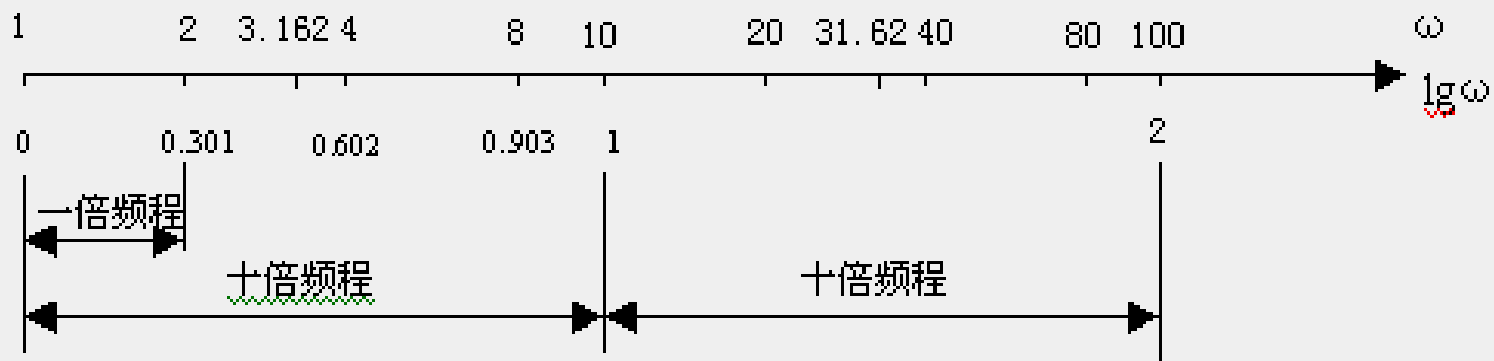


图 5-6 对数分度示意图

对数幅频特性曲线的纵坐标表示对数幅频特性的数值，均匀分度，单位是[分贝]，记作db，对数幅频特性定义为 $L(\omega)=20\lg A(\omega)$ ；对数相频特性曲线的纵坐标表示相频特性的数值，均匀分度，单位是[度]。

图5-7是 $\Phi(j\omega)=1/(1+j\omega T)$ 的对数幅频和对数相频曲线。

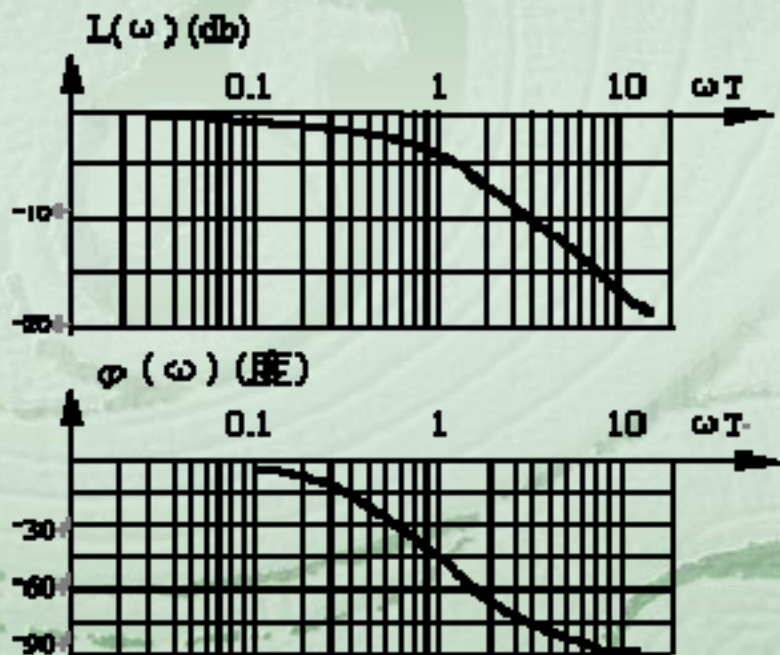


图 5-7 $1/(1+j\omega T)$ 的对数幅频特性和对数相频特性曲线

频率响应法中见到的另一种曲线是对数幅相曲线(又称尼可尔斯曲线),对应的曲线图称为对数幅相图(又称尼可尔斯图)。

对数幅相图的特点是以 ω 为参变量,横坐标和纵坐标都均匀分度,横坐标表示对数相频特性的角度,纵坐标表示对数幅频特性的分贝数,图5-8是 $1/(1+j\omega T)$ 的对数幅相曲线。

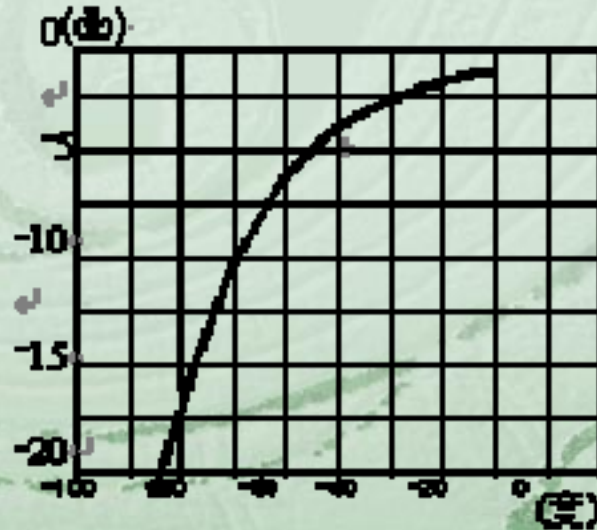


图 5-8 $1/(1+j\omega T)$ 的对数幅相曲线

4: 频率特性与时域响应的关系

系统的频率特性与时域响应之间存在一定的关系, 这种关系是频域分析和设计方法的依据。

设线性定常系统的输入和输出均满足狄里赫利条件, 并且绝对可积, 则可求得其富里叶变换:

$$R(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt \quad C(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t)e^{-j\omega t} dt$$

根据频率特性的定义, 若系统的频率特性为 $\Phi(j\omega)$, 有: $C(j\omega) = \Phi(j\omega)R(j\omega)$

富里叶反变换, 即可求得系统的时域响应。

例如系统的单位脉冲响应为: $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega)e^{-j\omega t} dt$

一般情况下, 当输入信号为 $r(t)$ 时, 系统的响应可用卷积积分求得: $h(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau$

5-2 典型环节的频率特性

通常线性定常系统的开环传递函数可看作是由一些典型环节串联而成，这些典型环节包括：

- 比例环节K； 惯性环节 $1/(1+Ts)$ ， $T>0$ ；
一阶微分环节 $1+Ts$ ， $T>0$ ； 积分环节 $1/s$ ；
微分环节 s ； 振荡环节 $1/(s^2/\omega_n^2+2\xi s/\omega_n+1)$ ， $\omega_n>0$ ， $0<\xi<1$
以及二阶微分环节 $s^2/\omega_n^2+2\xi s/\omega_n+1$ ， $\omega_n>0$ ， $0<\xi<1$ 。

在系统的开环传递函数中，还可能出现 $(Ts-1)$ 、 $(s^2/\omega_n^2-2\xi s/\omega_n+1)$ 以及 $1/(Ts-1)$ 、 $1/(s^2/\omega_n^2-2\xi s/\omega_n+1)$ 等，习惯上，把这些环节称为不稳定环节，即

不稳定惯性环节 $1/(Ts-1)$ ，

不稳定振荡环节 $1/(s^2/\omega_n^2 - 2\xi s/\omega_n + 1)$ ，

不稳定一阶微分环节 $(Ts-1)$ ，

不稳定二阶微分环节 $(s^2/\omega_n^2 - 2\xi s/\omega_n + 1)$ ，

另外，系统中还可能出现延迟环节 $e^{-\tau S}$ 。

本节着重研究这些典型环节的幅相曲线和对数频率特性曲线的绘制方法及其特点。

比例环节

比例环节的传递函数为常数

$$G(s) = K$$

其频率特性为：

$$G(j\omega) = K$$

比例环节的幅频特性和相频特性的表达式为：
$$\begin{cases} A(\omega) = K \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

相应的对数幅频特性和相频特性为：

$$\begin{cases} L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

比例环节的幅相曲线和对数频率特性曲线如图 5-9 所示。

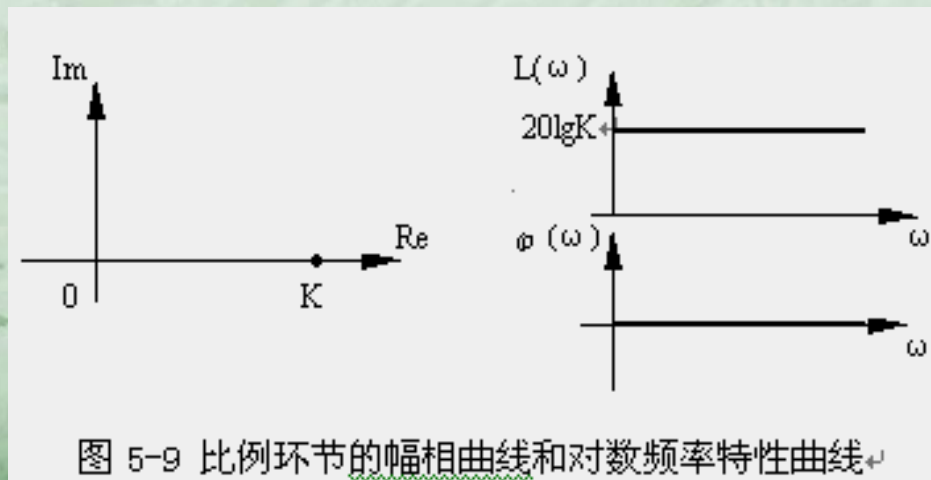


图 5-9 比例环节的幅相曲线和对数频率特性曲线

惯性环节

惯性环节的传递函数为 $1/(1+Ts)$ ，其频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} e^{-j\arctg(\omega T)}$$

惯性环节的幅频特性和相频特性的表达式为：

$$\begin{cases} A(\omega) = 1/\sqrt{1+(\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T) \end{cases}$$

在绘制幅相曲线时，注意到图5-10中向量 $1+j\omega T$ 在 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，其幅值由1变化到 ∞ ，而相角由 0° 变化到 90° ，说明惯性环节 $1/(1+j\omega T)$ 的幅值由1变化到0，相角由 0° 变化到 -90° ，

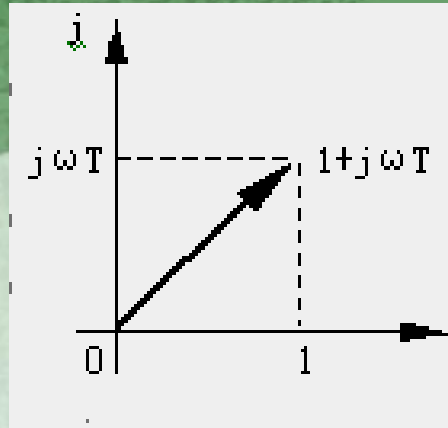


图 5-10 $1+j\omega T$ 向量图

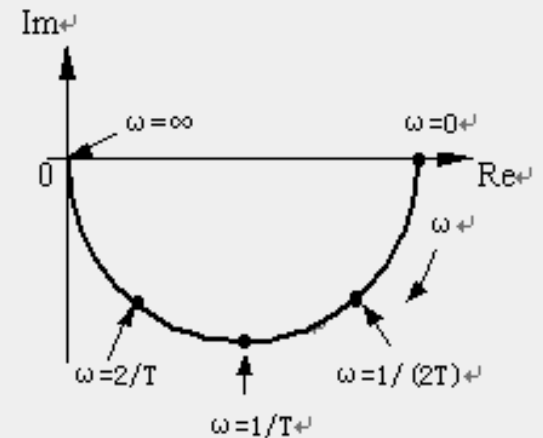


图 5-5 $\Phi(j\omega)=1/(1+j\omega T)$ 幅相曲线

据此可以画出惯性环节幅相曲线的大致形状。通过逐点计算，可以画出惯性环节幅相曲线的精确曲线，惯性环节的幅相曲线如图5-5所示。可以证明，惯性环节的幅相曲线为半圆。

惯性环节的对数幅频特性和相频特性为：

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T) \end{cases}$$

可以通过计算若干点的数值来绘制惯性环节的对数幅频特性和相频特性的精确曲线，如图5-11所示。

工程上，此环节的对数幅频特性可以采用渐近线来表示。

定义 $\omega_1 = 1/T$ 为交接频率，渐近线表示如下：

$$L(\omega) = 0 \quad \omega \ll \omega_1 \text{ 时,}$$

$$L(\omega) = -20 \lg(\omega T) = -20 \lg \omega + 20 \lg \omega_1$$

$$\omega \gg \omega_1 \text{ 时,}$$

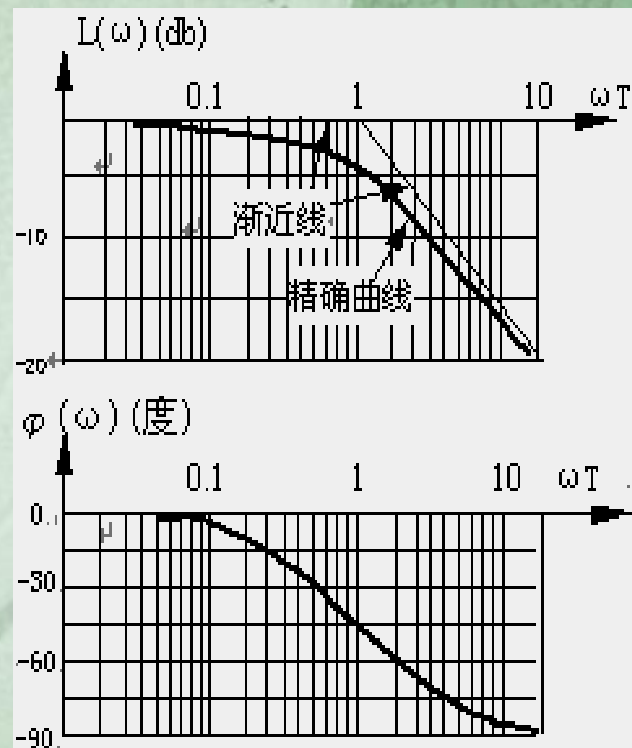


图 5-11 惯性环节的对数幅频特性和对数相频特性曲线

从渐近线的表达式可以看出，在 $\omega \ll \omega_1$ 时，对数幅频特性为一条0db的水平线；在 $\omega \gg \omega_1$ 时， $L(\omega)$ 与 $\lg \omega$ 成线性关系，由于在伯德图中，横坐标是以 $\lg \omega$ 线性分度的，故为一条斜率为 $-20\text{db}/(\text{十倍频程})$ （记为 $-20\text{db}/\text{dec}$ ）的直线（即 ω 每增加十倍，对数幅频特性下降20db）。

为方便起见，在 $\omega < \omega_1$ 的区段，惯性环节对数幅频特性曲线的渐近线（或称近似曲线）取为0db的水平线；在 $\omega > \omega_1$ 的区段，惯性环节对数幅频特性曲线的渐近线取为一条斜率为 $-20\text{db}/\text{dec}$ 的直线，两段渐近线在交接频率 ω_1 处相交，如图5-11所示。

对数幅频特性曲线渐近线与准确曲线之间存在误差，若规定误差 $\Delta L(\omega)$ 为准确值减去近似值，可得到 $\Delta L(\omega)$ 的表达式如下：

$$\Delta L(\omega) = \begin{cases} -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} & \omega < \omega_1 \text{ 时} \\ -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} + 20 \lg \omega T & \omega > \omega_1 \text{ 时} \end{cases}$$

由此可制作出误差曲线，必要时可利用误差公式或误差曲线来进行修正，最大的误差发生在交接频率 ω_1 处，其值为 -3db 。

对数相频特性曲线的绘制没有类似的简化方法。只能给出若干个 ω 值，逐点求出相应的 $\phi(\omega)$ 值，然后用平滑曲线连接。有时，也可以采用预先制好的模板绘制。对数相频特性曲线如图5-11所示。

交接频率 ω_1 也称为惯性环节的特征点，此时 $A(\omega_1)=0.707$ ， $L(\omega_1)=-3\text{db}$ ， $\phi(\omega_1)=-45^\circ$ 。

一阶微分环节

一阶微分环节的传递函数为 $1+Ts$,

其频率特性为:

$$G(j\omega) = 1 + j\omega T = \sqrt{1 + (\omega T)^2} e^{j \arctg(\omega T)}$$

注意到向量 $1+j\omega T$ 在 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 其幅值由1变化到 ∞ , 而相角由 0° 变化到 90° , 其实部始终为1, 一阶微分环节的幅相曲线如图5-12所示。

一阶微分环节的幅频特性和相频特性的表达式为:

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(\omega T) \end{cases}$$

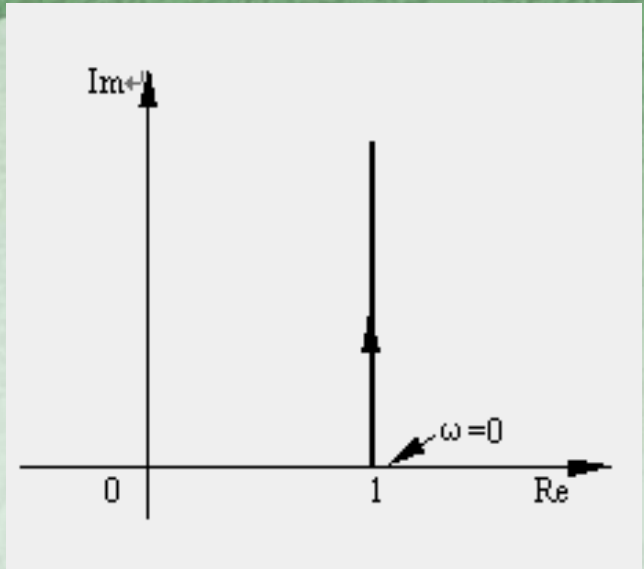


图 5-12 一阶微分环节幅相曲线

一阶微分环节的对数幅频特性和相频特性为：

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2} \\ \varphi(\omega) = \arctg(\omega T) \end{cases}$$

可以采用计算若干点的数值来绘制一阶微分环节的对数幅频特性和相频特性曲线。

工程上，此环节的对数幅频特性可以采用渐近线来表示。定义 $\omega_1=1/T$ 为交接频率，渐近线表示如下：

$$L(\omega) = 0 \quad \omega \ll \omega_1 \text{ 时,}$$

$$L(\omega) = 20 \lg(\omega T) = 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_1 \quad \omega \gg \omega_1 \text{ 时,}$$

从渐近线的表达式可以看出，在 $\omega \ll \omega_1$ 部分渐近线为一条0db的水平线，在 $\omega \gg \omega_1$ 部分渐近线为一条斜率为+20db/dec的直线，两段渐近线在交接频率 ω_1 处相交，如图5-13所示。

对数幅频特性曲线渐近线与准确曲线之间存在误差，必要时应进行修正，最大的误差发生在交接频率 ω_1 处，其值为3 db。

交接频率 ω_1 也称为一阶微分环节的特征点，此时 $A(\omega_1)=1.414$ ， $L(\omega_1)=3$ db， $\phi(\omega_1)=45^\circ$ 。

比较惯性环节和一阶微分环节可以发现，它们的传递函数互为倒数，而它们的对数幅频特性和相频特性则对称于横轴，这是一个普遍规律，即传递函数互为倒数时，对数幅频特性和相频特性对称于横轴。

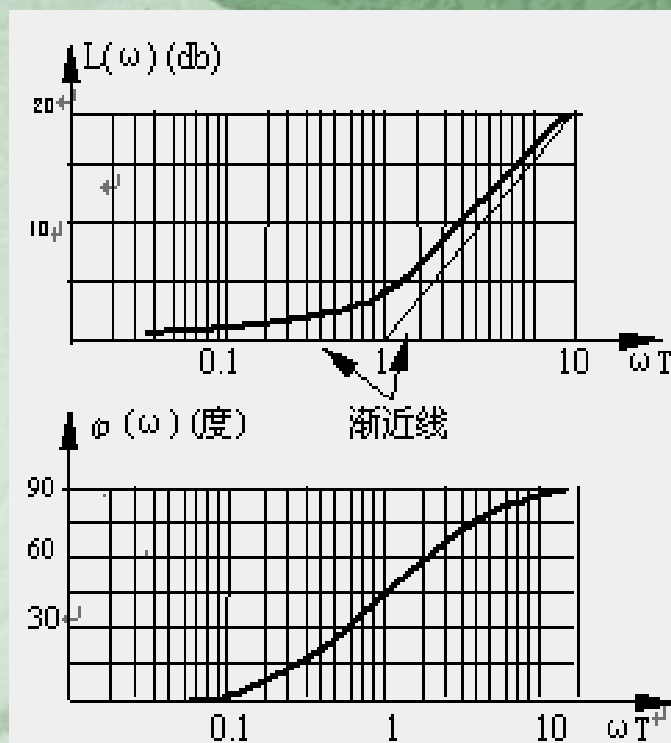


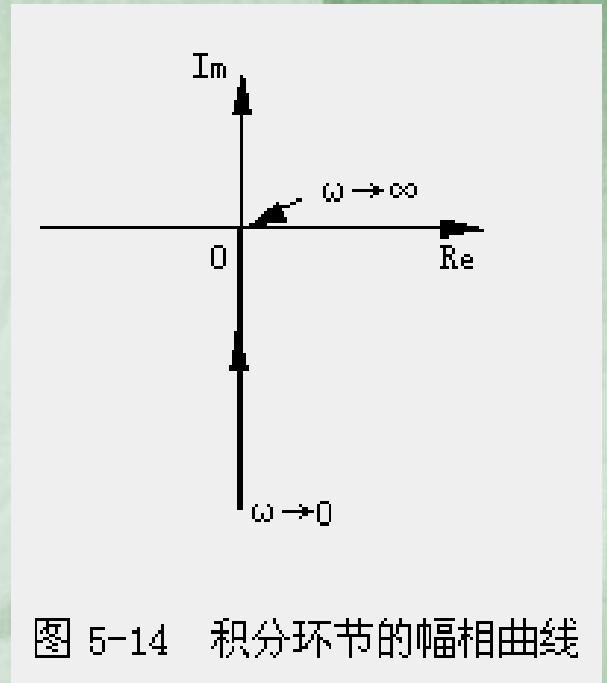
图 5-13 一阶微分环节的对数幅频特性和对数相频特性曲线

积分环节

积分环节的传递函数是 $1/s$ ，其频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

其幅相曲线如图5-14所示，显然 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，其幅值由 ∞ 变化到 0 ，而相角始终为 -90° 。



积分环节的幅频特性和相频特性的表达式为：

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\omega} \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

积分环节的对数幅频特性和相频特性为：

$$\begin{cases} L(\omega) = -20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

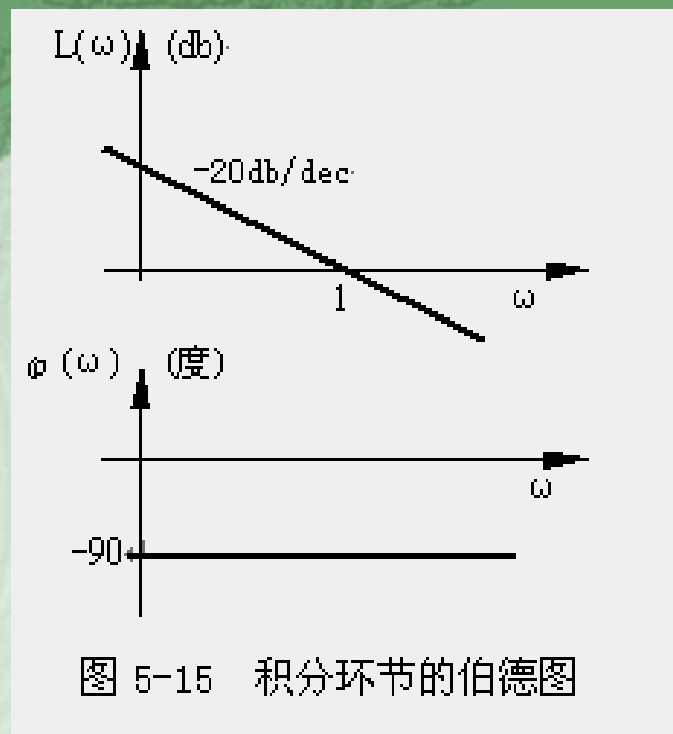


图 5-15 积分环节的伯德图

其相应的对数幅频特性和相频特性曲线如图5-15所示，由图可见，其对数幅频特性为一条斜率为 -20db/dec 的直线，此线通过 $\omega=1$ ， $L(\omega)=0 \text{ db}$ 的点。相频特性是一条平行于横轴的直线，其纵坐标为 $-\pi/2$ 。

微分环节

微分环节的传递函数是 s ,

其频率特性为:

$$G(j\omega) = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

其幅相曲线如图5-16所示, 显然 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 其幅值由 0 变化到 ∞ , 而相角始终为 $+90^\circ$ 。

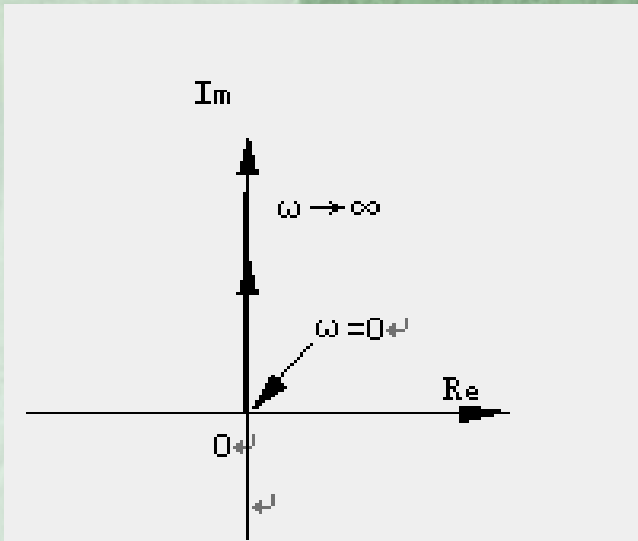


图 5-16 微分环节的幅相曲线

微分环节的幅频特性和相频特性的表达式为：

$$\begin{cases} A(\omega) = \omega \\ \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

微分环节的对数幅频特性和相频特性为：

$$\begin{cases} L(\omega) = 20 \lg \omega \\ \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

其相应的对数幅频特性和相频特性曲线如图5-17所示，由图可见，其对数幅频特性为一条斜率为+20db/dec的直线，此线通过 $\omega=1$ ， $L(\omega)=0$ db的点。相频特性是一条平行于横轴的直线，其纵坐标为 $\pi/2$ 。

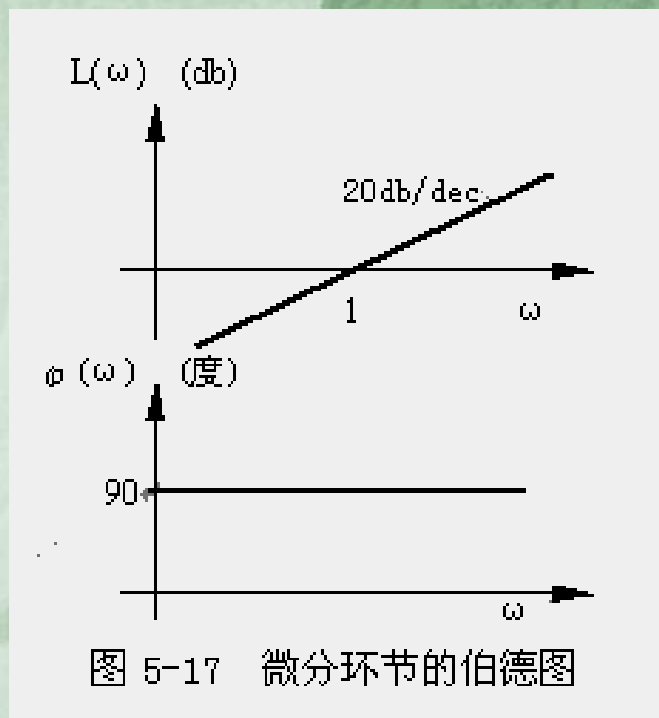


图 5-17 微分环节的伯德图

积分环节和微分环节的传递函数互为倒数，它们的对数幅频特性和相频特性则对称于横轴。

振荡环节

振荡环节的传递函数是

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \omega_n > 0, \quad 0 < \xi < 1$$

振荡环节的频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}$$

幅相曲线的起点为 $G(j0) = 1/\underline{0^\circ}$ ，终点为 $G(j\infty) = 0/\underline{-180^\circ}$ 。当 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时， $A(\omega)$ 由 $1 \rightarrow 0$ ， $\phi(\omega)$ 由 $0^\circ \rightarrow -180^\circ$ 变化，据此可以画出振荡环节幅相曲线的大致形状。通过逐点计算，

可以画出振荡环节幅相曲线的精确形状，振荡环节的幅相曲线如图5-18所示，图上以无因次频率 $\mu = \omega / \omega_n$ 为参变量。由图可见，无论 ξ 多大， $\mu = 1$ (即 $\omega = \omega_n$) 时，相角都等于 -90° 而幅值为 $1/2 \xi$ 。

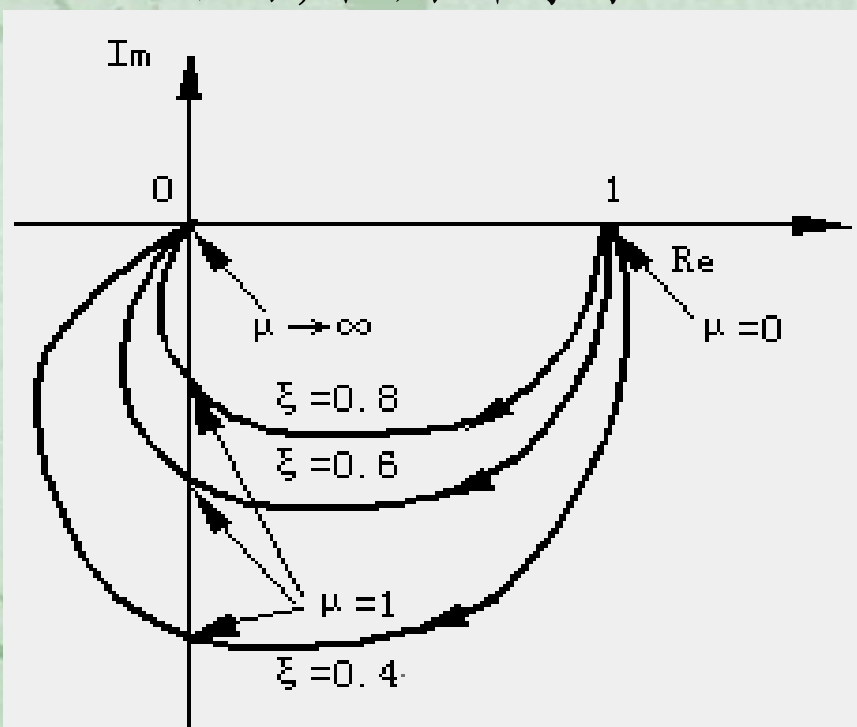


图 5-18 振荡环节的幅相曲线

幅频特性和相频特性的解析表达式分别为：

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, & \frac{\omega}{\omega_n} \leq 1 \text{ 时} \\ -\left[\pi - \arctg \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1} \right], & \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

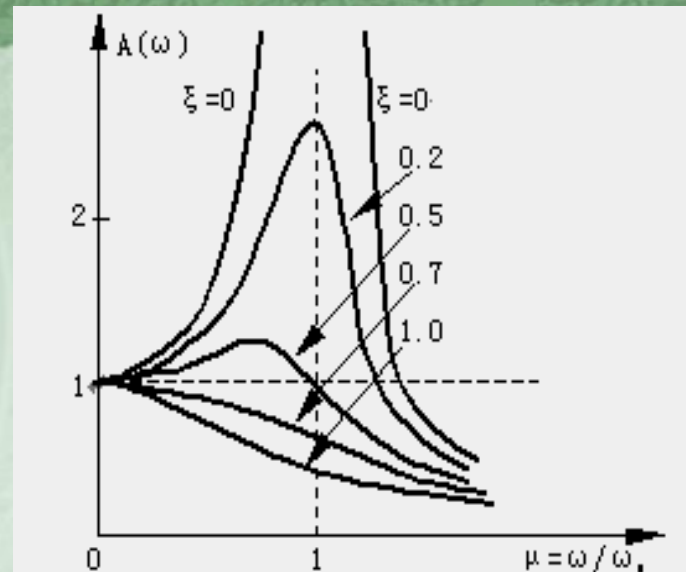


图 5-19 振荡环节的 $A(\omega)$ 与 μ 的关系曲线

图5-19为 $A(\omega)$ 与 μ 的关系曲线，由曲线可知， ξ 小于某个值时，幅频特性出现谐振峰值 M_r ，峰值对应的频率称为谐振频率 ω_r ， $\mu_r = \omega_r / \omega_n$ 叫做无因次谐振频率。 μ_r 随 ξ 减小而增大，最终趋于1。

将 $A(\omega)$ 对 μ 求导并令它等于零,可得:

$$\mu_r = \sqrt{1-2\xi^2} \quad (\xi \leq 0.707)$$

或谐振频率: $\omega_r = \sqrt{1-2\xi^2} \omega_n \quad (\xi \leq 0.707)$

幅频特性谐振峰值: $M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\xi \leq 0.707)$

对于振荡环节来说, 阻尼比越小, M_r 越大, 系统的单位阶跃响应的超调量也越大; 反之, 阻尼比越大, M_r 越小, 超调量也越小。可见, M_r 直接表征了系统超调量的大小, 故称为振荡性指标。

振荡环节的对数幅频特性和相频特性为：

$$L(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\xi \omega / \omega_n)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} - \operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}, & \frac{\omega}{\omega_n} \leq 1 \text{ 时} \\ - \left[\pi - \operatorname{arctg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 1} \right], & \frac{\omega}{\omega_n} > 1 \text{ 时} \end{cases}$$

在绘制对数幅频特性曲线时，注意到其渐近线可表示如下：

$$L(\omega) = 0 \quad \omega \ll \omega_n$$

$$L(\omega) = -40 \lg \omega / \omega_n \quad \omega \gg \omega_n$$

即在 $\omega \ll \omega_n$ 时，渐近线是一条0db的水平线，而在 $\omega \gg \omega_n$ 时渐近线是一条斜率为-40db/dec的直线，它和0db线交于横坐标 $\omega = \omega_n$ 的地方。因为自然频率 ω_n 是两条渐近线交接点的频率，故称为振荡环节的交接频率。

对数幅频特性曲线及其渐近线如图5-20所示。

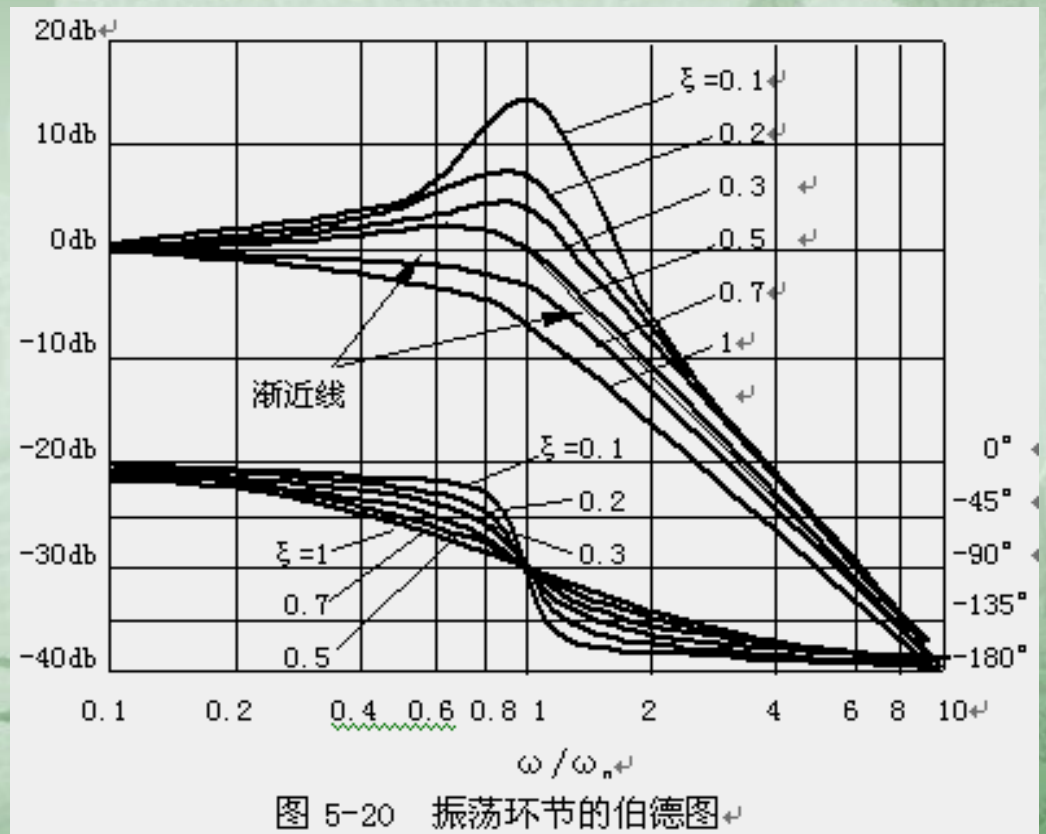


图 5-20 振荡环节的伯德图

由图可见，用渐近线来表示对数幅频特性曲线时存在误差，误差大小既和 ω 有关也和 ξ 有关。若规定误差 $\Delta L(\omega, \xi)$ 为准确值减去近似值，可得误差计算公式：

$$\Delta L(\omega, \xi) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\xi \omega / \omega_n)^2} \quad (\omega \leq \omega_n)$$

$$\Delta L(\omega, \xi) = -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\xi \omega / \omega_n)^2} + 20 \lg \omega^2 / \omega_n^2 \quad (\omega \geq \omega_n)$$

可绘制出误差曲线，误差的大小与 ξ 有关，必要时可以用误差公式或误差曲线进行修正。

对数相频特性曲线如图5-20所示， ξ 不同，曲线的形状也有所不同。

二阶微分环节

二阶微分环节的传递函数是 $s^2 / \omega_n^2 + 2 \xi s / \omega_n + 1$ 式中 $\omega_n > 0$, $0 < \xi < 1$ 。

相应的频率特性为:

$$G(j\omega) = 1 - \omega^2 / \omega_n^2 + j2 \xi \omega / \omega_n$$

可知幅相曲线的起点为 $G(j0) = 1 / 0^\circ$,
终点为 $G(j\infty) = \infty / 180^\circ$, 当 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, $A(\omega)$ 由 $1 \rightarrow \infty$,
 $\phi(\omega)$ 由 $0^\circ \rightarrow +180^\circ$ 变化, 据此
可以画出二阶微分环节幅相曲线的大致形状。通过逐点计算, 可以画出二阶微分环节幅相曲线的精确形状如图5-21所示。

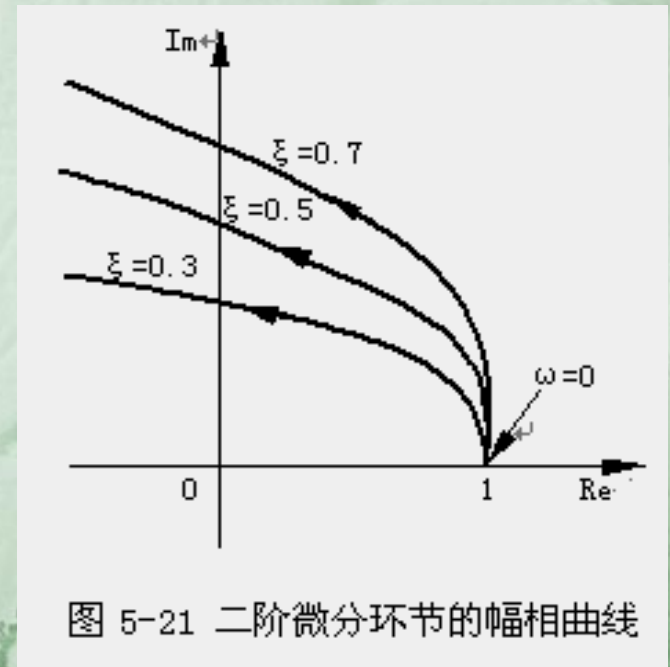


图 5-21 二阶微分环节的幅相曲线

二阶微分环节和振荡环节的传递函数互为倒数，它们的对数幅频特性和相频特性对称于横轴。二阶微分环节的伯德图如图5-22所示。注意到对数幅频特性曲线的渐近线在 $\omega < \omega_n$ 时是一条0db的水平线，而在 $\omega > \omega_n$ 时是一条斜率为+40db/dec的直线，它和0db线交于横坐标 $\omega = \omega_n$ 的地方。 ω_n 称为二阶微分环节的交接频率。

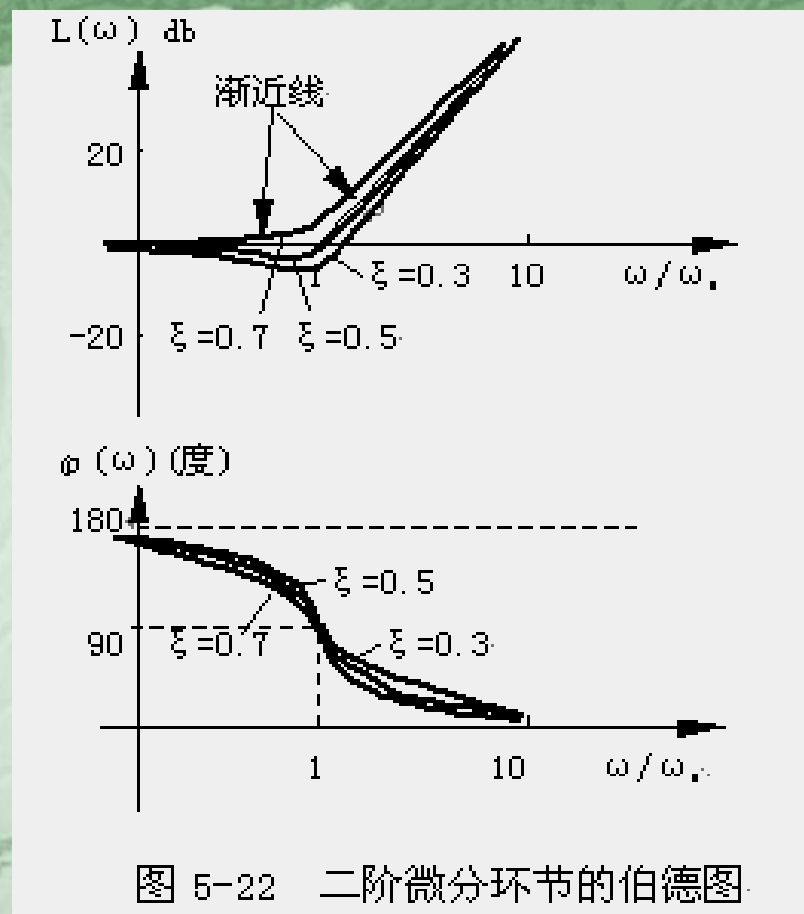


图 5-22 二阶微分环节的伯德图

不稳定环节

不稳定惯性环节的传递函数是 $1/(Ts-1)$ ，相应的频率特性是：
$$G(j\omega) = 1/(j\omega T - 1)$$

注意到图5-23中，向量 $j\omega T - 1$ 在 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，其幅值由1变化到 ∞ ，而相角由 180° 变化到 90° ，因此不稳定惯性环节的幅值由1变化到0，相角由 -180° 变化到 -90° ，不稳定惯性环节的幅相曲线如图5-24所示。

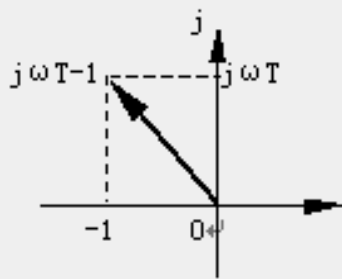


图 5-23 $j\omega T - 1$ 向量图

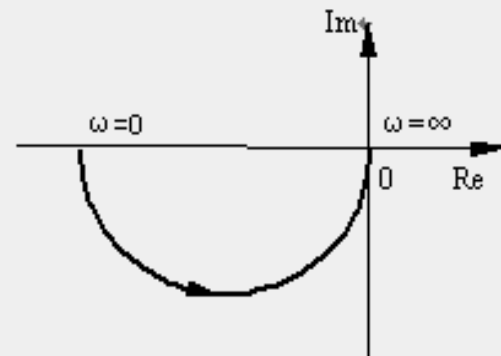


图 5-24 不稳定惯性环节的幅相曲线

不稳定惯性环节的对数幅频特性是

$$-20 \lg \sqrt{1 + (\omega T)^2},$$

相频特性是 $-(\pi - \arctg \omega T)$ ，不稳定惯性环节和惯性环节的对数幅频特性相同，而相频特性曲线却对称于 -90° 水平线。如图5-25所示。

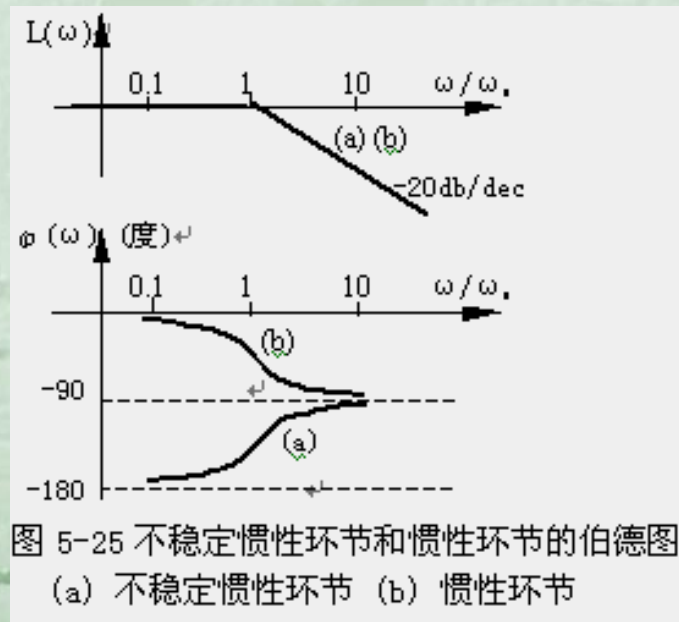
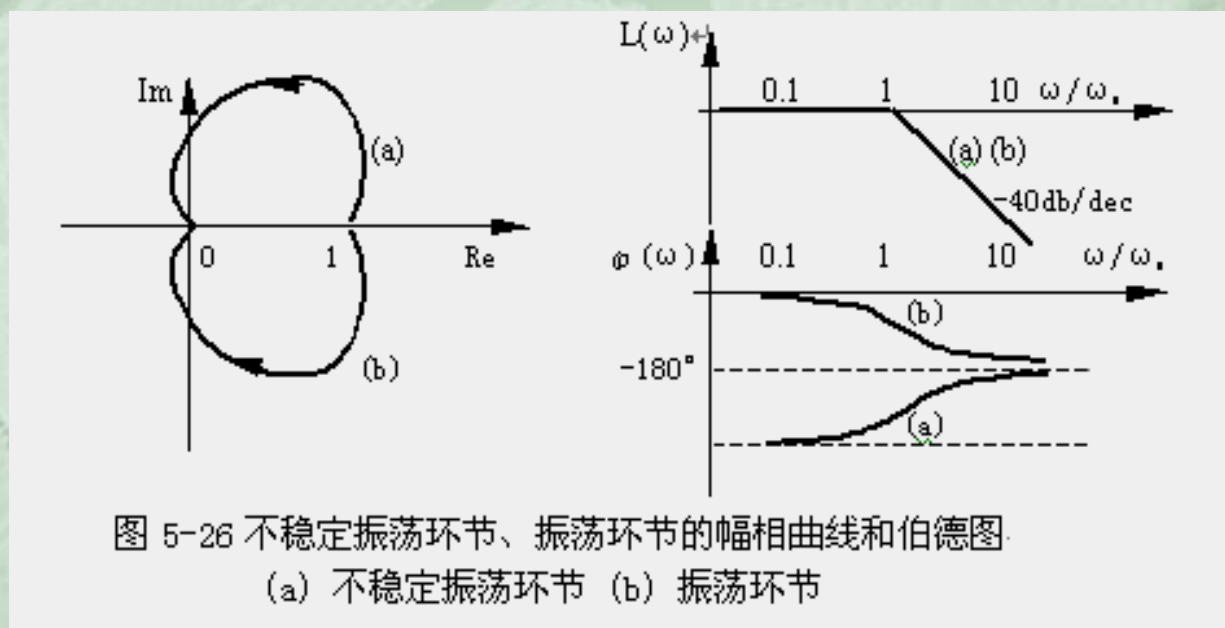
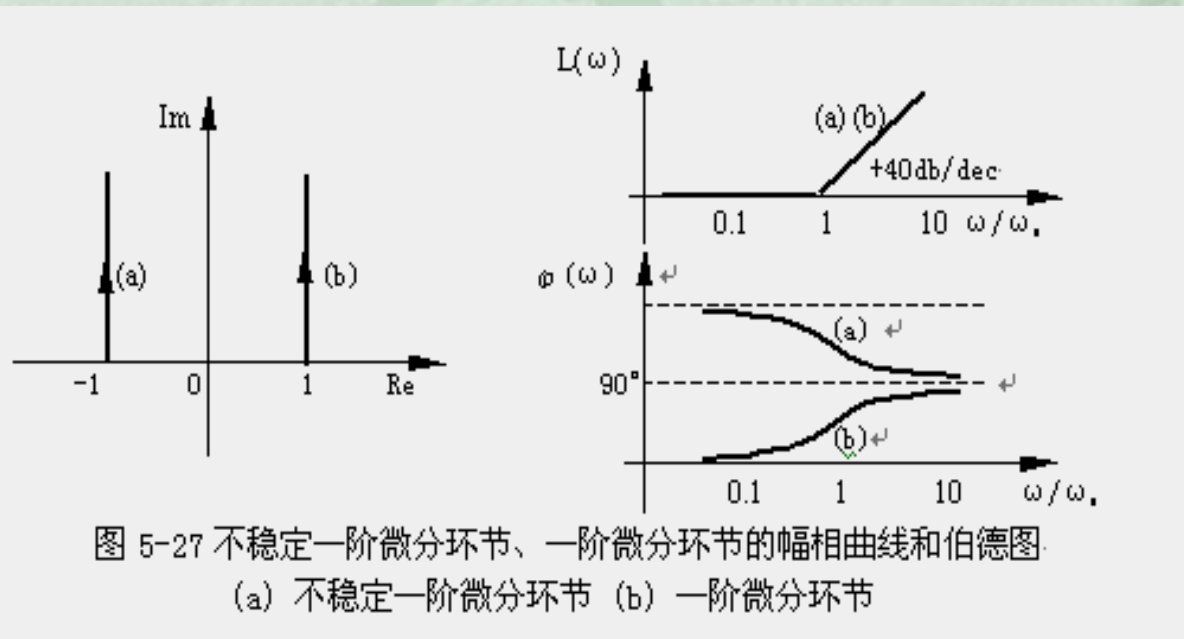


图 5-25 不稳定惯性环节和惯性环节的伯德图
(a) 不稳定惯性环节 (b) 惯性环节

由类似分析可知，不稳定振荡环节的幅频特性和其对应的振荡环节的幅频特性相同；而相频特性曲线则对称于 -180° 线。其幅相曲线和对数频率特性曲线，如图5-26所示。



不稳定一阶微分环节的幅频特性和其对应的一阶微分环节的幅频特性相同，而相频特性曲线对称于 90° 线，不稳定二阶微分环节的幅频特性和其对应的二阶微分环节的幅频特性相同，而相频特性曲线对称于 180° 线，如图5-27和图5-28所示。



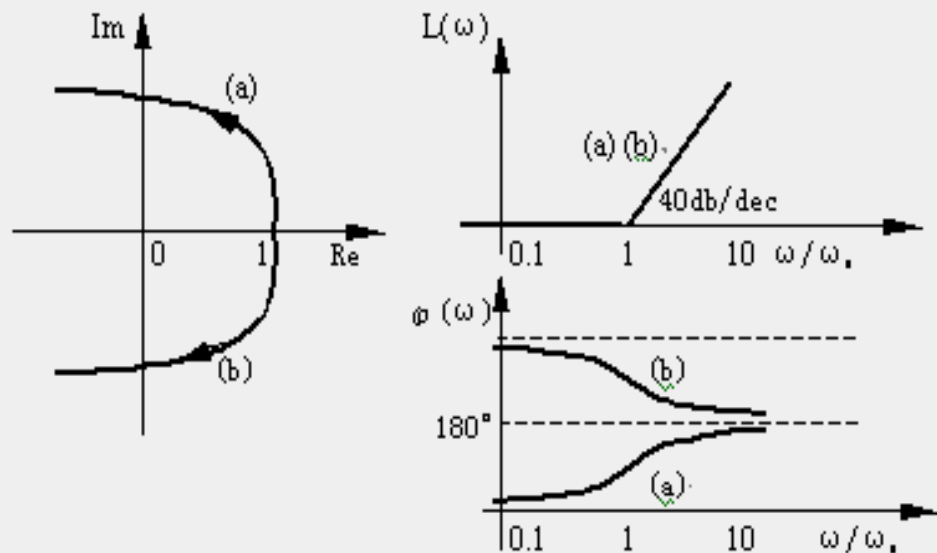


图 5-28 不稳定二阶微分环节、二阶微分环节的幅相曲线和伯德图
 (a) 不稳定二阶微分环节 (b) 二阶微分环节

不稳定环节对数幅频特性曲线的精确化方法，和对应环节对数幅频曲线的精确化方法完全一样。

延迟环节

输出量毫不失真地复现输入量的变化，但时间上存在恒定延迟的环节称为延迟环节，如图5-29所示。

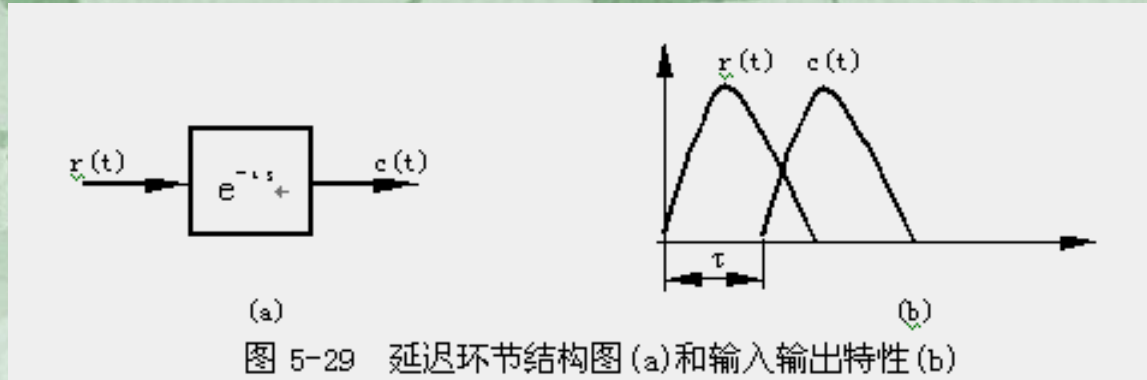


图 5-29 延迟环节结构图(a)和输入输出特性(b)

延迟环节输出和输入间的关系式是：

$$c(t) = r(t - \tau) 1(t - \tau)$$

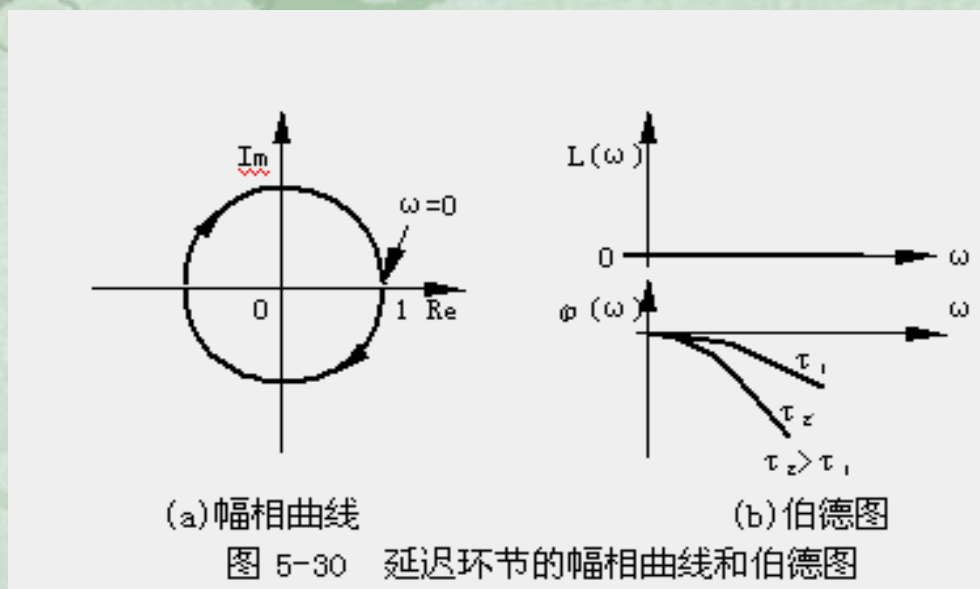
故延迟环节的传递函数是： $G(S) = e^{-\tau S}$

对应的频率特性是： $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

幅频特性和相频特性分别为： $A(\omega) = 1$

$$\phi(\omega) = -57.3 \omega \tau (^\circ)$$

由此可知：幅频特性恒等于1，相频特性是 ω 的线性函数， ω 为零时，相角等于零， ω 趋于无穷大时，相角趋于负无穷。延迟环节的幅相曲线是一个圆，圆心在原点，半径为1，如图5-30(a)所示。



延迟环节的对数幅频特性恒为0db，即： $L(\omega)=0$

对数频率特性曲线如图5-30(b)所示，由图可知， τ 越大，相角迟后就越大。

实际中的元部件和系统常包含延迟环节。例如，有分布参数的长传输线就可用延迟环节表征。在这种传输线内，脉冲可以保持原波形，经时间 τ 沿传输线传送过去。又如，多个小时间常数的惯性环节串联后，其等效特性也可用延迟环节近似。

因为自然对数底 e 的定义为：

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

$$e^{-\tau s} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right]^{-\tau s} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-\tau m s}$$

令 $\tau m s = n$ ，则 $1/m = (\tau/n)s$ ，即有：

$$e^{-\tau s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n}s\right)^n}$$

5-3 系统开环频率特性的绘制

大家都知道，线性定常系统有开环传递函数和闭环传递函数，在分析系统时应注意区分。类似地，线性定常系统的频率特性也有开环频率特性和闭环频率特性。显然，在系统的开环传递函数中令 $s=j\omega$ 可得到开环频率特性，而在系统的闭环传递函数中令 $s=j\omega$ 可得到闭环频率特性，本节讨论系统开环频率特性的绘制。开环系统由 n 个典型环节串联组成，其传递函数为：

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \dots G_n(s)$$

系统的开环频率特性为： $G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega) \dots G_n(j\omega)$

可见： $A(\omega) = A_1(\omega) A_2(\omega) \dots A_n(\omega)$

$$L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) + \dots + L_n(\omega)$$

$$\phi(\omega) = \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \dots + \phi_n(\omega)$$

式中 $G_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示各典型环节的传递函数,
 $G_i(j\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示各典型环节的频率特性,
 $A_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示各典型环节的幅频特性,
 $L_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示各典型环节的对数幅频特性,
 $\phi_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 表示各典型环节的相频特性。

最小相位系统和非最小相位系统

若控制系统开环传递函数的所有零、极点都位于虚轴以及 S 左半平面, 则称为最小相位系统。否则称为非最小相位系统。也就是说, 组成最小相位系统的各典型环节中不含有不稳定环节, 也不能含有延迟环节, 这是因为:

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{1}{2!} \tau^2 s^2 + \frac{1}{3!} \tau^3 s^3 + \dots$$

显然, 含有延迟环节的传递函数必有位于右半 S 平面的零点。对应的系统属于非最小相位系统。

上一节讨论了典型环节的频率特性,从中发现,在幅频特性完全一致的情况下,组成最小相位系统的各典型环节(如惯性环节,振荡环节等)的相频特性比相应的不稳定环节(如不稳定惯性环节,不稳定振荡环节等)的相频特性要大。由于相频特性通常为负值,所以,在相同的频率下,组成最小相位系统的各典型环节相角迟后最小。

由于系统的相频特性为组成系统的各典型环节的相频特性之和,幅频特性完全一致的系统,最小相位系统的开环相频特性最大,或相角迟后最小。

最小相位系统的开环幅频特性和相频特性是直接关联的，也即一个幅频特性只能有一个相频特性与之对应；反之亦然。因此，对于最小相位系统，只要根据其的对数幅频特性曲线就能确定系统的开环传递函数。而对于非最小相位系统，仅根据其的对数幅频特性曲线是无法确定系统的开环传递函数的。

开环幅相曲线的绘制

开环系统的幅相曲线简称开环幅相曲线。这类曲线的绘制方法和绘制典型环节幅相曲线的方法一样。也就是说，可以列出开环幅频特性和相频特性的表达式，用解析计算法绘制，也可以用图解计算法绘制。这里着重介绍绘制概略开环幅相曲线的方法。

例5-

2:

系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

要求绘制它的幅相曲线。

解: 系统的开环频率特性为:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{j\omega T + 1}$$

开环幅相曲线的起点为: $G(j0) = 0/90^\circ$, 终点为 $G(j\infty) = 1/0^\circ$, 注意到在 ω 由 0 到 ∞ 变化时, $G(j\omega)$ 分子的相角始终为 90° , 分母相角由 0° 变化到 90° , 故 $G(j\omega)$ 的相角应由 90° 变化到 0° , 而 $G(j\omega)$ 的幅值由 0 变化到 1, 幅相曲线从原点开始, 终止于 $(1, j0)$ 点, 位于第一象限, 概略绘制幅相曲线如图 5-31 所示。

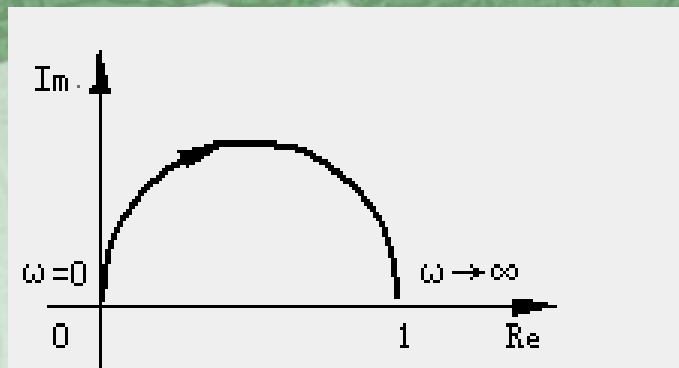


图 5-31 例 5-2 的幅相曲线

例5-3:

某零型控制系统，开环传递函数为： $G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
试概略绘制系统开环幅相曲线。

解。系统开环频率特性

为：
$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$$

开环幅相曲线的起点为：

$G(j0) = 1/0^\circ$ ，终点为 $G(j\infty) = 0/-$

180° ，注意到在 ω 由0到 ∞ 变化

时， $G(j\omega)$ 的幅值由1变化到0，相

角由 0° 减小到 -180° ，幅相曲线应

位于第三、四象限，如图5-32所

示。

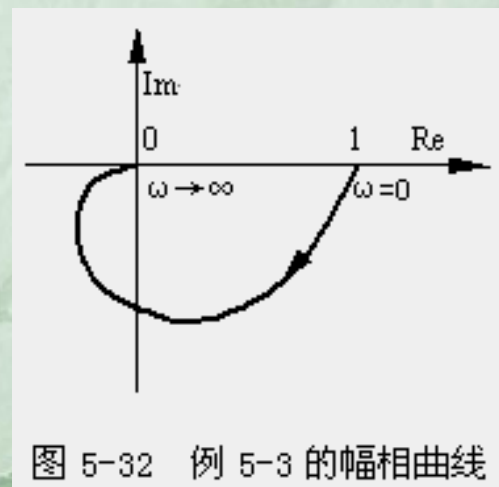


图 5-32 例 5-3 的幅相曲线

从以上两例可以看出，在概略绘制幅相曲线时，首先应当计算出系统幅相曲线的起点 $G(j0)$ 和终点 $G(j\infty)$ ，再注意到在 ω 由0到 ∞ 变化时， $G(j\omega)$ 的幅值和相角的变化情况，必要时可以计算若干点的数值，即可画出幅相曲线的大致形状。

需要说明的是，如果幅相曲线和负实轴有交点，应当计算出相交时的频率以及交点的位置。具体做法见例5-4。

对于最小相位系统，可以总结出幅相曲线的起点和终点的分布规律。

设最小相位系统的开环传递函数

为：

$$G(s) = \frac{K(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}{s^\nu (a_n s^{n-\nu} + a_{n-1} s^{n-\nu-1} + a_{n-2} s^{n-\nu-2} + \dots + 1)}$$

式中 $n > m$ ，令 $s = j\omega$ 即可得到系统的开环频率特性，在 $\omega \rightarrow 0$ 时，有：

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\nu}$$

上式为幅相曲线起点的计算公式。

具体地说，对于零型系统 ($\nu = 0$)，幅相曲线起始于 $(K, j0)$ 点，对于 I 型系统 ($\nu = 1$)，幅相曲线在无穷远处起始于虚轴的负方向，对于 II 型系统 ($\nu = 2$)，幅相曲线在无穷

远处起始于实轴的负方向，对于III型系统($\nu=3$)，幅相曲线在无穷远处起始于虚轴的正方向，如图5-33所示。

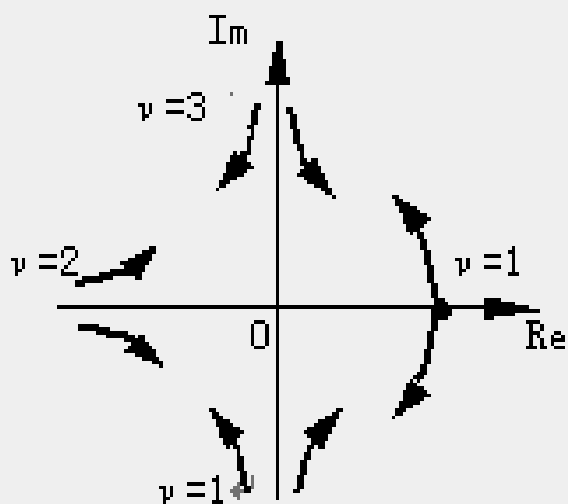


图 5-33 幅相曲线起点示意图

在 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 有: $G(j\omega) = \frac{Kb_m}{(j\omega)^{n-m}}$
上式为幅相曲线终点的计算公式。

具体地说, 当 $n-m=1$ 时, 系统幅相曲线以 -90° 方向终止于原点, 当 $n-m=2$ 时, 幅相曲线以 -180° 方向终止于原点, 当 $n-m=3$ 时, 幅相曲线以 -270° 方向终止于原点, 当 $n-m=4$ 时, 幅相曲线则以 -360° (即 0°) 方向终止于原点, 如图 5-34 所示。

图 5-33 和图 5-34 适用于最小相位系统, 对于 v 为负数 (类似于例 5-2) 以及 $n \leq m$ 时起点和终点的情况, 读者可自行推导。

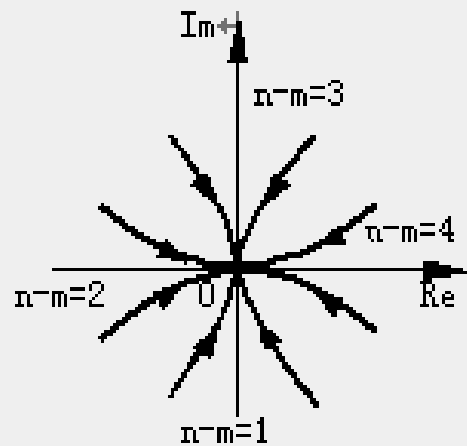


图 5-34 幅相曲线终点示意图

例5-4: 某单位反馈系统, 其开环传递函数为: $G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

试概略绘制系统的开环幅相曲线。

解。开环频率特性为:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)(j\omega T_3+1)}$$

显然, $G(j0^+) = \infty \angle -90^\circ$,

$G(j\infty) = 0 \angle -360^\circ$, 也就是说, 幅相曲线起于虚轴负方向, -360° 方向终止于原点, 如图5-35所示。

若把频率特性写成实部与虚部的形式:

$$G(j\omega) = \frac{-K[\omega(T_1+T_2+T_3) - \omega^3 T_1 T_2 T_3]}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)(1+\omega^2 T_3^2)} + j \frac{-K[1 - \omega^2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1)]}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)(1+\omega^2 T_2^2)(1+\omega^2 T_3^2)}$$

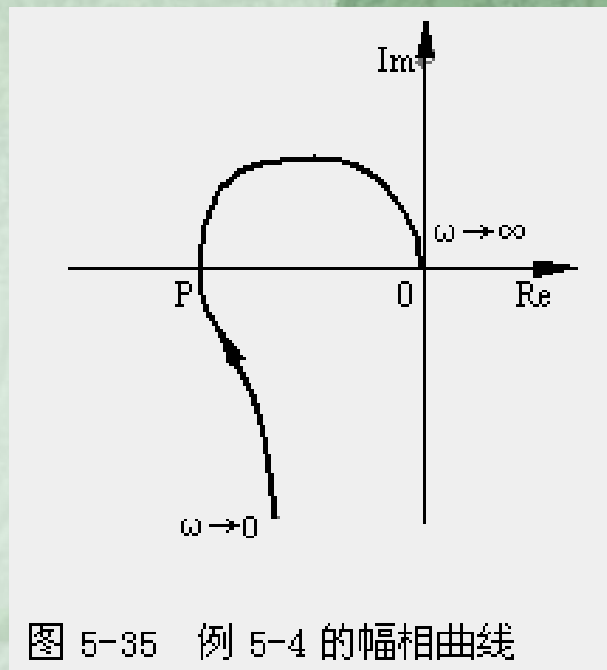


图 5-35 例 5-4 的幅相曲线

幅相曲线与负实轴有交点P。为求交点的数值，可令 $G(j\omega)$ 的虚部为零：

$$\frac{-K[1-\omega^2(T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1)]}{\omega(1+\omega^2T_1^2)(1+\omega^2T_2^2)(1+\omega^2T_3^2)}=0$$

解得：
$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2+T_2T_3+T_3T_1}}$$

再把 ω_x 代入 $G(j\omega)$ 可得：

$$G(j\omega_x) = \frac{-K[(T_1+T_2+T_3)-\omega_x^2T_1T_2T_3]}{(1+\omega_x^2T_1^2)(1+\omega_x^2T_2^2)(1+\omega_x^2T_3^2)}$$

ω_x 和 $G(j\omega_x)$ 即为幅相曲线与负实轴相交时所对应的频率以及交点的数值。

例5-

5:

概略绘制 $G(j\omega) = \frac{10e^{-j0.5\omega}}{1+j\omega}$ 的幅相曲线。

解

:

系统的频率特性包括三个典型环节，即比例、惯性和迟后环节，可以求得幅频特性和相频特性为：

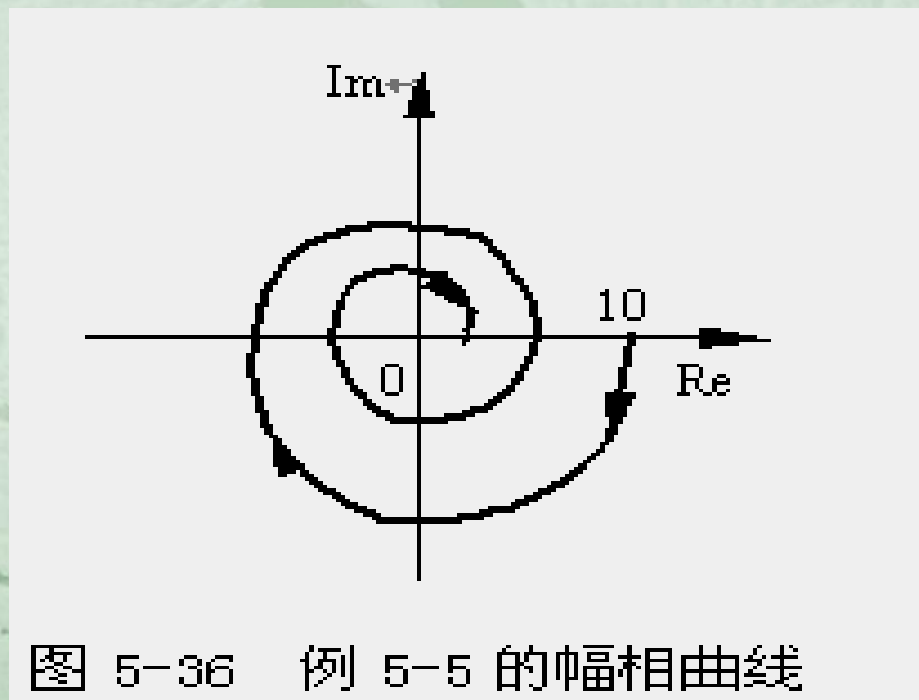
$$|G(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg \omega - 57.3 \times 0.5 \omega (^\circ)$$

在 ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时， $|G(j\omega)|$ 由 10 减小到 0， $\angle G(j\omega)$ 由 0° 减小到 $-\infty$ ，注意到幅相曲线的起点为 $G(j0) = 10 \angle 0^\circ$ ，可概略绘出幅相

曲线如图5-36所示。

幅相曲线与负实轴有多个交点，若令 $\angle G(j\omega) = -180^\circ$ ，可求得最左边的交点，此时 $\omega = 3.7$ 弧度/秒， $G(j\omega) = -2.6$ 。



开环对数频率特性曲线的绘制

如果 $G(s)$ 由 n 个典型环节串联而成,则其对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线可由典型环节对应曲线叠加而得。

例5-6: 某单位反馈系统, 其开环传递函数

$$\text{为: } G(s) = \frac{7}{s(0.5s+1)(0.05s+1)}$$

要求绘制近似对数幅频曲线和对数相频曲线, 并修正近似对数幅频曲线。

解 根据开环传递函数表达式可知, $G(s)$ 由如下四个典型环节组成: 比例环节 K 、积分环节 $1/s$ 和惯性环节 $1/(0.5s+1)$ 、 $1/(0.05s+1)$ 。

绘制上述典型环节对数频率特性的数据是:

$$20\lg K = 20\lg 7 = 16.9 \text{ (db)}$$

转折频率为 $1/0.5 = 2$ (弧度/秒)、 $1/0.05 = 20$ (弧度/秒)

四个典型环节的对数频率特性曲线如图5-37所示。将四个典型环节的对数幅频曲线和对数相频曲线相加，即得开环对数幅频和开环对数相频曲线，图5-37所示，图中虚线表示已修正曲线。

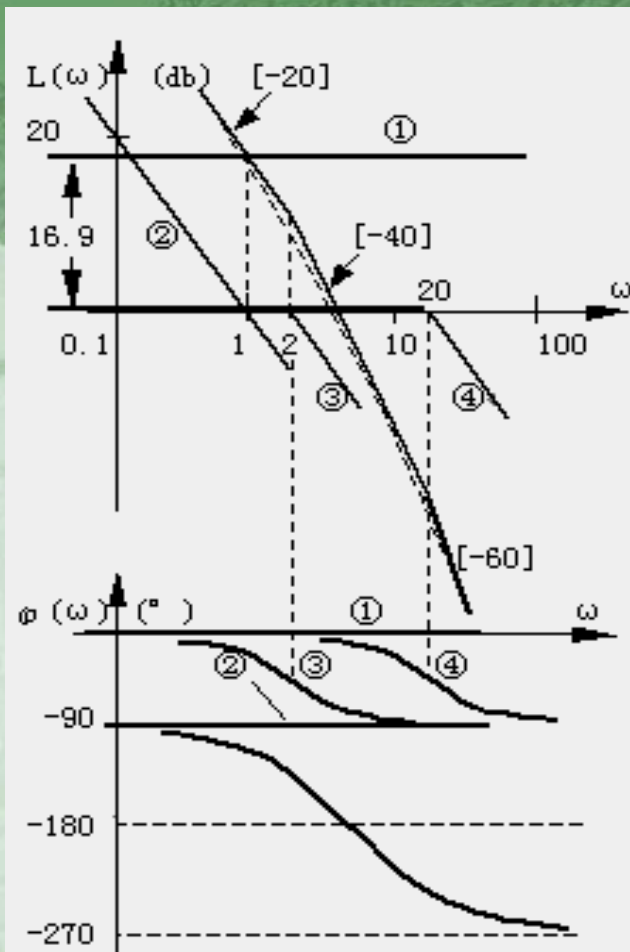


图 5-37 例 5-6 的伯德图

1—比例环节

2—积分环节

3—惯性环节 $1/(0.5s+1)$

4—惯性环节 $1/(0.05s+1)$

分析图5-37的近似开环对数幅频曲线可知，它有以下特点：

(1) 最左端直线的斜率为 -20db/dec 。这一斜率完全由 $G(s)$ 的积分环节数决定。

(2) 在 ω 等于1时，曲线的分贝值等于 $20\lg K$ 。最左端直线和0分贝线的交点频率在数值上恰好等于 K 。

(3) 在惯性环节交接频率 11.5 (弧度/秒) 处。斜率从 -20db/dec 变为 -40db/dec 。
事实上，在低频段(对应开环频率特性曲线的最左端)系统开环频率特性近似为式：

$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^v}$$

其中 ν 是积分环节数目。可以得到系统近似对数幅频曲线最左端直线的表达式为：

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \nu \lg \omega$$

- (1) 近似对数幅频曲线最左端直线斜率为 $-20 \nu \text{ db/dec}$ 。
- (2) 在 ω 等于1处，最左端直线(当 $\omega < 1$ 的频率范围内有交接频率时为最左端直线的延长线)的分贝值等于比例环节的分贝值 $20 \lg K$ ；最左端直线或其延长线与0分贝线的交点频率(此时 $L(\omega) = 0$)，在数值上等于 $K^{1/\nu}$ ，如图5-38所示。

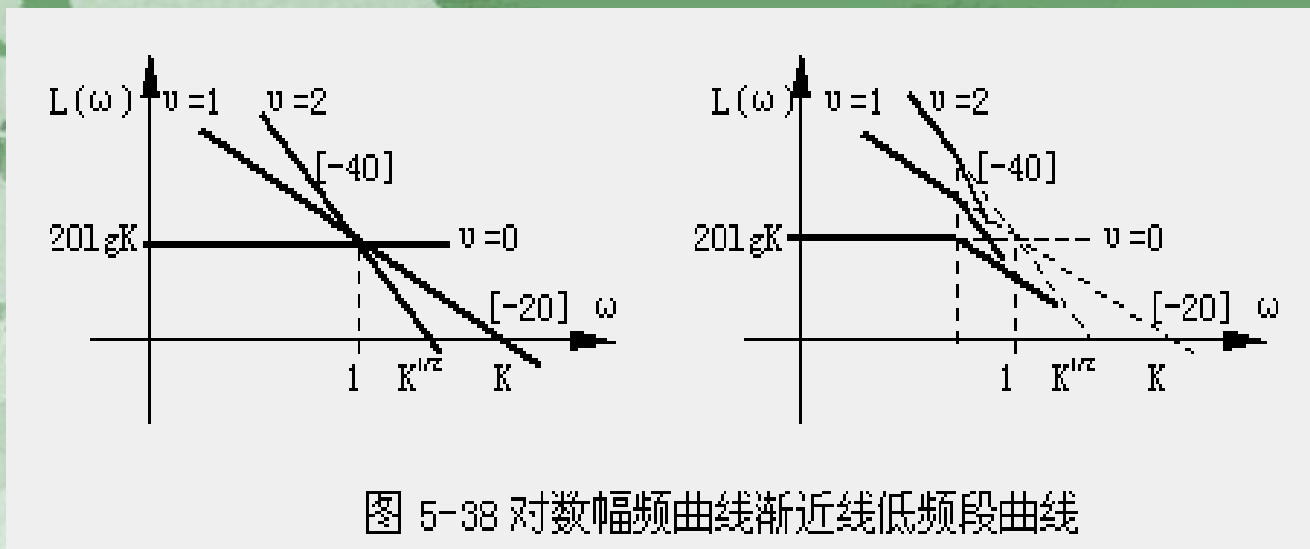
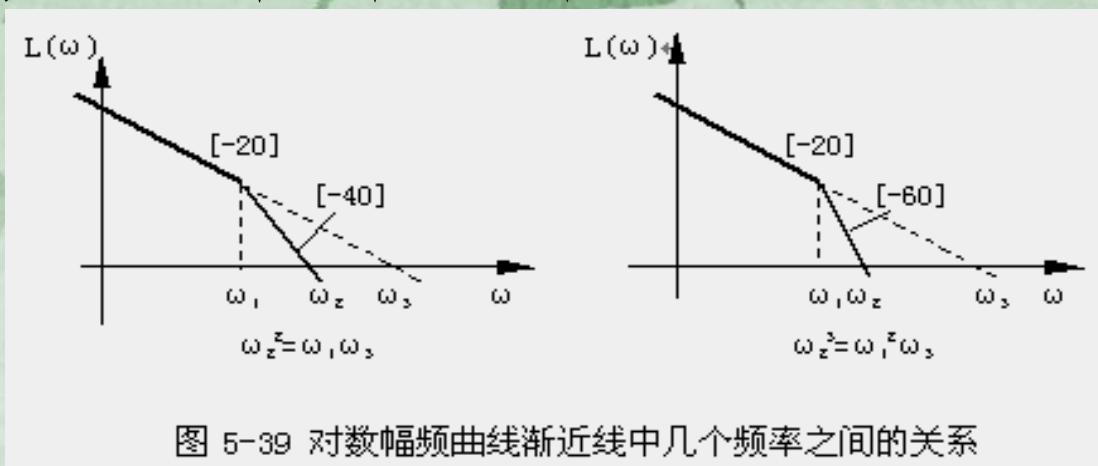


图 5-38 对数幅频曲线渐近线低频段曲线

根据以上两点可确定近似对数幅频曲线最左端直线，在交接频率的地方，曲线的斜率发生改变，改变多少视典型环节种类而异。如果典型环节为惯性环节或振荡环节，在交接频率之后，斜率要减小 20db/dec 或 40db/dec ，如果典型环节为一阶微分环节或二阶微分环节，在交接频率之后，斜率要增加 20db/dec 或 40db/dec 。

另外，在绘制对数幅频曲线渐近线的时候，经常遇到图5-39所示的情况，了解图中各频率之间的关系，对绘图很有帮助。



完成了对数幅频曲线渐近线之后，如有必要，可以根据典型环节的误差曲线对其进行修正。

对于对数相频曲线，原则上讲，应计算若干点的数值进行绘制。工程上，重点应掌握 ω 从0到无穷大变化时， $\phi(\omega)$ 的变化趋势，必要时，再计算一些特殊点的数值。

例5-

绘制传递函数

7:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+2)(s^2+s+2)}$$

的对数幅频曲线。

解： 绘制对数频率特性时，应先将 $G(s)$ 化成由典型环节串联组成的标准形式。如令：

$$G(s) = \frac{7.5(s/3+1)}{s(s/2+1)[(s/\sqrt{2})^2 + 2 \times 0.35s/\sqrt{2} + 1]}$$

然后可按以下步骤绘制近似对数幅频特性曲

线：
求 $20\lg K$ ：由 $K=7.5$ ，可得 $20\lg K=17.5$ (分贝)

画最左端直线：在横坐标 ω 为1、纵坐标为17.5分贝这一点，根据积分环节数 $\nu=1$ 画斜率 -20db/dec 的最左端直线。或者在零分贝线上找到频率为 $K^{1/\nu}=7.5$ (弧度/秒)的点，过此画 -20db/dec 线，也得到最左端直线，如图5-40所示。

根据交接频率直接绘制近似对数幅频曲线：由于振荡环节、惯性环节和一阶微分环节的交接频率分别为1.4、2和3, 所以将最左端直线画到 ω 为1.4时, 直线斜率由-20 db/dec变为-60 db/dec; ω 为2时, 直线斜率由-60 db/dec变为-80 db/dec; ω 为3时, 直线斜率又由-80 db/dec变为-60 db/dec, 如图5-40上细实线所示。

修正近似的对数幅频曲线：修正后的曲线如图5-40上的粗实线所示。

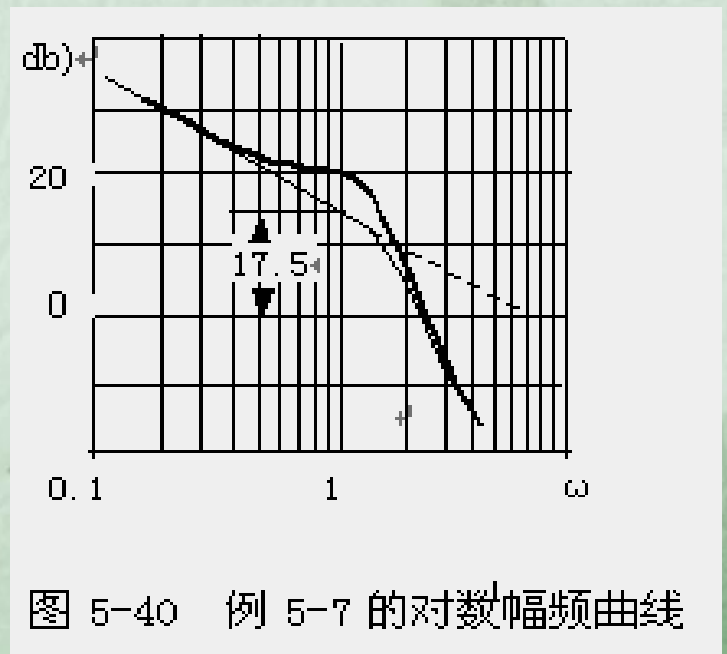


图 5-40 例 5-7 的对数幅频曲线

例5-8: 绘制下列传递函数的对数幅频和对数相频曲线 ($T_1 > T_2 > 0$):

$$G_1(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{T_1 s - 1}{T_2 s + 1}$$

解: $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的对数幅频特性是一样的, 差别在于, $G_1(s)$ 为最小相位系统, $G_2(s)$ 为非最小相位系统。先绘制它们的近似对数幅频曲线, 共由两个交接频率 $1/T_1$ 和 $1/T_2$, 最左端直线为 0 分贝的水平线, 过 $1/T_1$ 斜率变为 +20 db/dec, 过 $1/T_2$ 斜率变为 0 db/dec, 如图 5-41 所示。图中的细实线为近似对数幅频曲线, 粗实线为修正后的对数幅频曲线

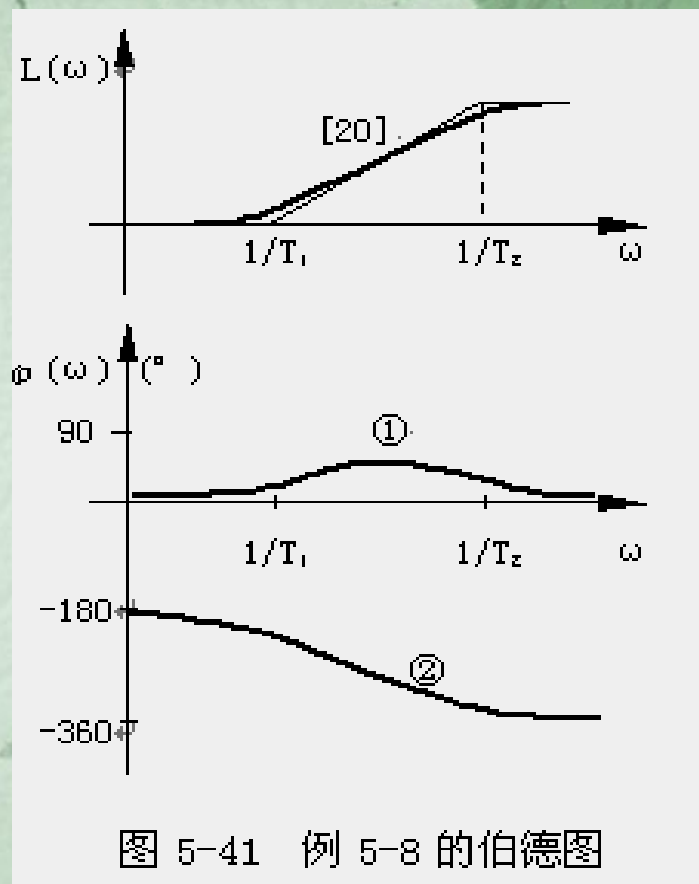


图 5-41 例 5-8 的伯德图

在画对数相频曲线时，先讨论一下 $G_1(j\omega)$ 和 $G_2(j\omega)$ 相角的变化情况。首先， $G_1(s)$ 为最小相位系统，在 ω 由0到无穷大变化时，由于 $T_1 > T_2 > 0$ ， $1 + j\omega T_1$ 和 $1 + j\omega T_2$ 的相角皆由 0° 变化到 90° ，且前者大于后者，故 $G_1(j\omega)$ 的相角由 0° 变化到 0° ，始终为正，如图5-41中曲线1所示。其次， $G_2(s)$ 为非最小相位系统， ω 由0到无穷大变化时， $j\omega T_1 - 1$ 的相角由 -180° 变化到 -270° ，而 $1 + j\omega T_2$ 的相角则由 0° 变化到 90° ，故 $G_2(j\omega)$ 的相角应由 -180° 变化到 -360° ，如图5-41中曲线2所示。

从例5-8中可以看出，在幅频特性相同时，最小相位系统的相频特性大于非最小相位系统，也就是说，最小相位系统的相位迟后最小。对于最小相位系统，根据幅频特性曲线可以写出其传递函数。

例5-9:某最小相位系统，其近似对数幅频曲线如图5-42所示。试写出该系统的传递函数。

解 由于在图5-42上，最左端直线的斜率为-20 db/dec，故系统包含一个积分环节。最左端直线的延长线和零分贝线的交点频率为系统的开环增益K，根据 $\omega_1^2 = 1 \times K = 4 \times 6$ ，求得 $K=24$ 。

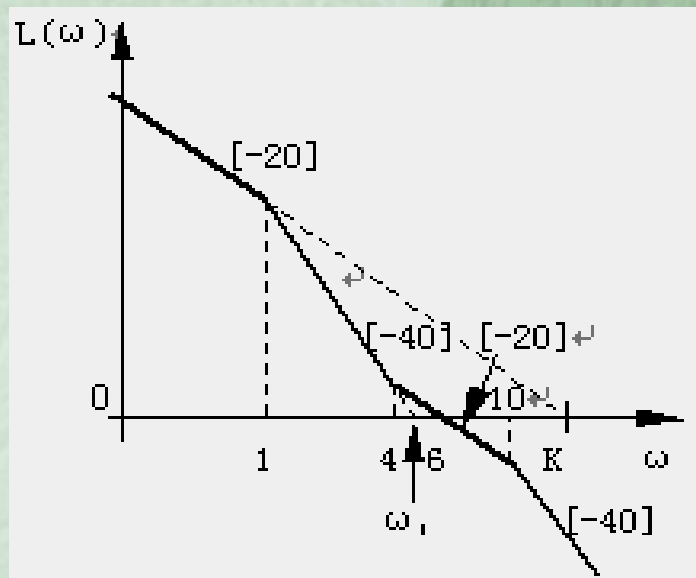


图 5-42 某最小相位系统的近似对数幅频曲线

因为在 ω 为1时,近似对数幅频曲线斜率从-20 db/dec变为-40 db/dec,故1是惯性环节的交接频率,由类似分析可知, ω 等于4是一阶微分环节的交接频率, ω 等于10是惯性环节的交接频率。于是系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{24(s/4 + 1)}{s(0.1s + 1)}$$

用实验方法确定系统的传递函数时，常常先画出实验对数幅频曲线的渐近线，并以此写出系统的传递函数。如果实验曲线有峰值，则被测系统包含有振荡环节或二阶微分环节，应按峰值确定这个环节的阻尼比 ξ 。最后，根据实验对数相频曲线效核并修改传递函数表达式，直到其对数相频曲线和实验曲线基本吻合为止。

在非最小相位系统中，幅频和相频特性之间不存在一一对应的关系。

5-4 乃奎斯特判据和系统的相对稳定性

在第三章中已经指出，闭环控制系统稳定的充分和必要条件是，其特征方程式的所有根(闭环极点)都具有负实部，即都位于S平面的左半部。

前面介绍了两种判断系统稳定性的方法。代数判据法根据特征方程根和系数的关系判断系统的稳定性。根轨迹法根据特征方程式的根随系统参量变化的轨迹来判断系统的稳定性。

本节介绍另一种重要并且实用的方法——乃奎斯特稳定判据。这种方法可以根据系统的开环频率特性，来判断闭环系统的稳定性，并能确定系统的相对稳定性。

乃奎斯特稳定判据的数学基础是复变函数论中的映射定理，又称幅角原理。

映射定理 设有一复变函数为

$$F(s) = \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

s 为复变量，以 S 复平面上的 $s = \sigma + j\omega$ 表示。 $F(s)$ 为复变函数，以 $F(s)$ 复平面上的 $F(s) = U + jV$ 来表示。

设对于 S 平面上除了有限奇点之外的任一点 s ，复变函数 $F(s)$ 为解析函数，即单值、连续的正则函数，那么，对于 S 平面上的每一点，在 $F(s)$ 平面上必定有一个对应的映射点。

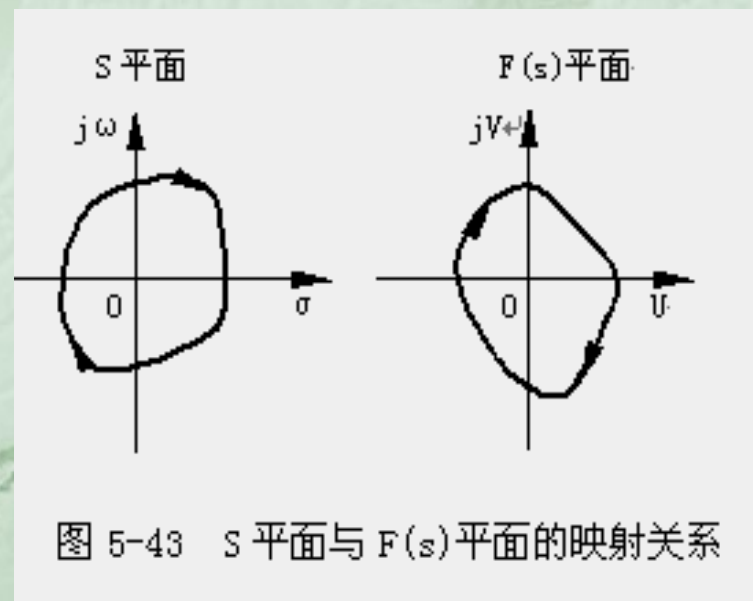


图 5-43 S 平面与 $F(s)$ 平面的映射关系

因此，如果在 S 平面画一条封闭曲线，并使其不通过 $F(s)$ 的任一奇点，则在 $F(s)$ 平面上必有一条对应的映射曲线，见图5-43。若在 S 平面上的封闭曲线是沿着顺时针方向运动的，则在 $F(s)$ 平面上的映射曲线的运动方向可能是顺时针的，也可能是逆时针的，取决于 $F(s)$ 函数的特性。

人们感兴趣的不是映射曲线的形状，而是它包围坐标原点的次数和运动方向，因为这两者与系统的稳定性密切相关。

$F(s)$ 复变函数的相角可表示为：

$$\angle F(s) = \sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i)$$

假定在 S 平面上的封闭曲线包围了 $F(s)$ 的一个零点 z_1 ，而其它零、极点都位于封闭曲线之外，则当 s 沿着 S 平面上的封闭曲线顺时针方向移动一周时，向量 $(s - z_1)$ 的相角变化 -2π 弧度，而其它各向量的相角变化为零。这意味着在 $F(s)$ 平面上的映射曲线沿顺时针方向围绕着原点旋转一周，也就是向量 $F(s)$ 的相角变化了 -2π 弧度，如图 5-44 所示。

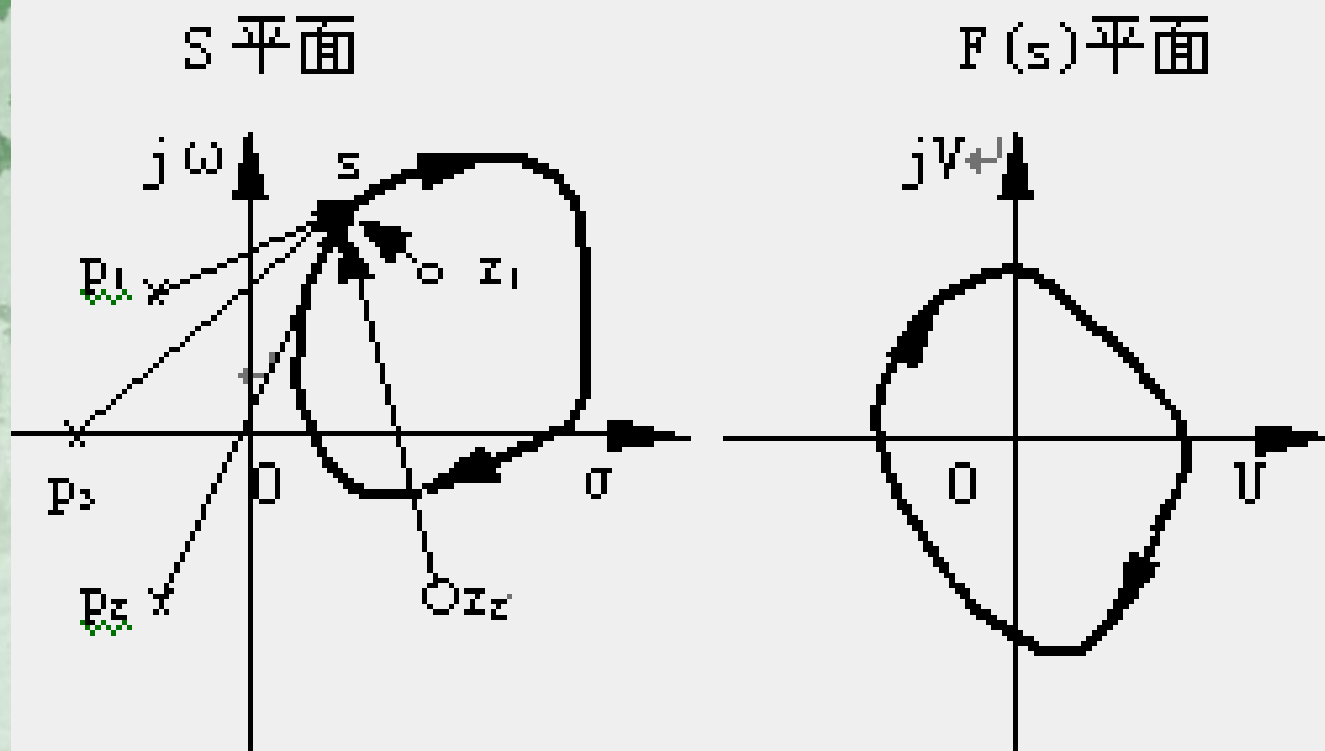


图 5-44 封闭曲线包围 z_1 时的映射情况

若 S 平面上的封闭曲线包围了 $F(s)$ 的 Z 个零点，则在 $F(s)$ 平面上的映射曲线将沿顺时针方向围绕着坐标原点旋转 Z 周。

用类似分析方法可以推论，若 S 平面上的封闭曲线包围了 $F(s)$ 的 P 个极点，则当 s 沿着 S 平面上的封闭曲线顺时针方向移动一周时，在 $F(s)$ 平面上的映射曲线将沿逆时针方向围绕着坐标原点旋转 P 周。

综上所述，可以归纳映射定理如下：

设 S 平面上的封闭曲线包围了复变函数 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，并且此曲线不经过 $F(s)$ 的任一零点和极点，则当 s 沿着 S 平面上的封闭曲线顺时针方向移动一周时，在 $F(s)$ 平面上的映射曲线将沿逆时针方向围绕着坐标原点旋转 $P - Z$ 周。

乃奎斯特稳定判据

现在讨论闭环控制系统的稳定性。

设系统的特征方程为： $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

系统的开环传递函数可以写为：

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$F(s) = 1 + \frac{K^*(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

由上式可见，复变函数 $F(s)$ 的零点为系统特征方程的根(闭环极点) s_1 、 s_2 、 \dots 、 s_n ，而 $F(s)$ 的极点则为系统的开环极点 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_n 。

闭环系统稳定的充分和必要条件是，特征方程的根，即 $F(s)$ 的零点，都位于 S 平面的左半部。

为了判断闭环系统的稳定性，需要检验 $F(s)$ 是否具有位于右半部的零点。为此可以选择一条包围整个 S 平面右半部的按顺时针方向运动的封闭曲线，通常称为乃奎斯特回线，简称乃氏回线，如图5-45所示。

乃奎斯特回线由两部分组成。一部分是沿着虚轴由下向上移动的直线段 C_1 ，在此线段上 $s=j\omega$ ， ω 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 。另一部分是半径为无穷大的半圆 C_2 。如此定义的封闭曲线肯定包围了 $F(s)$ 的位于右半部的所有零点和极点。

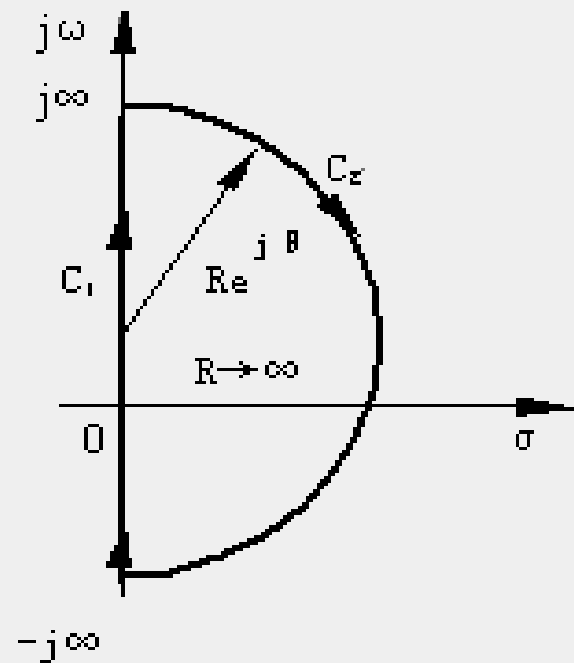


图 5-45 乃奎斯特回线

设复变函数 $F(s)$ 在 S 平面右半部有 Z 个零点和 P 个极点。根据映射定理，当 s 沿着 S 平面上的乃奎斯特回线移动一周时，在 $F(S)$ 平面上的映射曲线 $\Gamma_F=1+ G(j\omega)H(j\omega)$ 将按逆时针方向围绕原点旋转 $P-Z$ 周。

由于闭环系统稳定的充要条件是， $F(s)$ 在 S 平面右半部无零点，即 $Z=0$ 。因此可得以下的稳定判据。

闭环系统在 S 平面右半部的极点数 Z ，开环系统在 S 平面右半部的极点数 P ，映射曲线 Γ_F 围绕坐标原点按逆时针方向旋转周数 R 之间的关系为：

$$Z= P-R$$

Z 等于零时，系统是稳定的， Z 不等于零时，系统是不稳定的。

如果在S平面上， s 沿着乃奎斯特回线顺时针方向移动一周时，在 $F(s)$ 平面上的映射曲线 Γ_F 围绕坐标原点按逆时针方向旋转 $N=P$ 周，则系统是稳定的。

根据系统闭环特征方程式有 $G(s)H(s)=F(s)-1$ ，这意味着 $F(s)$ 的映射曲线 Γ_F 围绕原点的运动情况，相当于 $G(s)H(s)$ 的封闭曲线 Γ_{GH} 围绕着 $(-1, j0)$ 点的运动情况，如图5-46所示。

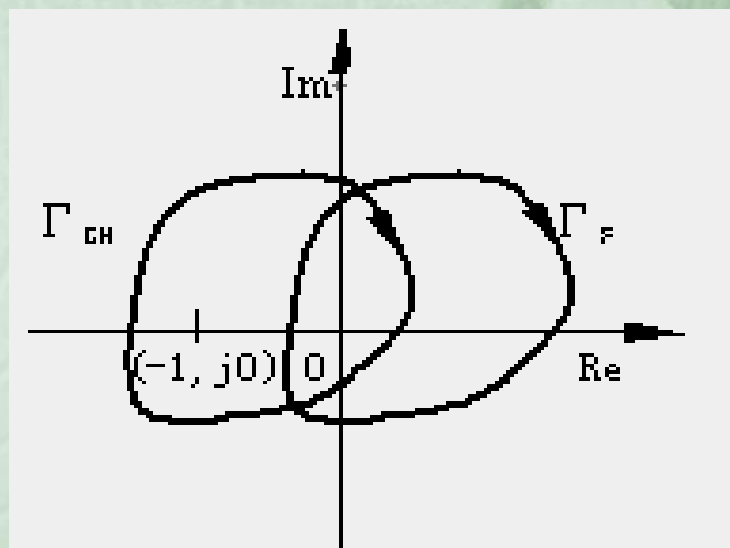


图 5-46 Γ_{GH} 和 Γ_F 的关系

当 s 沿着乃奎斯特回线顺时针方向移动一周时，绘制映射曲线 Γ_{GH} 的方法是，令 $s = j\omega$ 代入 $G(s)H(s)$ ，得到开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ ，当 ω 由零至无穷大变化时，映射曲线 Γ_{GH} 即为系统的开环频率特性曲线，即幅相曲线。一旦画出了 ω 从零到无穷大时的幅相曲线，则 ω 从零到负无穷大时的幅相曲线，根据对称于实轴的原理立即可得。

综上所述，可将乃奎斯特稳定判据（简称乃氏判据）表述如下：闭环控制系统稳定的充分和必要条件是，当 ω 从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时，系统的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点 P 周， P 为位于 S 平面右半部的开环极点数。

在实际应用中，常常只需画出 ω 从0变化到 $+\infty$ 时，系统的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ ，这时上述判据中的P周应改为 $P/2$ 周。

闭环系统位于右半部的极点数 $Z = P - 2N$ ，这里 N 为 ω 从0变到 $+\infty$ 时，系统的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点周数。显然，若开环系统稳定，即位于 S 平面右半部的开环极点数 $P=0$ ，则闭环系统稳定的充分和必要条件是，系统的开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 不包围 $(-1, j0)$ 点。

例5-10: 绘制开环传递函数为:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{T_1s - 1}$$

的系统的幅相曲线, 并判断系统的稳定性。

解。此系统的开环传递函数中, 不稳定的极点个数

: $P=1$, 开环频率特性为:

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega T_1 - 1}$$

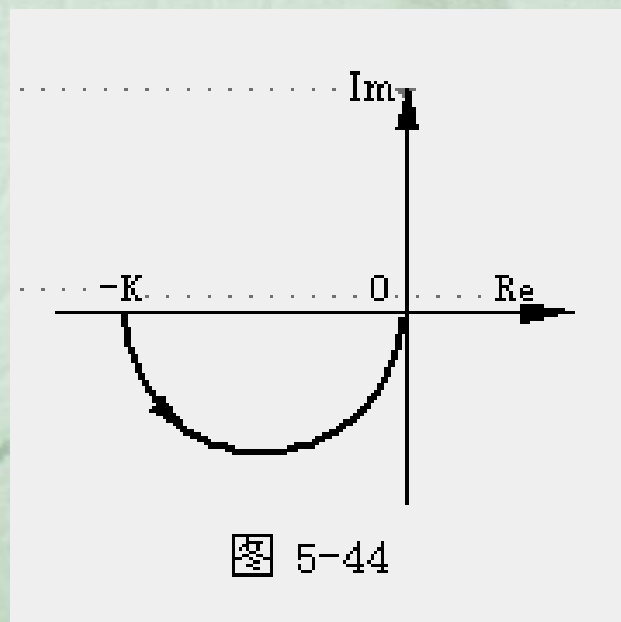
由上式可见, 当 $\omega=0$ 时,

$G(j\omega)H(j\omega) = -K$; 当 $\omega=\infty$

时, $G(j\omega)H(j\omega) = 0$, 通过计算

若干个点的数值, 可以画出系

统的幅相曲线如图5-47所示。



由图5-47可见，当 $0 < K < 1$ 时，幅相曲线不包围 $(-1, j0)$ 点， $N=0$ ，闭环系统位于右半部的极点数 $Z = P - 2N = 1$ ，系统是不稳定的。

当 $K > 1$ 时，幅相曲线逆时针包围 $(-1, j0)$ 点 $1/2$ 周， $N=1/2$ ， $Z = P - 2N = 0$ ，系统是稳定的。

虚轴上有开环极点时的乃氏判据

虚轴上有开环极点的情况通常出现于系统中有串联积分环节的时候，即在 S 平面的坐标原点有开环极点。这时不能直接应用图5-45所示的乃奎斯特回线，因为映射定理要求此回线不经过 $F(S)$ 的奇点。

为了在这种情况下应用乃氏判据，可以选择图5-48所示的乃氏回线，它与图5-45中乃氏回线的区别仅在于，此回线经过一个以原点为圆心，以无穷小量 ε 为半径的，位于 S 平面右半部的小半圆，绕开了开环极点所在的原点。当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时，此小半圆的面积也趋近于零。因此， $F(S)$ 的位于 S 平面右半部的零点和极点均被此乃氏回线

包围在内。而将位于坐标原点处的开环极点划到了左半部。这样处理是为了适应乃奎斯特判据的要求，因为应用乃氏判据时必须首先明确位于S平面右半部和左半部的开环极点的数目。

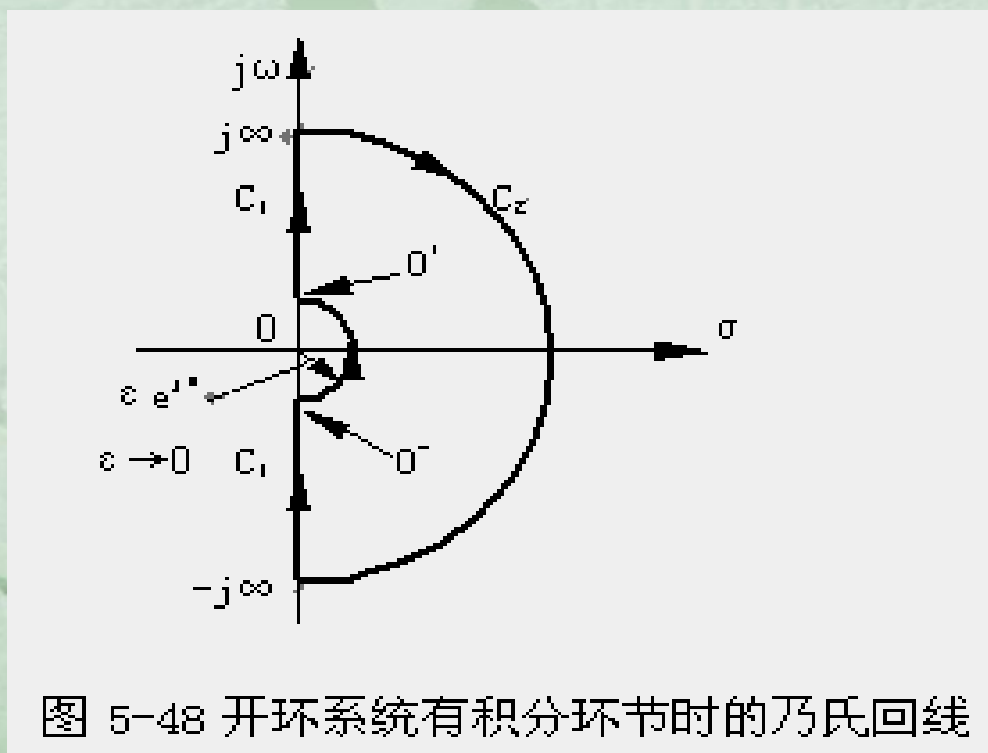


图 5-48 开环系统有积分环节时的乃氏回线

当 s 沿着上述小半圆移动时, 有 $s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot e^{j\theta}$

当 ω 从 0^- 沿小半圆变到 0^+ 时, θ 按逆时针方向旋转了 π , $G(s)H(s)$ 在其平面上的映射为:

$$G(s)H(s) \Big|_{s=\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon e^{j\theta}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon^v} e^{-jv\theta} = \infty e^{-jv\theta}$$

式中 v 为积分环节数

目。

由以上分析可见, 当 s 沿着小半圆从 $\omega=0^-$ 变化到 $\omega=0^+$ 时, θ 角从 $-\pi/2$ 经 0 变化到 $\pi/2$, 这时 $G(s)H(s)$ 平面上的映射曲线将沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向从 $v\pi/2$ 经过 0 转到 $-v\pi/2$, 相当于沿着半径为无穷大的圆弧按顺时针方向旋转 $v/2$ 周。

若要画出 ω 从0到无穷大变化时的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线，应先画出 ω 从 0^+ 到无穷大变化时的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线，至于 ω 从0到 0^+ 时的 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线，应按顺时针方向补画半径为无穷大的圆弧 $\nu/4$ 周。

将 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线补画后，可照常使用乃氏判据，此时在计算不稳定的开环极点数目 P 时， $s=0$ 的开环极点不应计算在内。下面举例说明在上述情况下乃氏判据的应用。

例5-11: 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$$

试绘制系统的开环幅相曲线, 并判断闭环系统的稳定性。

解: 令 $s=j\omega$ 代入, 给定若干 ω 值, 画出幅相曲线如图5-49所示。系统开环传递函数有一极点在S平面的原点处, 因此 ω 从0到 0^+ 时, 幅相曲线应以无穷大半径顺时针补画1/4周, 如图5-49所示。

系统的开环传递函数在右半S平面没有极点, 开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ 又不包围 $(-1, j0)$ 点, 故闭环系统是稳定的。

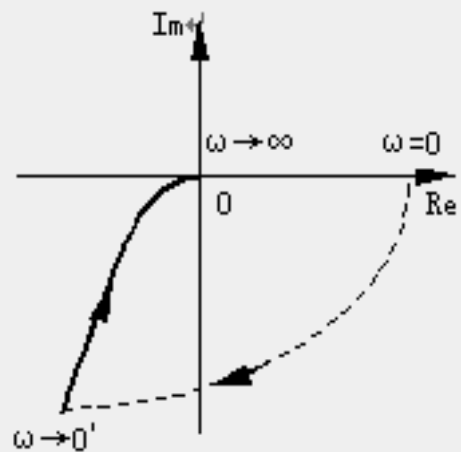


图 5-49 例 5-11 的幅相曲线

例5-

12: 设系统的开环传递函数为：
$$G(s)H(s) = \frac{(4s+1)}{s^2(s+1)(2s+1)}$$

试绘制系统的开环幅相曲线，并判断闭环系统的稳定性。

解：与该系统对应的开环频率特性为：

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{(j4\omega+1)}{-\omega^2(1-2\omega^2+j3\omega)} \\ &= \frac{1+10\omega^2+j\omega(1-8\omega^2)}{-\omega^2[(1-2\omega^2)^2+9\omega^2]} \end{aligned}$$

该系统为最小相位系统，经分析，可以画出概略的幅相曲线如图5-50所示。

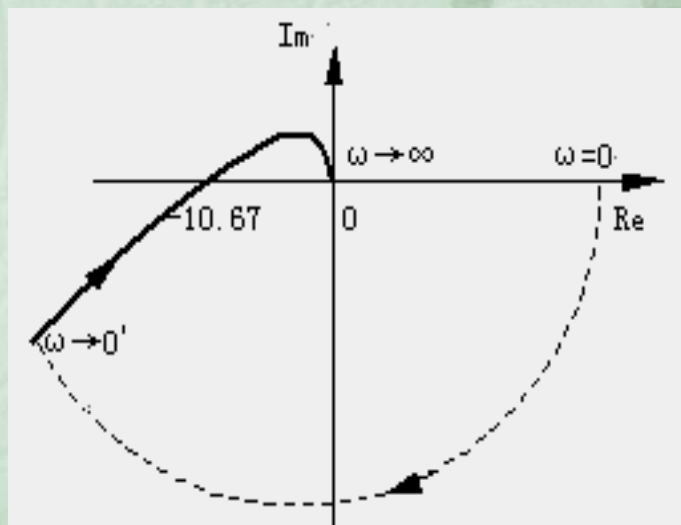


图 5-50 例 5-12 的幅相曲线

开环系统有两个极点在S平面的坐标原点，因此 ω 从0到 0^+ 时，幅相曲线应以无穷大半径顺时针补画1/2周，如图5-50所示。

由图可见， $G(j\omega)H(j\omega)$ 顺时针方向包围了 $(-1, j0)$ 点一周，即 $N=-1$ ，由于系统无开环极点位于S平面的右半部，故 $P=0$ ，所以 $Z= P-2N=2$ ，说明系统是不稳定的，并有两个闭环极点在S平面的右半部。

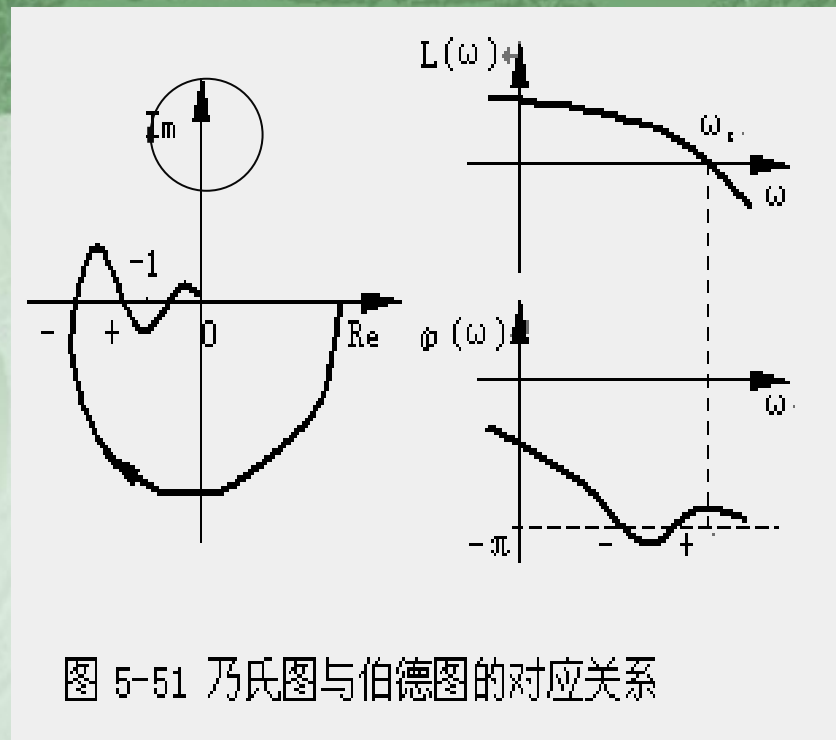
幅相曲线与负实轴有交点，可令 $\text{Im}G(j\omega)H(j\omega)=0$ ，得 $\omega^2=1/8$ ， $\omega=0.354$ 弧度/秒。此时， $\text{Re}G(j\omega)H(j\omega)=-10.67$ ，即幅相曲线与负实轴的交点为 $(-10.67, j0)$ 。

根据伯德图判断系统的稳定性

系统开环频率特性的幅相曲线(极坐标图或乃奎斯特图)和伯德图之间存在着一定的对应关系。乃氏图上

$|G(j\omega)H(j\omega)|=1$ 的单位圆与伯德图对数幅频特性的零分贝线相对应,单位圆以外对应于 $L(\omega)>0$ 。乃氏图上的负实轴对应于伯德图上相频特性的 $-\pi$ 线。

如开环频率特性按逆时针方向包围 $(-1, j0)$ 点一周,则



$G(j\omega)H(j\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \infty$) 必然从上到下穿过负实轴的 $(-1, -\infty)$ 段一次, 这种穿越伴随着相角增加, 称为正穿越。在正穿越处, $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$ 。相应地在伯德图上, 规定在 $L(\omega) > 0$ 范围内, 相频曲线 $\phi(\omega)$ 由下而上穿越 $-\pi$ 线为正穿越。

反之, 如开环频率特性按顺时针方向包围 $(-1, j0)$ 点一周, 则 $G(j\omega)H(j\omega)$ ($0 \leq \omega \leq \infty$) 必然从下到上穿过负实轴的 $(-1, -\infty)$ 段一次, 这种穿越伴随着相角减小, 称为负穿越。在负穿越处, $|G(j\omega)H(j\omega)| > 1$ 。相应地在伯德图上, 规定在 $L(\omega) > 0$ 范围内, 相频曲线 $\phi(\omega)$ 由上而下穿越 $-\pi$ 线为负穿越。请参阅图5-51, 在图上, 正穿越以“+”表示, 负穿越以“-”表示。

综上所述，采用对数频率特性时的乃奎斯特判据可表述如下：闭环系统稳定的充要条件是，当 ω 由0变到 $+\infty$ 时，在开环对数幅频特性 $L(\omega) > 0$ 的频段内，相频特性曲线 $\phi(\omega)$ 穿越 $-\pi$ 线的次数 $N = N_+ - N_-$ (N_+ 为正穿越次数， N_- 为负穿越次数)为 $P/2$ ， P 为 S 平面右半部开环极点的数目。

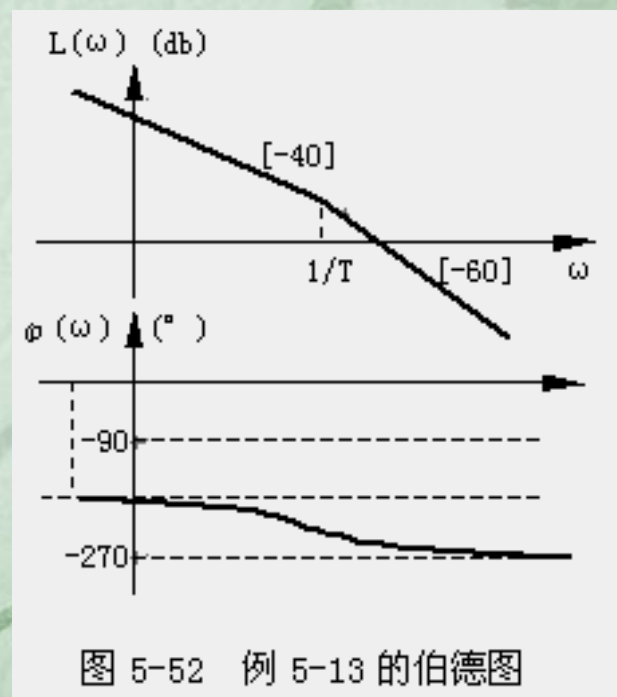
对于 S 平面原点有开环极点的情况，对数频率特性曲线也需要作出相应的修改。设 ν 为积分环节数目，当 ω 由0变到 0^+ 时，相频特性曲线 $\phi(\omega)$ 应在 ω 趋于0处，由上而下补画 $\nu \pi/2$ 。计算正负穿越次数时，应将补画的曲线看成对数相频曲线的一部分。

例5-13 一反馈控制系统，其开环传递函数

为：
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(Ts+1)}$$

试用对数频率稳定判据判断系统的稳定性。

解 系统的开环对数频率特性曲线如图5-52所示。由于 $G(s)H(s)$ 有两个积分环节，故在对数相频曲线 ω 趋于0处，补画了 0° 到 -180° 的虚线，作为对数相频曲线的一部分。显见 $N=N_+-N_-=-1$ ，根据 $G(s)H(s)$ 的表达式知道， $P=0$ ，所以， $Z=P-2N=2$ ，说明闭环系统是不稳定的，有2个闭环极点位于S平面右半部。



条件稳定系统

一个反馈控制系统，若开环传递函数右半S平面的极点数 $P=0$ ，开环频率特性曲线如图5-51所示，则开环系数(即开环增益)改变时，闭环系统的稳定性将发生变化。

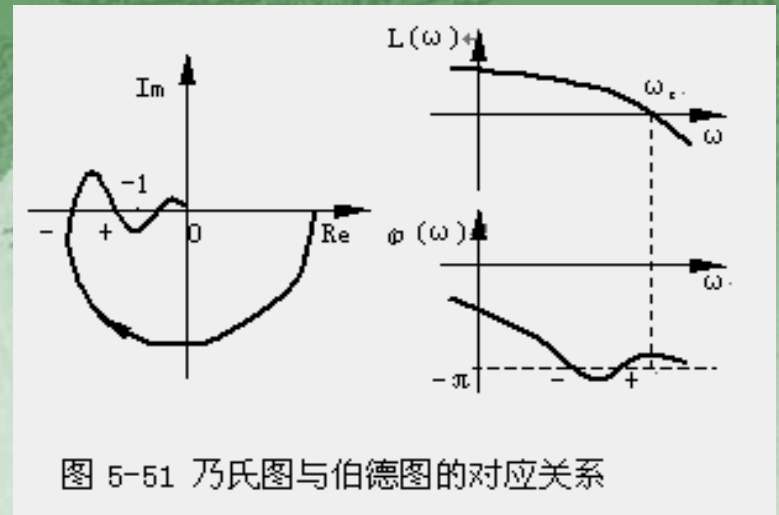


图 5-51 乃氏图与伯德图的对应关系

注意到开环增益改变时，只影响系统的开环幅频特性，不影响开环相频特性。所以当开环增益增加时，幅相曲线与负实轴的交点将按比例向左边移动（在伯德图上，表现为对数幅频特性曲线向上移动），如果开环增益增加到足够大，以致于 $N=N_+-N_-=1-2=-1$ ，那么 $Z= P- 2N=2$ ，系统就由稳定状态变为不稳定状态。当开环增益减小时，幅相曲线与负

变为不稳定状态。只有开环增益在一定范围内时， N 才等于零， $Z=P-2N=0$ ，闭环系统才稳定。故这一系统的稳定是有条件的，这种系统称为条件稳定系统。

理论上，线性定常系统的稳定性与输入信号大小无关。在实际中，有时输入信号的大小会影响系统的参数，从而影响系统的稳定性（此时的系统已不再是线性定常系统）。例如对于条件稳定系统来说，输入信号过大时，往往会出现不稳定现象，这是由于输入信号过大会引起系统元部件输出饱和，导致系统开环增益下降。实践中，有时必须防止饱和现象发生，以免系统不稳定。

应用对数频率稳定判据判断多环系统稳定性

应用对数频率判据判断多环系统稳定性比较方便。若多环系统结构如图5-53所示。图中内回路系统 $G(s)$ 的开环传递函数是 $G_2(s)H_2(s)$ ， $G_2(s)H_2(s)$ 位于右半 S 平面极点数为 P_1 ，画出 $G_2(s)H_2(s)$ 对数频率特性曲线，可得正负穿越次数之差 N_1 ，由对数频率稳定判据，可得 $G(s)$ 在右半 S 平面的极点数为 $Z_1=P_1-2N_1$ ，由于：

$$G(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)H_2(s)}$$

应用5-5节介绍的尼柯尔斯图线可以绘出 $G(s)$ 的对数幅频和对数相频特性曲线。多环系统的稳定性由 $G_1(s)G(s)H_1(s)$ 的对数

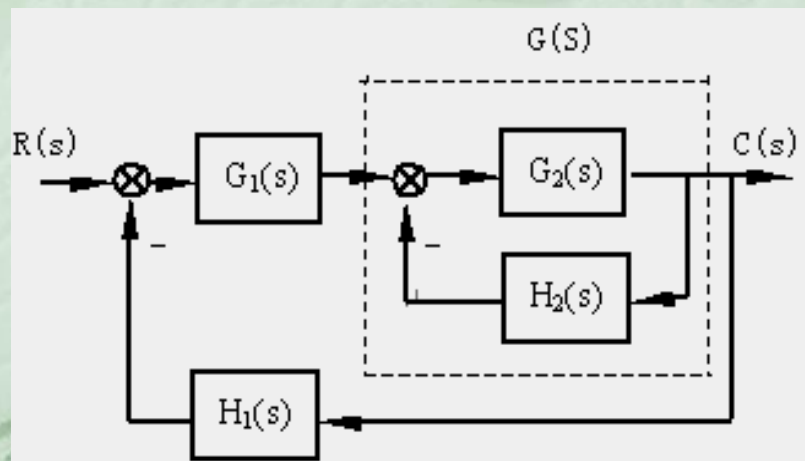


图 5-53 多环系统结构图

频率曲线及其在右半S平面的极点数来判断。 $G_1(s)G(s)H_1(s)$ 右半S平面极点数 P_2 可由 $G_1(s)$ 、 $G(s)$ 和 $H_1(s)$ 的右半S平面的极点数决定，而根据 $G_1(s)G(s)H_1(s)$ 的对数频率特性曲线，可以确定多环系统开环频率特性曲线的正负穿越次数之差 N_2 ，于是由对数频率稳定判据，多环系统右半S平面特征根数 $Z=P_2-N_2$ 。若 $Z=0$ ，多环系统稳定；否则，不稳定。

原则上，多环系统的稳定性都可以如此分析。但是，回路越多，分析工作量就越大。每多一个回路，就要多画一次类似于 $G(s)$ 这样的对数频率特性曲线。虽然可借助5-5节介绍的尼柯尔斯图线绘制，但毕竟还是比较麻烦的。

系统的相对稳定性和稳定裕度

上面介绍了根据开环频率特性判断系统稳定性的乃奎斯特判据。利用这种方法不仅可以定性地判别系统稳定性，而且可以定量地反映系统的相对稳定性，即稳定的裕度。后者与系统的暂态响应指标有着密切的关系。

前面已经指出，若开环系统稳定，则闭环系统稳定的充分必要条件是，开环频率特性曲线不包围 $(-1, j0)$ 点。如果开环频率特性曲线包围 $(-1, j0)$ 点，则闭环系统是不稳定的，而当开环频率特性曲线穿过 $(-1, j0)$ 点时，意味着系统处于稳定的临界状态。因此，系统开环频率特性曲线靠近 $(-1, j0)$ 的程度表征了系统的相对稳定性。它距离 $(-1, j0)$ 点越远，闭环系统的相对稳定性越高。

系统的相对稳定性通常用相角裕度 γ 和幅值裕度 K_g 来衡量。

相角裕度 γ 和幅值裕度 K_g

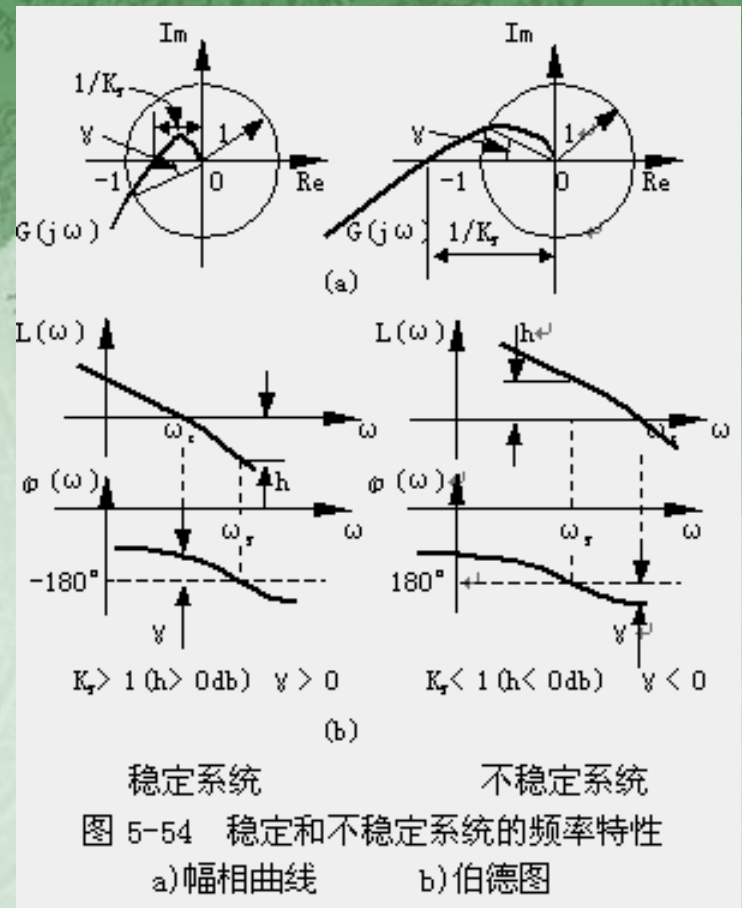
相角裕度 γ

在频率特性上对应于幅值

$A(\omega)=1$ 的角频率称为剪切频率 ω_c (或称截止频率), 在剪切频率 ω_c 处, 使系统达到稳定的临界状态所要附加的相角迟后量, 称为相角裕度, 以 γ 或 PM 表示。不难看出 $\gamma = 180^\circ + \phi(\omega_c)$

幅值裕度 K_g

在频率特性上对应于相角 $\phi(\omega) = -\pi$ 弧度处的角频率称为相角交界频率 ω_g , 开环幅频特性的倒数 $1/A(\omega_g)$ 称为幅值裕度, 以 K_g 或 GM 表示。即:
$$K_g = \frac{1}{A(\omega_g)}$$



它是一个系数，若开环增益增加该系数倍，则开环频率特性曲线将穿过 $(-1, j0)$ 点，闭环系统达到稳定的临界状态。

在伯德图上，幅值裕度用分贝数来表示：

$$h = -20 \lg A(\omega_g) \quad (\text{db})$$

对于一个稳定的最小相位系统，其相角裕度应为正值，幅值裕度应大于1（或大于0分贝），图5-54中给出了稳定系统和不稳定系统的频率特性，并标明了其相角和幅值裕度，请读者分析比较。

严格地讲，应当同时给出相角裕度和幅值裕度，才能确定系统的相对稳定性。但在粗略估计系统的暂态响应指标时，有时主要对相角裕度提出要求。

保持适当的稳定裕度，可以预防系统中元件性能变化可能带来的不利影响。为了得到较满意的暂态响应，一般相角裕度应当在 30° 至 70° 之间，而幅值裕度应大于6db。

对于最小相位系统, 开环对数幅频和对数相频曲线存在单值对应关系. 当要求相角裕度在 30° 至 70° 之间时, 意味着开环对数幅频曲线在截止频率 ω_c 附近的斜率应大于 -40db/dec , 且有一定的宽度. 在大多数实际系统中, 要求斜率为 -20 db/dec , 如果此斜率设计为 -40db/dec . 系统即使稳定, 相角裕度也过小. 如果此斜率为 -60db/dec 或更小, 则系统是不稳定的。

例5-14 一单位负反馈控制系统，
其开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s/5+1)}$$

试分别求 $K=2$ 和 $K=20$ 时，系统的
相角裕度和幅值裕度的分贝

解。系统的开环对数频率特性
： 曲线如图5-55所示。

由曲线2和曲线3可知，

$K=2$ 时相角裕度和幅值裕度的分贝值是 $\gamma = 24^\circ$ ，
 $h = 10$ (db)。对应的闭环系统是稳定的。

$K=20$ 时，由曲线2和曲线3可知， $\gamma = -24^\circ$ ， $h = -10$ (db)。故对应的闭环系统是不稳定的。

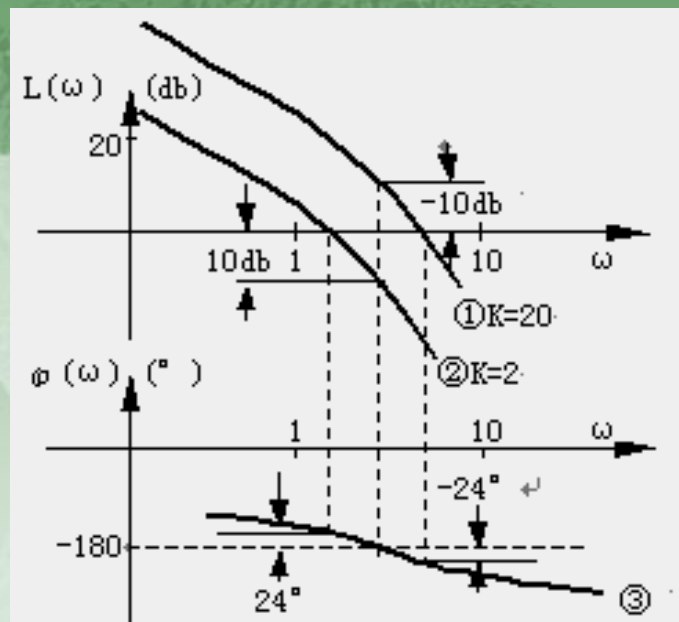


图 5-55 例 5-14 的伯德图

5-5 系统的闭环频率特性

在系统开环频率特性已知的情况下，采用图解法或计算机分析方法，可以求出系统的闭环频率特性。本节介绍前一种方法。

对于单位反馈系统开环频率特性和闭环频率特性之间关系为：
$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$$

根据上式，可以用图解法求闭环频率特性。

设系统的开环频率特性如图5-56所示。由图可见，当 $\omega = \omega_1$ 时

$$G(j\omega) = \overline{OA} = |\overline{OA}| e^{j\varphi}$$

$$1+G(j\omega) = \overline{PA} = |\overline{PA}| e^{j\theta}$$

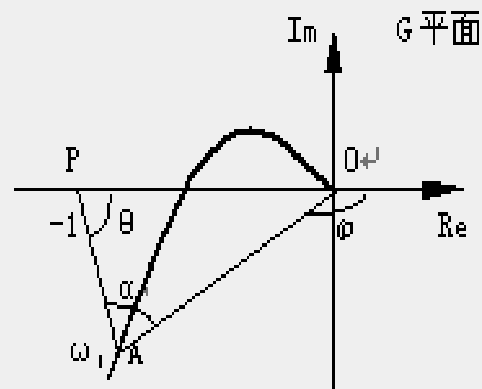


图 5-56 用图解法求闭环频率特性

上式表示， $\omega = \omega_1$ 时闭环频率特性的幅值等于向量 \overline{OA} 与 \overline{PA} 幅值之比，而闭环频率特性的相角等于 $(\phi - \theta) = \alpha$ 。这样，测量出不同频率处向量的大小和相角，就可以求出闭环频率特性。

上述图解法虽能说明 $C(j\omega)/R(j\omega)$ 和 $G(j\omega)$ 的几何关系，但在工程中使用并不方便。实际上比较常用的是等M圆图和等N圆图以及尼柯尔斯图线。

等M圆图 设单位反馈系统的开环频率特性 $G(j\omega)$
为： $G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$

则闭环频率特性
为： $\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \frac{X+jY}{1+X+jY} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)}$

式
中：

$$M = \frac{|X + jY|}{|1 + X + jY|} = \left[\frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2} \right]^{1/2}$$

$$M^2 = \frac{X^2 + Y^2}{(1 + X)^2 + Y^2}$$

$$\left(X + \frac{M^2}{M^2 - 1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2 - 1)^2}$$

是一个圆的方程，其圆心坐标和半径分别为：

$$X_0 = \frac{-M^2}{M^2 - 1}, Y_0 = 0, r_0 = \frac{M}{|M^2 - 1|}$$

给定不同的M值，便可以得到一族圆，如图5-57(a)所示。

图5-57(a)称为等M圆。

由图可见，当 $M > 1$ 时，M圆的半径随着M值的增大而减小。位于负实轴上的圆心不断向 $(-1, j0)$ 点靠近。

$M \rightarrow \infty$ 时， $r_0 = 0$ ， $X_0 = -1$ ，等M圆收敛于 $(-1, j0)$ 点。

当 $M = 1$ 时， $r_0 = \infty$ ， $X_0 = -\infty$ ，说明 $M = 1$ 的等M圆为一个圆心在无穷远处，半径为无穷大之圆，它实际上是一条平行于Y轴的直线，与X轴的交点坐标为 $X|_{Y=0} = -1/2$ 。

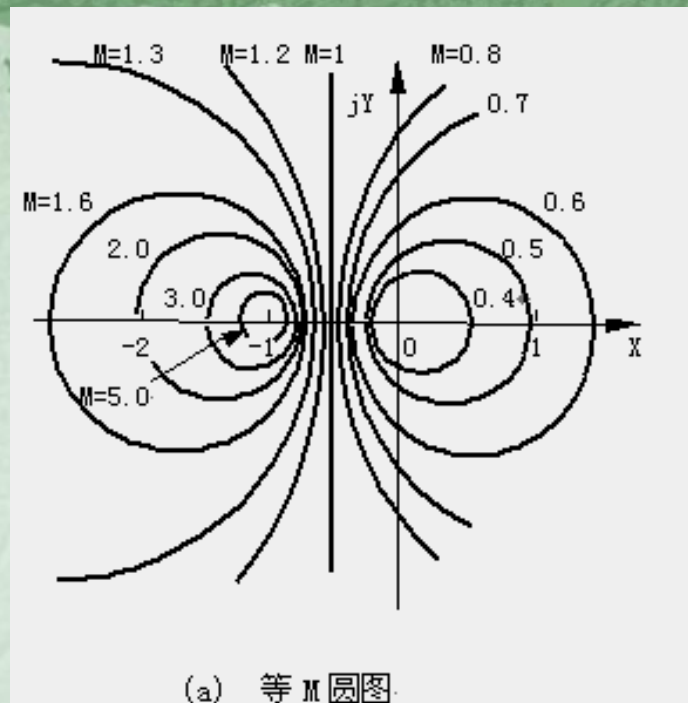


图5-57 等M圆图和等N圆图

当 $M < 1$ 时，M圆的半径随着M值的减小而减小，其位于正实轴上的圆心不断向坐标原点靠近。 $M = 0$ 时， $r_0 = 0$ ， $X_0 = 0$ ，等M圆最后收敛于坐标原点。

等N圆图

闭环频率特性的相角 $\alpha(\omega)$

可用下式表示:

$$\alpha(\omega) = \angle \left(\frac{X + jY}{1 + X + jY} \right)$$

$$= \arctg \frac{Y}{X} - \arctg \frac{Y}{1+X}$$

令 $N = \operatorname{tg} \alpha$, 则:

$$N = \frac{Y}{X^2 + X + Y^2}$$

$$\left(X + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{2N} \right)^2 = \frac{1}{4} \frac{N^2 + 1}{N^2}$$

当 N 为常数 (相应的 α 也为常数) 时, 上式为圆的方程, 圆心

位于 $X_0 = -\frac{1}{2}, Y_0 = \frac{1}{2N}$ 半径 $r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}}$

为:
给出不同的 N 值, 可以画出一族等 N 圆, 如图 5-57 (b) 所示。

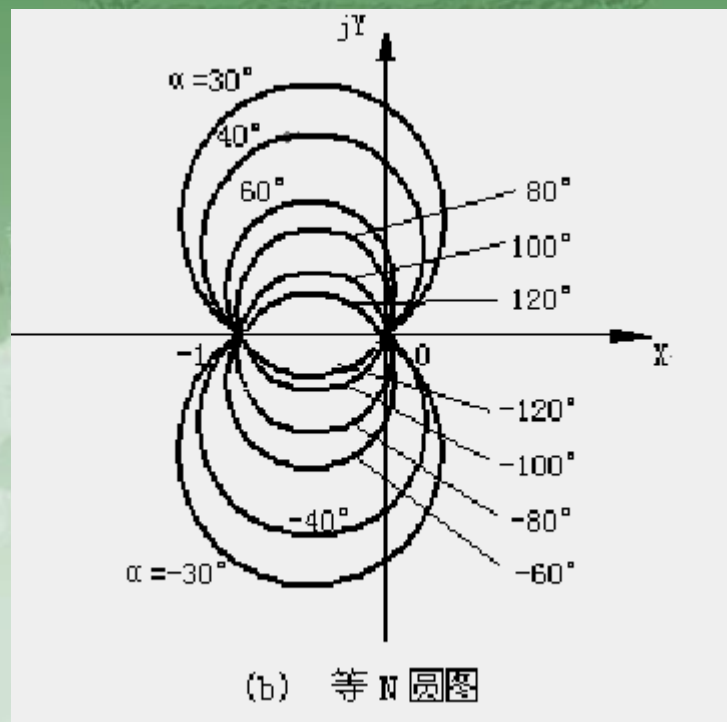


图 5-57 等M圆图和等N圆图

由图可见，无论 N 取值如何，所有的等 N 圆都通过坐标原点以及 $(-1, j0)$ 点。从图5-56中可以看出，在横轴的上方有 $\alpha > 0$ ，而在横轴的下方则有 $\alpha < 0$ ，所以在等 N 圆图中，横轴上方 α 取正值，横轴下方 α 取负值，当然在具体应用时， α 的值加减 360° 的整数倍也可。

利用等 M 圆图和等 N 圆图，可以根据开环幅相曲线与各圆的交点，求得各交点处频率所对应的闭环幅频特性 $M(\omega)$ 值和闭环相频特性 $\alpha(\omega) = \text{tg}^{-1}N$ 值，从而确定出系统的闭环频率特性。

例5-15 求开环频率特性

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(0.2j\omega+1)(0.05j\omega+1)}$$

的单位负反馈系统的闭环幅频特性。

解 将系统的开环幅相曲线画在等M圆图(见图5-58a)上, 根据其与各圆的交点, 求出各 ω 值所对应的M值, 即可绘出图5-58b所示的闭环幅频特性。

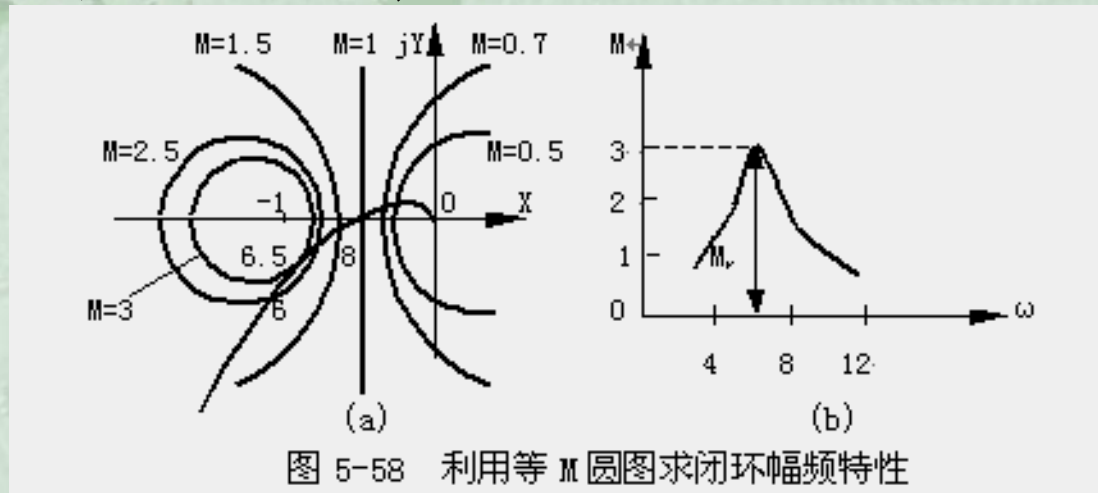


图 5-58 利用等 M 圆图求闭环幅频特性

由图5-58a可以看出, $M=3$ 的圆与幅相曲线相切, 对应频率为 $\omega = \omega_r$, 因此当 $\omega = \omega_r$ 时, 闭环频率特性幅值达到极大值3。与开环幅相曲线相切、且有最小半径的圆的值, 即为闭环幅频特性的谐振峰值。

尼柯尔斯图线

由于开环对数幅频特性和相频特性曲线比较简便，因此，有时希望根据系统的伯德图去求系统的闭环频率特性。尼柯尔斯把等M圆图和等N圆图移植到伯德图上，形成了尼柯尔斯图。

设系统的开环频率特性 $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

为：
则单位反馈系统的闭环频率特性为：

$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{Ae^{j\varphi}}{1 + Ae^{j\varphi}}$$

$$Me^{j\alpha}(1 + Ae^{j\varphi}) = Ae^{j\varphi}$$

$$Me^{j(\alpha-\varphi)} + MAe^{j\alpha} = A$$

根据欧拉公式将上式中的指数项展开，

得：
 $M\cos(\alpha - \varphi) + jM\sin(\alpha - \varphi) + MA\cos\alpha + jMA\sin\alpha = A$

上式两边的实数和虚数部分分别相等，有：

$$\sin(\alpha - \varphi) + A \sin \alpha = 0$$

由此可得：

$$A(\omega) = \frac{\sin[\varphi(\omega) - \alpha(\omega)]}{\sin \alpha(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{\sin[\varphi(\omega) - \alpha(\omega)]}{\sin \alpha(\omega)}$$

如令上式中的 α 为常数，就可得到 $L(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 之间的方程。给定不同的 α 值，可得一组等 α 线。

由
$$\frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{Ae^{j\varphi}}{1 + Ae^{j\varphi}}$$

$$Me^{j\alpha}(1 + Ae^{j\varphi}) = Ae^{j\varphi}$$

$$Me^{j(\alpha-\varphi)} + MAe^{j\alpha} = A$$

可改写
为：

$$Me^{j\alpha} = \left(1 + \frac{e^{-j\varphi}}{A}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\cos\varphi}{A} - j\frac{\sin\varphi}{A}\right)^{-1}$$

$$M = \left[\left(1 + \frac{1}{A^2} + \frac{2\cos\varphi}{A}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-1}$$

$$M^{-2} = 1 + \frac{1}{A^2} + \frac{2\cos\varphi}{A}$$

$$\frac{1 - M^2}{M^2} = \frac{1 + 2A\cos\varphi}{A^2}$$

$$A^2 - 2A \frac{M^2}{1-M^2} \cos \varphi - \frac{M^2}{1-M^2} = 0$$

对以上方程求解, 可得A的两个根:

$$A_{1,2} = \frac{\cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{\cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

如令M为常数, φ 为变量, 依次计算每一 φ 值相对应的 $L(\omega)$ 值, 就可得到一条等M线。

设定不同的M值, 就可得到一组等M曲线。将等M线和等 α 线组合在对数幅相图上, 就构成图5-59所示的尼柯尔斯图线。

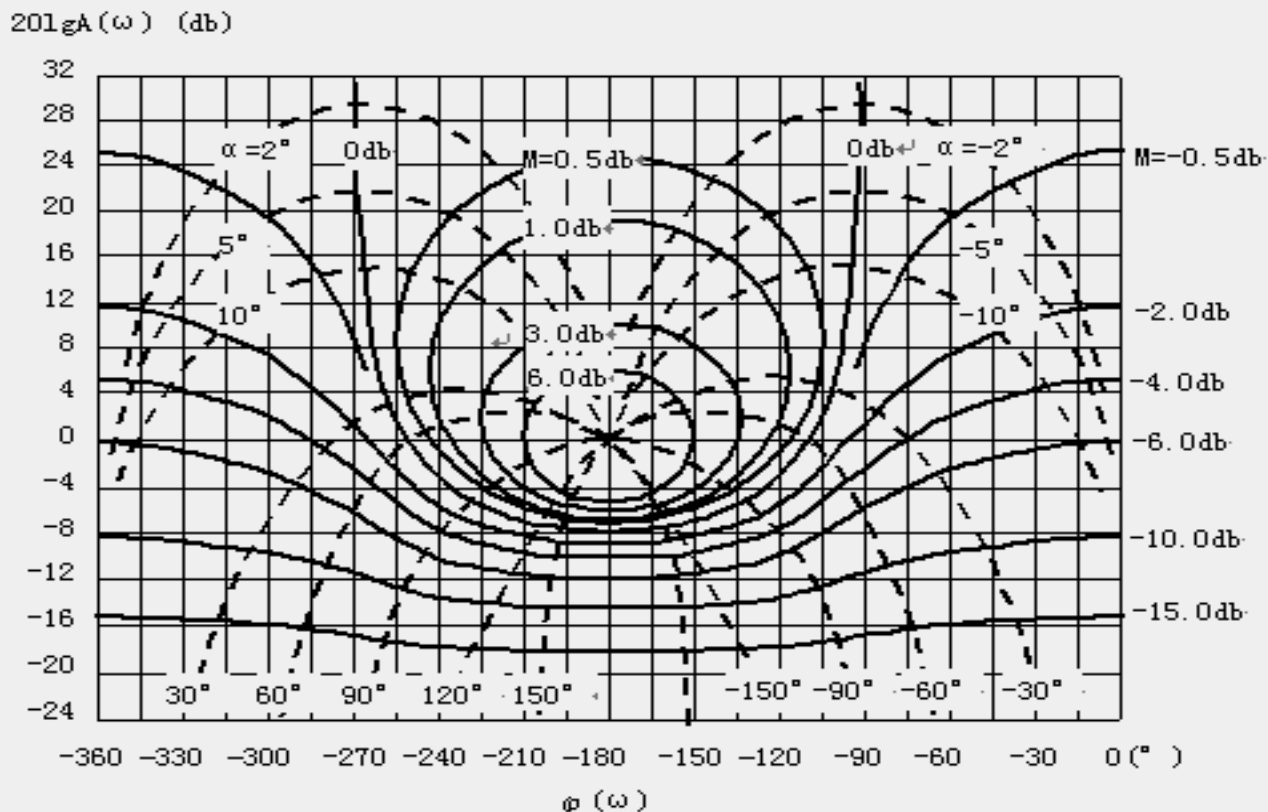


图 5-59 尼柯尔斯图线

应用尼柯尔斯图线，可以根据单位反馈系统的开环对数幅频和相频曲线，确定闭环对数幅频和相频曲线。例如，由 $\omega = \omega_1$ 时的 $L(\omega_1) = 20\lg A(\omega_1)$ 和 $\phi(\omega_1)$ ，在尼柯尔斯图线上，就可查得对应的 $20\lg M(\omega_1)$ 和 $\alpha(\omega_1)$ 。

如果 $A \gg 1$ ，闭环频率特性可近似地写成：

$$Me^{j\alpha} = \frac{Ae^{j\phi}}{1 + Ae^{j\phi}} \approx 1$$

于是有 $20\lg M \approx 0$ 和 $\alpha \approx 0^\circ$ 。因此不必将图线向上延伸到 $20\lg A > (25 \sim 30)$ db。当 $20\lg A > 25$ db时，可以取 $20\lg M = 0$ 和 $\alpha = 0^\circ$ 。

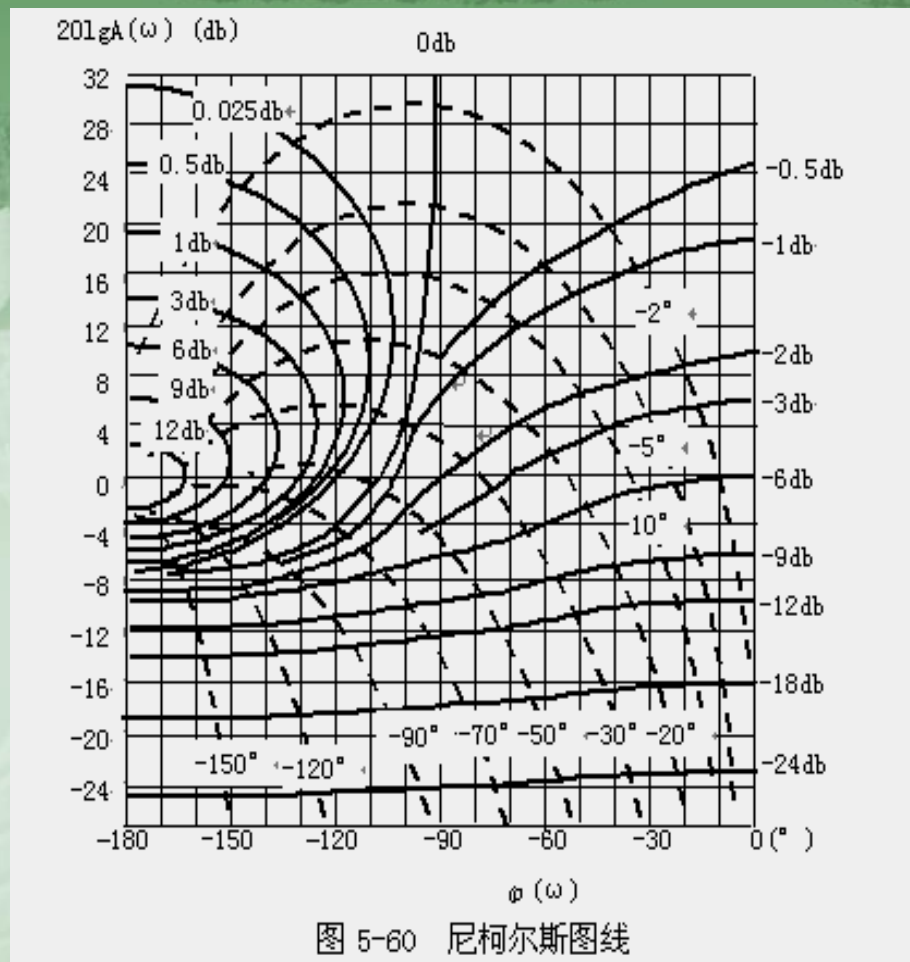
$A \ll 1$ ，则
有：

$$Me^{j\alpha} = \frac{Ae^{j\phi}}{1 + Ae^{j\phi}} \approx Ae^{j\phi}$$

这意味着，开环和闭环频率特性近似。

于是，也不必将图线向下延伸到 $20\lg A < (-25 \sim -30)$ db。当 $20\lg A < -25$ db时，可以取 $20\lg M = 20\lg A$ 和 $\alpha = \phi$ 。

由于等M圆图和等N圆图对称于负实轴，因此图5-59所示的尼柯尔斯图线对称于 $\phi = -180^\circ$ 线。对称的等 $20\lg M$ 线对应的 $20\lg M$ 绝对值和符号都相同；而对于对称的等 α 线， α 的绝对值相同但符号相反，例如 $\alpha = -60^\circ$ 线与 $\phi = -180^\circ$ 线左边的 $\alpha = 60^\circ$ （即 $\alpha = 300^\circ$ ）线对称。因此，只需绘制 0° 到 -180° 的半边图线即可，如图5-60所示。



例5-16 设单位反馈系统的开环频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1+0.1j\omega)(1+0.05j\omega)}$$

试用尼柯尔斯图求系统的闭环频率特性。根据系统的开环频率特性，可以作出系统的开环对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线，如图5-61所示，从图5-61中可以查得不同 ω 对应的 $20\lg A(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ ，从而在尼柯尔斯图上作出此系统的开环对数幅相曲线如图5-62所示。根据其于等M线和等 α 线的交点，可以求出系统的闭环频率特性。

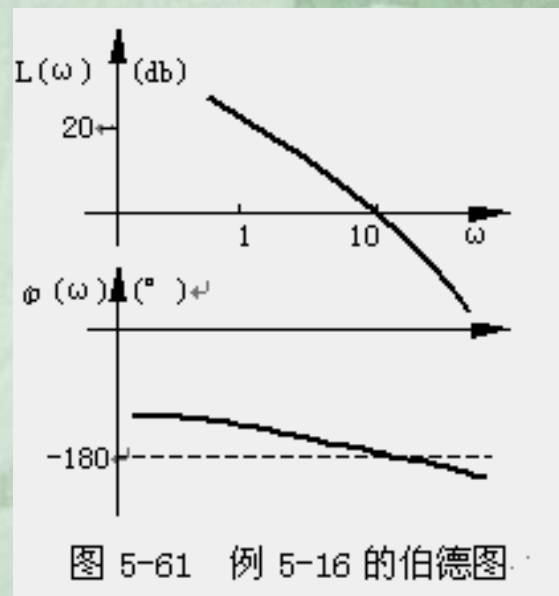


图 5-61 例 5-16 的伯德图

由图5-62可见，开环对数幅相曲线与M为5db的M圆相切，切点处的频率为 $\omega=8\text{s}^{-1}$ 。这意味着，闭环频率特性之峰值 $M_r=5\text{db}$ ，对应的频率为 $\omega_r=8\text{s}^{-1}$ 。开环特性与M值为-3db的M圆相交点之频率为 10.3s^{-1} 。依此类推，根据各个交点的M、 α 和 ω 值，可以绘出系统的闭环频率特性如图5-63所示

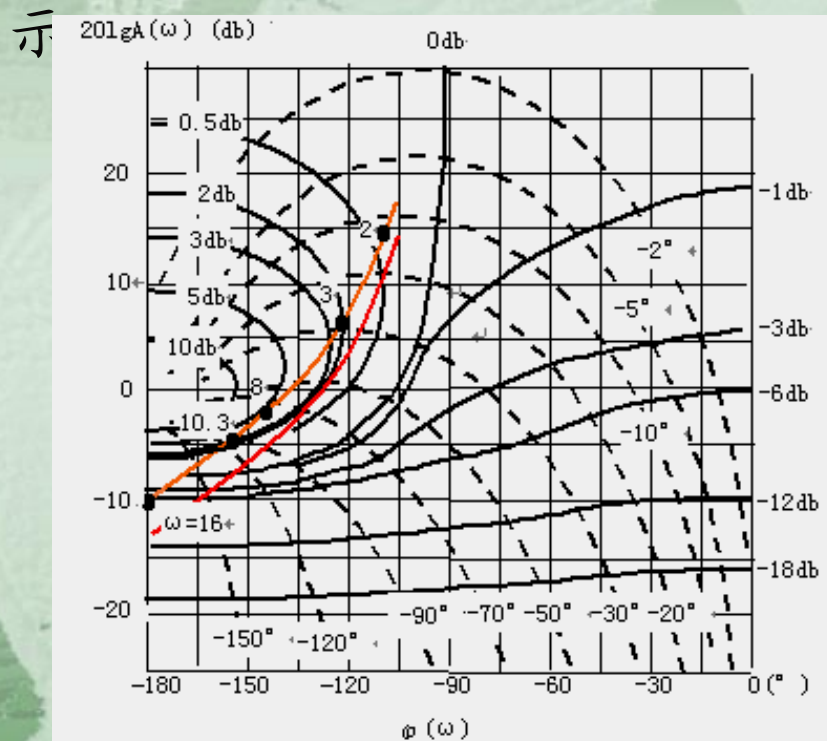


图 5-62 用尼柯尔斯图线求闭环频率特性

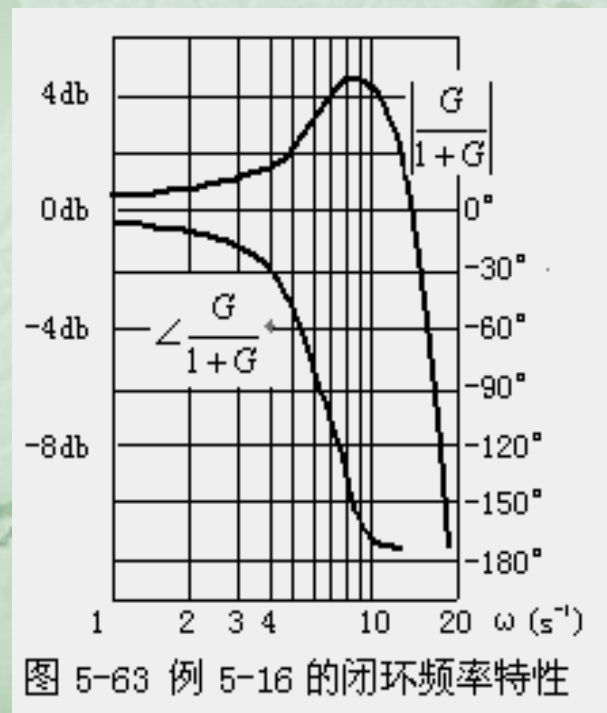


图 5-63 例 5-16 的闭环频率特性

利用尼柯尔斯图可以比较方便地调整系统的增益以得到希望的 M_r 值。例如，要求 M_r 为2db时，只须将开环对数幅相曲线平行下移，直到与M为2db的M圆相切为止。这时开环对数幅相曲线下移了约3.5db，相当于使系统的开环增益减小1.5倍，即使K由10降至6.63。

非单位反馈系统的闭环频率特性

对于单位反馈系统 $\Phi(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)}$ 。

在已知开环频率特性 $G(j\omega)$ 的情况下，可以利用等M圆图、等N圆图或尼柯尔斯图线求取系统的闭环频率特

性。对于非单位反馈系统，由于闭环频率特性为：

$$\begin{aligned}\Phi(j\omega) &= \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \\ &= \frac{1}{H(j\omega)} \left[\frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)} \right]\end{aligned}$$

因此，若已知开环频率特性 $G(j\omega)H(j\omega)$ ，可以先求取

$$\frac{G(j\omega)H(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}$$

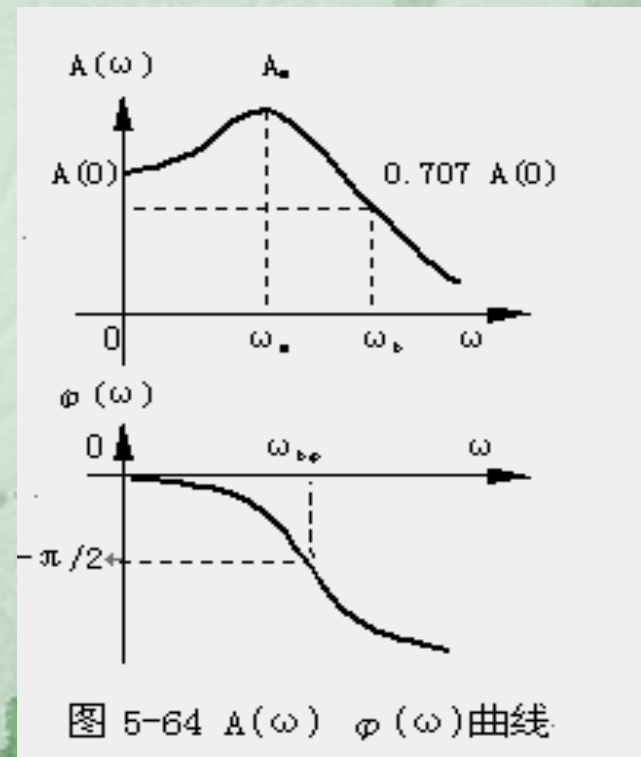
然后再求闭环频率特性 $\Phi(j\omega)$ 。

5-6 系统时域指标估算

针对系统的闭环频率特性可定义一组频域性能指标。

频域性能指标

频率特性曲线在数值上和形状上的一般特点,常用几个特征量来表示,即峰值 A_m (或 M_r)、频带 ω_b 、相频宽 $\omega_{b\phi}$ 和零频幅比 $A(0)$,如图5-64所示。这些特征量又称频域性能指标,它们在很大程度上能够间接地表明系统动态过程的品质。



1: 峰值 A_m 是指幅频特性 $A(\omega)$ 的最大值。峰值大,表明系统对某个频率的正弦信号反映强烈,有共振的倾向。这意味着系统的平稳性较差,阶跃响应将有过大的超调量。一般要求

$A_m < 1.5A(0)$
2: 频带 ω_b 是指幅频特性 $A(\omega)$ 的数值衰减到 $0.707 A(0)$ 时所对应的频率。 ω_b 高,则 $A(\omega)$ 曲线由 $A(0)$ 到 $0.707 A(0)$ 所占据的频率区间较宽,一方面表明系统重现输入信号的能力强,这意味着系统的快速性好,阶跃响应的上升时间和调节时间短;另一方面系统抑制输入端高频声的能力就弱。设计中应折衷考

虑。
3: 相频宽 $\omega_{b\phi}$ 是指相频特性 $\phi(\omega)$ 等于 $-\pi/2$ 时所对应的频率,也可以作为快速性的指标。相频 $\phi(\omega)$ 为负值,表明系统的稳态输出在相位上落后于输入。相频宽 $\omega_{b\phi}$ 高一些,即输入信号的频率较高,变化较快时,输出才落后 $\pi/2$,这意味着系统反映迅速,快速性好。

4: $A(0)$ 是指零频 ($\omega=0$) 时的振幅比。输入一定幅值的零频信号, 即直流或常值信号, 若 $A(0)=1$, 则表明系统响应的终值等于输入, 静差为零。如 $A(0) \neq 1$, 表明系统有静差。所以 $A(0)$ 与 1 相差之大小, 反映了系统的稳态精度, $A(0)$ 越接近 1, 系统的精度越高。

频带宽, 峰值小, 过渡过程性能好。这是稳定系统动态响应的一般准则。

带宽频率

带宽频率 ω_b 是指系统闭环幅频特性下降到频率为零时的分贝值以下3分贝时所对应的频率，通常把 $0 \leq \omega \leq \omega_b$ 的频率范围称为系统带宽。带宽是频域中的一项重要指标。带宽大，表明系统能通过较宽频率的输入；带宽小，系统只能通过较低的输入。因此，带宽大的系统，一方面重现输入信号的能力强，系统响应速度快；另一方面，抑制输入端高频噪声的能力就弱。设计中应折中考虑。

经验表明，闭环对数幅频特性曲线带宽频率附近斜率越小，则曲线越陡峭，系统从噪声中区别有用信号的特性越好，但是，一般这也意味着谐振峰值 M_r 较大，因而系统稳定程度较差。

一阶和二阶系统，带宽和瞬态响应速度的关系是很明确的。

一阶系统，若其传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

按定义，可求出系统带宽频率：

$$\omega_b = \frac{1}{T}$$

显然，带宽频率和上升时间、调节时间成反比，说明带宽大的系统响应速度快。对于二阶系统，也有类似结论。

设欠阻尼二阶系统的传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

系统幅频特性为：

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

根据带宽频率的定义， $\omega = \omega_b$ 时，系统幅值应是零频率幅值的0.707倍。于是可得：

$$\omega_b = \omega_n \left[\left(1 - 2\xi^2\right) + \sqrt{\left(1 - 2\xi^2\right)^2 + 1} \right]^{1/2}$$

可见， ω_b 正比于 ω_n ，必反比于上升时间和调节时间。对于高阶系统，带宽和系统参数之间的关系较为复杂。一般定性地认为，带宽大的系统，响应速度就快。

频率尺度与时间尺度的反比性质

带宽和响应速度的反比关系，可借助频率尺度和时间尺度的反比性质予以证明。

如果两个系统存在以下关系： $\Phi_1(j\omega) = \Phi_2(j\frac{\omega}{\lambda})$
式中 λ 为任意正数，则两个系统的单位阶跃响应存在下列关系： $h_1(t) = h_2(\lambda t)$

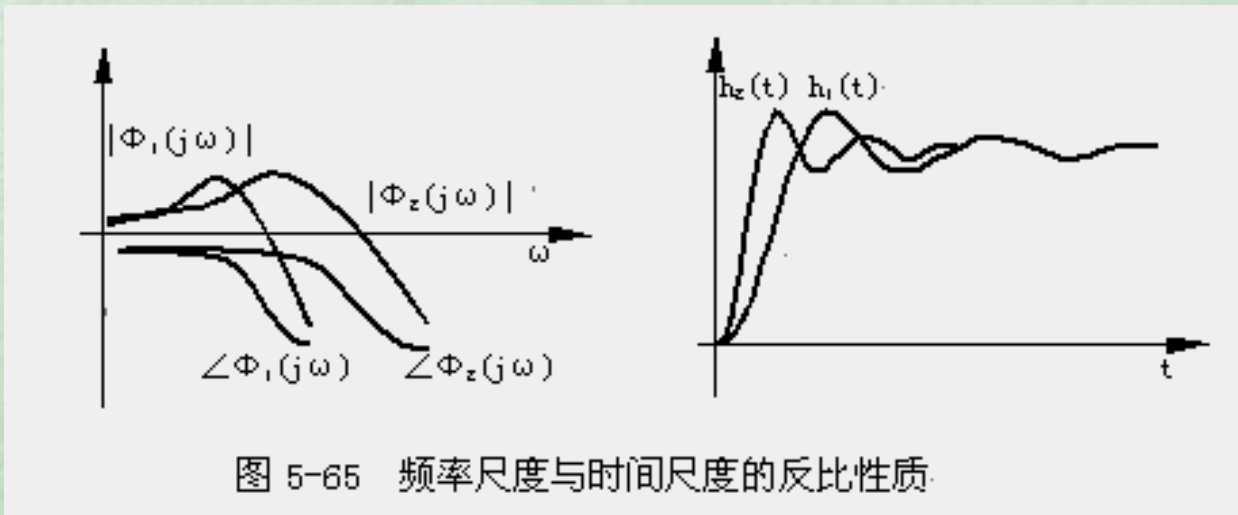


图 5-65 频率尺度与时间尺度的反比性质

此性质的含义是：系统的频率特性放宽几倍，单位阶跃响应就加快几倍。

以上性质证明如下。

设两个系统的单位阶跃响应分别为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ ，相应的拉氏变换为 $H_1(s)$ 和 $H_2(s)$ ，则有：

$$H_1(s) = \frac{1}{s} \Phi_1(s)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s} \Phi_2(s)$$

应用拉氏变换相似定理，可得：

$$L[h_2(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\frac{s}{\lambda}} \Phi_2\left(\frac{s}{\lambda}\right) = \frac{1}{s} \Phi_2\left(\frac{s}{\lambda}\right) = \frac{1}{s} \Phi_1(s) = H_1(s)$$

故有： $h_1(t) = h_2(\lambda t)$

需要指出的是，系统的截止频率 ω_c 和带宽频率 ω_b 密切相关。如果两个系统稳定程度相仿，则 ω_c 大的系统， ω_b 也大； ω_c 小的系统， ω_b 也小。即 ω_c 和系统的响应速度也存在反比关系。因此， ω_c 也常用来衡量系统的响应速度。

利用线性定常系统的闭环频率特性或开环频率特性均可以估算系统的时域性能指标。

由 γ 确定二阶系统时域指标

设典型二阶系统

的开环传递函数

为:

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

或表示

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

式中 $\omega_n = \sqrt{K/T}$, $\xi = 1/(2\sqrt{KT})$,

开环频率特性曲线如图5-66所示。

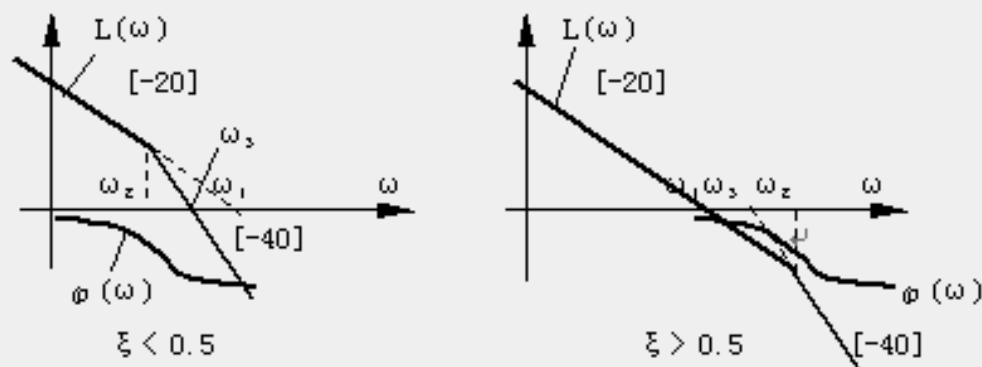


图 5-66 典型二阶系统的开环频率特性曲线

为了寻找 γ 和时域指标的关系，先求 γ 和 ξ 的关系。

由于 $|G(j\omega_c)|=1$ ，可得：

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\xi^2 \omega_n^2}} = 1$$

$$\omega_c = \omega_n \left(\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

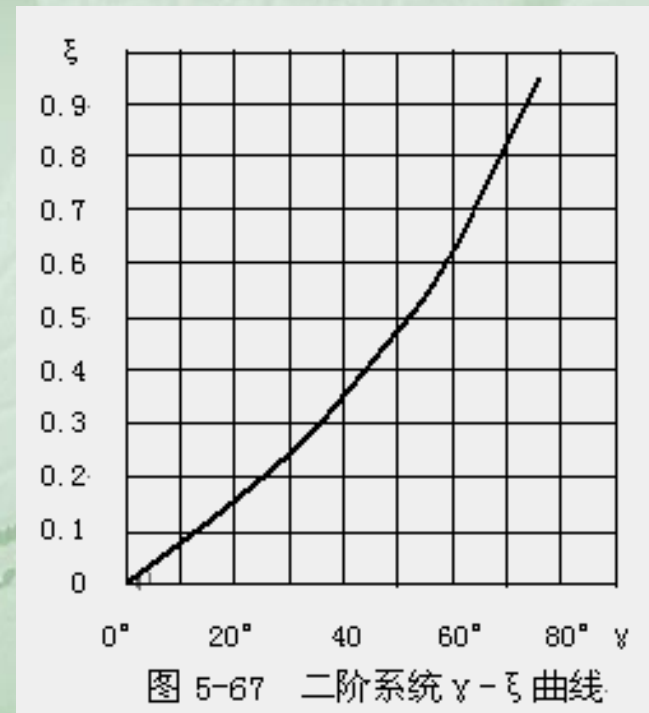
根据相角裕度的定义，得：

$$\gamma = 180^\circ + \angle \underline{G(j\omega_c)} = \arctg \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

$$\gamma = \arctg \left[2\xi \left(\frac{1}{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

此式表明，二阶系统的相角裕度 γ 与阻尼比 ξ 之间存在一一对应关系。图5-67是根据上式绘制的 $\gamma - \xi$ 曲线。由曲线看到： ξ 越大， γ 就越大； ξ 越小， γ 就越小。为使二阶系统的过渡过程不致于振荡得太厉害及调节时间过长，一般希望 $30^\circ \leq \gamma \leq 70^\circ$ 。

有了图5-67的 $\gamma - \xi$ 曲线，
由 γ 估算时域指标方法如
1: 由开环对数频率特性曲线
确定 γ ；
2: 由图5-67，按 γ 查对应的
 ξ ；



3: 由 ξ 查图, 即得 $\sigma\%$;

由 ξ 可求得估计式 $\omega_n t_s = 3.5 / \xi$ 。如果能够确定自然频率 ω_n , 则调节时间 $t_s = (\omega_n t_s) / \omega_n$ 。

自然频率 ω_n 可从近似开环对数幅频曲线确定。由图5-66看到, 斜率为 -40db/dec 线 (或其延长线) 与 0 零分贝线交点 ω_3 正是 ω_1 与 ω_2 的几何平均值, 而 ω_1 与 ω_2 分别是:

$$\omega_1 = K, \omega_2 = \frac{1}{T}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{\frac{K}{T}} = \omega_n$$

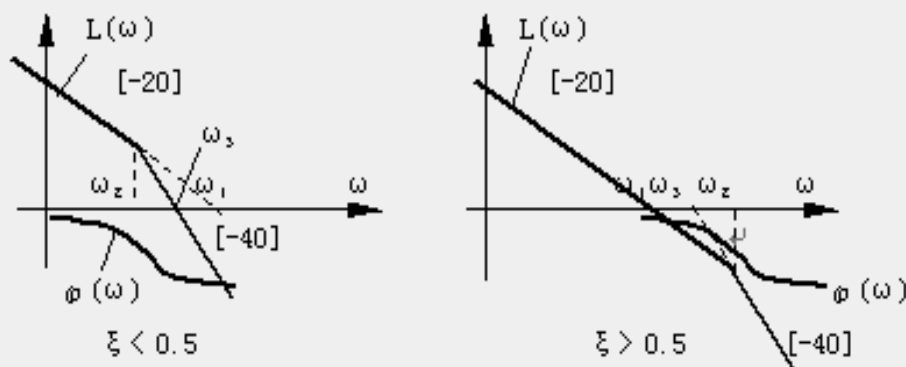


图 5-66 典型二阶系统的开环频率特性曲线

也即在近似对数幅频曲线上, 斜率为 -40db/dec 的直线 (或其延长线) 与零分贝线交点就是自然频率 ω_n 。

例5-17 一单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s) = \frac{7}{s(0.087s+1)}$$

试用相角裕度 γ 估算过渡过程指标 $\sigma\%$ 和

t_s 。系统开环对数频率特性曲线如图

5-68所示。由图可见相角裕度

$\gamma = 60^\circ$ ，而斜率为 -40 db/dec 直

线的延长线与零分贝线交点频率

为9，故自然频率 $\omega_n = 9$ 。

根据 $\gamma = 60^\circ$ 查图5-67，阻尼比 $\xi = 0.62$ ，超调量

$\sigma\% = 8\%$ ；且 $\omega_n t_s = 3.5 / \xi = 5.65$ ；于是调节时间

$t_s = 5.65 / \omega_n = 5.65 / 9 = 0.63$ 秒。

直接求解微分方程，绘制 $h(t)$ 曲线，得到的结果是

$\sigma\% = 7.5\%$ ； $t_s = 0.59$ 秒，两者基本一致。

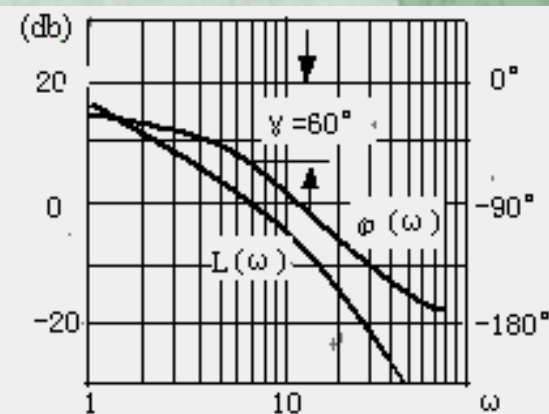


图 5-68 例 5-17 的开环频率特性曲线

应用相角裕度 γ 估算高阶系统时域指标

M_r 与 $\sigma\%$ 和 t_s 的关系

研究振荡环节频率特性时曾指出，振荡性指标 M_r 和阻尼比 ξ 有着确定的关系。因此 M_r 和时域指标之间的关系，也是确定的。

高阶系统振荡性指标和时域指标没有准确的关系式。但是，通过对大量系统的研究，归纳了以下两个近似关系式：

$$\sigma = 0.16 + 0.4 (M_r - 1) \quad (1 \leq M_r \leq 1.8)$$

$$t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} \text{ (秒)}$$

$$\text{式中 } K = 2 + 1.5 (M_r - 1) + 2.5 (M_r - 1)^2 \quad (1 \leq M_r \leq 1.8)$$

上述两式的图示关系，如图5-69所示。可以看出，高阶系统的 $\sigma\%$ 随 M_r 增大而增大。而调节时间 t_s 随 M_r 增大而增大，且随 ω_c 增大而减小。 t_s 和 ω_c 的反比关系，正是频率尺度和时间尺度反比性质的体现。

应用以上公式估算高阶系统时域指标，一般偏保守，实际性能比估算结果要好。但初步设计时，应用这组公式，便于留有一定余地。公式中， M_r 可根据开环对数频率特性数据从尼柯尔斯图线上查得。

因为振荡性指标 M_r 和相角裕度 γ 都表征系统的稳定程度，那么能否找到 γ 和 M_r 的关系，直接由 γ 来估算时域指标？下面就研究 M_r 和 γ 的关系。

M_r 和 γ 的关系

单位反馈系统的闭环频率特性可用幅频和相频表示为：

$$\Phi(j\omega) = M(\omega) e^{j\alpha(\omega)}$$

而开环频率特性为：

$$G(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

式中，相频特性可表示成：

$$\phi(\omega) = -180^\circ + \gamma_d$$

这里， γ_d 表示不同频率时相角对 -180° 的偏移。当 $\omega = \omega_c$ 时， $\gamma_d = \gamma$ 。因此开环频率特性可写为：

$$G(j\omega) = A(\omega) e^{j(-180^\circ + \gamma_d)} = A(\omega) (-\cos \gamma_d - j \sin \gamma_d)$$

闭环幅频特性:

$$M(\omega) = \frac{|G(j\omega)|}{|1+G(j\omega)|} = \frac{A(\omega)}{|1-A(\omega)\cos\gamma_d - jA(\omega)\sin\gamma_d|}$$
$$= \frac{A(\omega)}{\sqrt{1-2A(\omega)\cos\gamma_d + A^2(\omega)}}$$

一般 $M(\omega)$ 极大值附近, γ_d 变化较小, 又 $M(\omega)$ 极大值发生在截止频率 ω_c 附近, 于是: $\cos\gamma_d \approx \cos\gamma = \text{常数}$

$$\text{令} \quad \frac{dM(\omega)}{dA(\omega)} = 0$$

$$\text{得:} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sin\gamma_d} \approx \frac{1}{\sin\gamma}$$

$$M_r \approx \frac{1}{\sin\gamma}$$

上式为 M_r 和 γ 的关系。 γ 较小时, 上式准确度较高。

γ 与 $\sigma\%$ 和 t_s 的关系

由 γ 估算时域指标公式为:

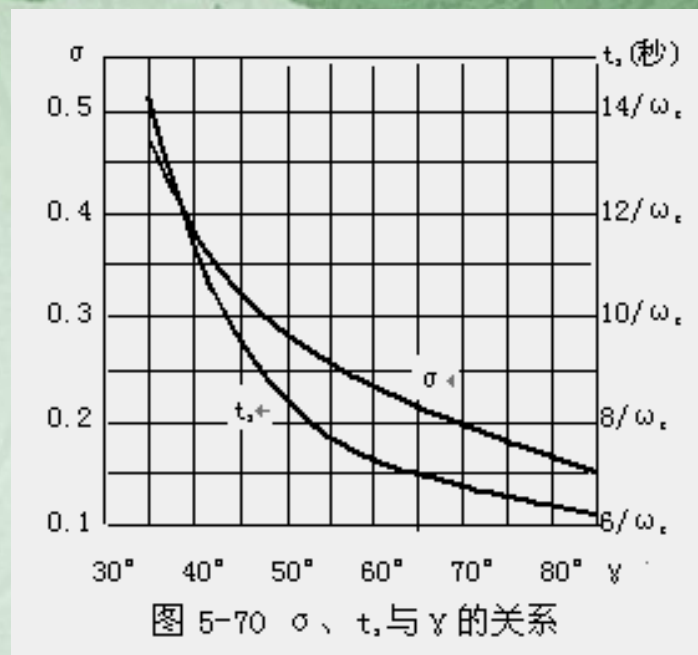
$$\sigma = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

$$(35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$$

$$t_s = \frac{K\pi}{\omega_c} \text{ (秒)}$$

$$K = 2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2$$

$$(35^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$$



根据以上公式绘制的 $\sigma - \gamma$ 和 $t_s - \gamma$ 曲线, 如图 5-70 所示。

根据闭环幅频特性形状估算时域指标

这里再介绍一个根据闭环幅频特性曲线形状估算时域指标的经验公式。公式适用于最小相位系统幅频曲线只有一个极大值或没有极大值的情况，公式是在电子模拟设备上，基于对许多线性系统的研究结果，用统计方法得出的。

若闭环幅频特性曲线如图5-71所示，则系统超调量和调节时间可以分别由以下公式计算

$$\sigma\% = [41 \ln(NF) + 17]\%$$

$$t_s = \frac{13.6F - 2.51}{\omega_6} \text{ (秒)}$$

式
中：

$$N = \frac{M(\frac{\omega_0}{4})}{M_0}, F = \frac{\omega_b M_r}{\omega_6 M_0}$$

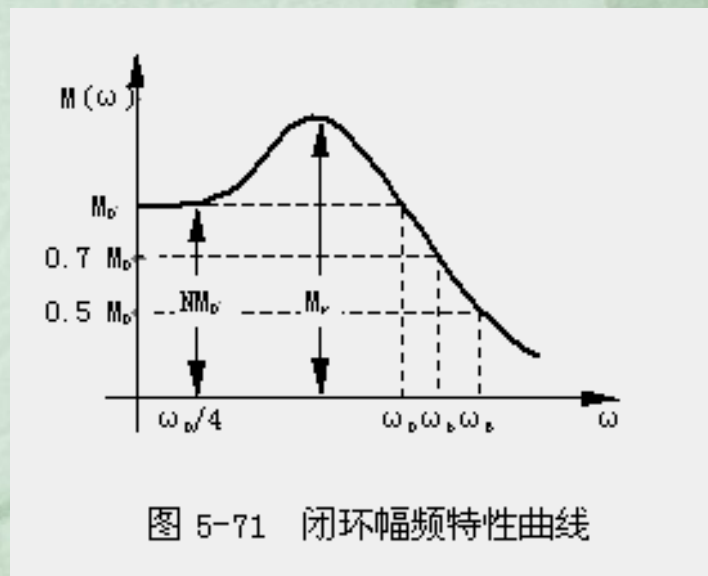


图 5-71 闭环幅频特性曲线

F为幅频特性曲线的形状参数。如果曲线是倾斜的，即极大值发生在 ω 为零的地方，则：

$$N = 1, F = \frac{\omega_b}{\omega_6}$$

开环频率特性和时域指标的关系

对于单位反馈系统来说，其开环、闭环传递函数的关系为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

系统的动态结构和参数，唯一地取决于开环传递函数 $G(s)$ ，因此，不经过计算闭环幅频 $M(\omega)$ 这一步骤，也可以直接由开环频率特性来判断闭环系统的动态响应。

由乃氏判据知，稳定系统的开环幅相特性 $G(j\omega)$ 曲线距离 $(-1, j0)$ 点的远近，反映了系统的稳定程度，即系统动态过程的平稳性。

而 $G(j\omega)$ 曲线靠近 $(-1, j0)$ 点的部位，相当于系统开环对数幅频曲线 $20\lg|G(j\omega)|$ 和0分贝线交点附近的区段。交点处的角频率称为截止频率 ω_c ，因此说 $20\lg|G(j\omega)|$ 在 ω_c 附近的特性，对闭环系统的 $\sigma\%$ 和 t_s 起着主要的影响。

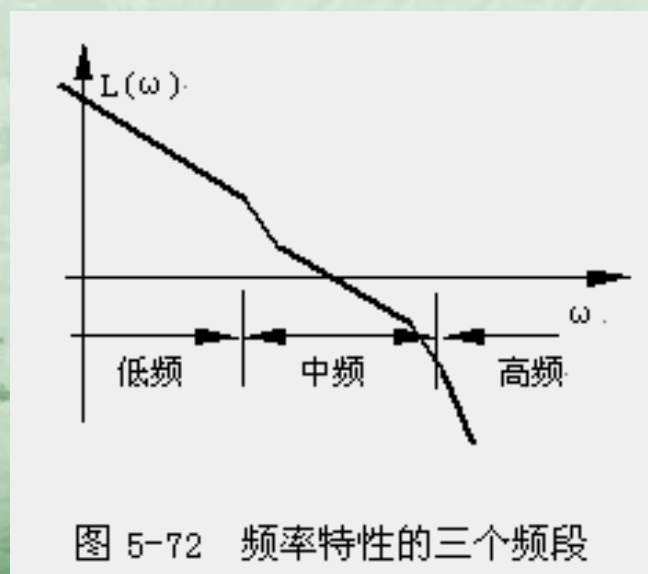


图 5-72 频率特性的三个频段

如图5-72所示，这一区段称为 $20\lg|G(j\omega)|$ 的中频段。另外，由时域分析法知，稳态误差主要决定于系统开环传递函数中积分环节的数目和开环增益，这反映在开环对数幅频曲线 $20\lg|G(j\omega)|$ 的低频段。

下面介绍“三频段”的概念。

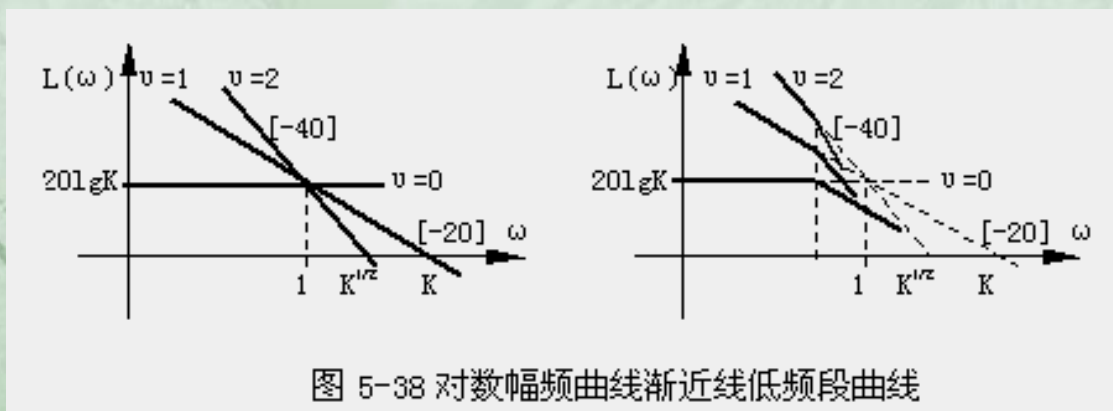
低频段

低频段通常是指 $20\lg|G(j\omega)|$ 的渐近线在第一个转折频率以前的区段，这一段特性完全由积分环节和开环增益决定

低频段的传递函数为 $G(s)=K/s^v$ ，则低频段的对数幅频特性为：

$$20\lg|G(j\omega)|=20\lg K - v \cdot 20\lg \omega$$

v 为不同值时，低频段对数幅频曲线的形状如图5-38所示，为斜率不等的一些直线，斜率为 $-20v \text{ db/dec}$ 。

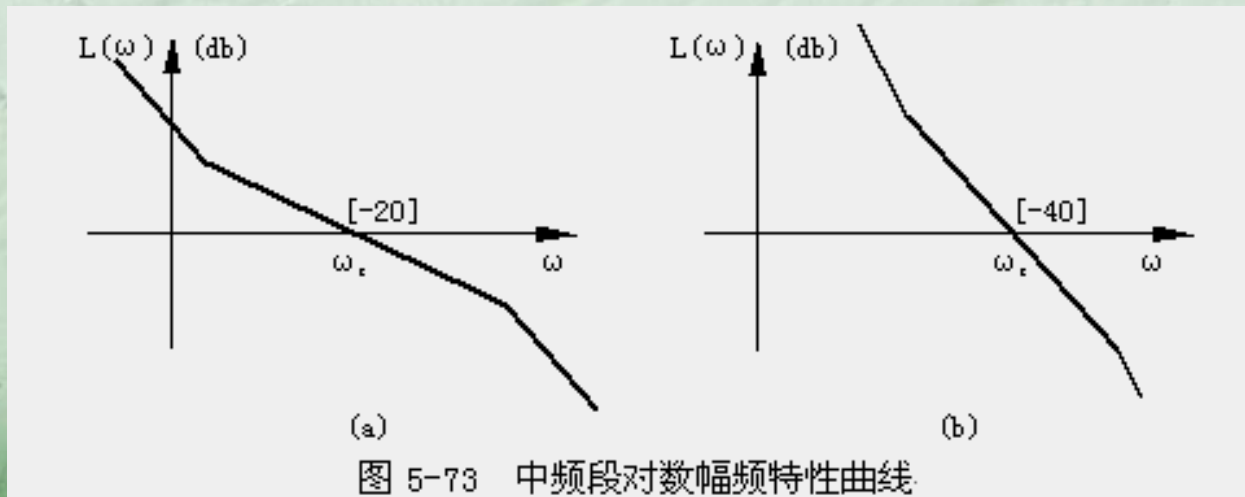


可以看出，低频段的斜率越小，位置越高，对应于系统积分环节数目越多，开环增益越大，则闭环系统在满足稳定的条件下，其稳态误差越小，说明系统的精度越高。

中频段

中频段是指开环对数幅频曲线 $20 \lg |G(j\omega)|$ 在截止频率 ω_c 附近 (或 0 分贝附近) 的区段, 这段特性集中反映了闭环系统动态响应的稳定性和快速性。下面在假定闭环系统稳定的条件下, 对两种极端情况进行分析。

1: 如果 $20 \lg |G(j\omega)|$ 曲线的中频段斜率为 $[-20]$, 且占据的频率区间较宽, 如图 5-73 (a) 所示, 若只从平稳性和快速性着眼, 可近似认为整个开环特性为 $[-20]$ 的直线, 其对应的开环传递函数为: $G(s) = \frac{K}{s} = \frac{\omega_c}{s}$



对于单位反馈系统，闭环传递函数为：
$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{s/\omega_c + 1}$$
这相当于一阶系统。其阶跃响应按指数规律变化，没有振荡，即有较高的稳定程度；而调节时间 $t_s = 3/\omega_c$ ，截止频率 ω_c 越高， t_s 越小，系统的快速性越好。

2: 如果 $20 \lg|G(j\omega)|$ 曲线的中频段斜率为 $[-40]$ ，且占据的频率区间较宽，如图 5-73 (b) 所示，若只从平稳性和快速性着眼，可近似认为整个开环特性为 $[-40]$ 的直线，其对应的开环传递函数为：
$$G(s) = \frac{K}{s^2} = \frac{\omega_c^2}{s^2}$$

对于单位反馈系统，闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c^2}$$

这相当于零阻尼的二阶系统。系统处于临界稳定状态，动态过程持续振荡。

因此，中频段斜率如为 $[-40]$ ，所占频率不宜过宽。否则， $\sigma\%$ 及 t_s 显著增加。

中频段斜率更陡，闭环系统难以稳定。故通常取 $20 \lg |G(j\omega)|$ 曲线在截止频率 ω_c 附近 ($+20\text{db} \sim -10\text{db}$) 的斜率为 $[-20]$ ，以期得到良好的平稳性；而以通过提高 ω_c 来保证快速性的要求。

高频段

高频段是指 $20\lg|G(j\omega)|$ 曲线在中频段以后($\omega > 10\omega_c$)的区段, 这部分特性是系统中时间常数很小、频带很高的部件决定的。由于远离 ω_c , 一般分贝值又较低, 故对系统的动态响应影响不大, 近似分析时可以只保留1、2个部件特性的作用, 而将其它高频部件当作放大环节处理。

另外, 从系统抗干扰性的角度来看, 高频段特性是有其意义的。由于高频部件开环幅频一般较低, 即

$20\lg|G(j\omega)| \ll 0$, $|G(j\omega)| \ll 1$, 故对单位负反馈系统,

有:

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| \approx |G(j\omega)|$$

闭环幅频等于开环幅频。

因此，系统开环对数幅频在高频段的幅值，直接反映了系统对输入端高频干扰信号的抑制能力。这部分特性的分贝值越低，系统的抗干扰能力就越强。

三个频段的划分并没有很严格的确定性准则。但是三频段的概念，为直接运用开环特性判别稳定的闭环系统的动态性能，指出了原则和方向。

5-7利用数字计算机求取系统的频率特性

求解频率特性的算法

目前比较常用的算法有两种，一种算法是把传递函数表示为典型环节的串联形式，计算出各典型环节在某一频率时的幅值和相角，然后通过求取各典型环节的幅值之积（或为幅值的分贝数之和）和相角之和，可求得系统在该频率时的频率特性，通过选取不同的频率值，计算出系统的频率特性。

另一种算法是把传递函数的分子、分母表达为多项式的形式

$$\text{即: } G(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} e^{-\tau s}$$

分别计算 $G(s)$ 的分子、分母多项式在某一频率时的值（可用实部和虚部表示，也可用幅值和相角表示），再考虑到延迟环节对相频的影响，即可计算出系统的频率特性。

需要注意的是，计算 $G(s)$ 的分子、分母多项式在某一频率 ω_1 时的值时，可用下述方法计算：

例如对于G(s)的分子多项式，利用多项式除法，得：

$$\begin{aligned}M(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ &= (s^2 + \omega_1^2)(c_m s^{m-2} + c_{m-1} s^{m-3} + \cdots + c_3 s + c_2) + c_1 s + c_0\end{aligned}$$

上式

$$c_k = b_k - \omega_1^2 c_{k+2}$$

中：

分别令 $k=m, m-1, \dots, 1, 0$ (c_{m+2}, c_{m+1} 取零)可求出各项系数 $c_m, c_{m-1}, \dots, c_1, c_0$ ，若令 $s=j\omega_1$ ，由于 $s^2 + \omega_1^2 = 0$ ，

得：

$$M(j\omega_1) = c_1 j\omega_1 + c_0$$

类似地，也可求出分母多项式D(s)在 $s=j\omega_1$ 的值：

$$D(j\omega_1) = d_1 j\omega_1 + d_0$$

$$d_k = a_k - \omega_1^2 d_{k+2}$$

令 $k=n, n-1, \dots, 1, 0$ (d_{n+2}, d_{n+1} 取零)可求出各项系数 $d_n, d_{n-1}, \dots, d_1, d_0$ ，

所以：

$$G(j\omega_1) = \frac{M(j\omega_1)}{D(j\omega_1)} = \frac{c_1 j\omega_1 + c_0}{d_1 j\omega_1 + d_0} e^{-\tau j\omega_1}$$

再对上式进行复数运算，就可求出 $G(j\omega_1)$ 的幅值和相角，通过选取不同的频率值，计算出系统的频率特性。

对于单位负反馈系统，有了开环频率特性在某一频率时的值 $G(j\omega_1)$ ，利用

$$\Phi(j\omega_1) = G(j\omega_1) / [1 + G(j\omega_1)]$$

可以很方便地计算出 $\Phi(j\omega_1)$ ，最终计算出系统的闭环频率特性。

稳定裕度的求法

求解稳定裕度多采用逼近法。其中1/3步长快速衰减多次逼近算法具有偏差小、搜索速度快的优点。

求解幅值裕度的步骤如下：

首先从起始频率 ω_0 开始，选取一定的步长 $\Delta\omega$ ，计算 $\angle G(j\omega)$ ，若进行到第 k 步时，有 $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ ，而在第 $k+1$ 步时，有 $\angle G(j\omega) < -180^\circ$ 此时可调用求幅值裕度的子程序：

- 1: 取当前频率步长的1/3为新的步长，每计算一点减去一个步长，直到能够满足 $\angle G(j\omega) > -180^\circ$ 为止。
- 2: 取当前频率步长的1/3为新的步长，每计算一点增加一个步长，直到能够满足 $\angle G(j\omega) < -180^\circ$ 为止。

3: 判断 $|\angle G(j\omega) + 180^\circ| < \varepsilon$ 是否成立。若不成立, 则转步骤1; 若成立, 则该点的频率即为相角交界频率 ω_g 。

4: 计算幅值裕度。

步骤3中 ε 为计算相频特性时所允许的误差。

求解相角裕度时可采用类似的方法。计算频率特性的程序流程图如图5-74所示。图中, 初始频率和终止频率是指计算频率特性时所取的频率范围, 求幅值裕度的条件是指 $\angle G(j\omega)$ 是否小于 -180° , 求相角裕度的条件是指 $|G(j\omega)|$ 是否小于1, 最后结果可以用表格或曲线输出。

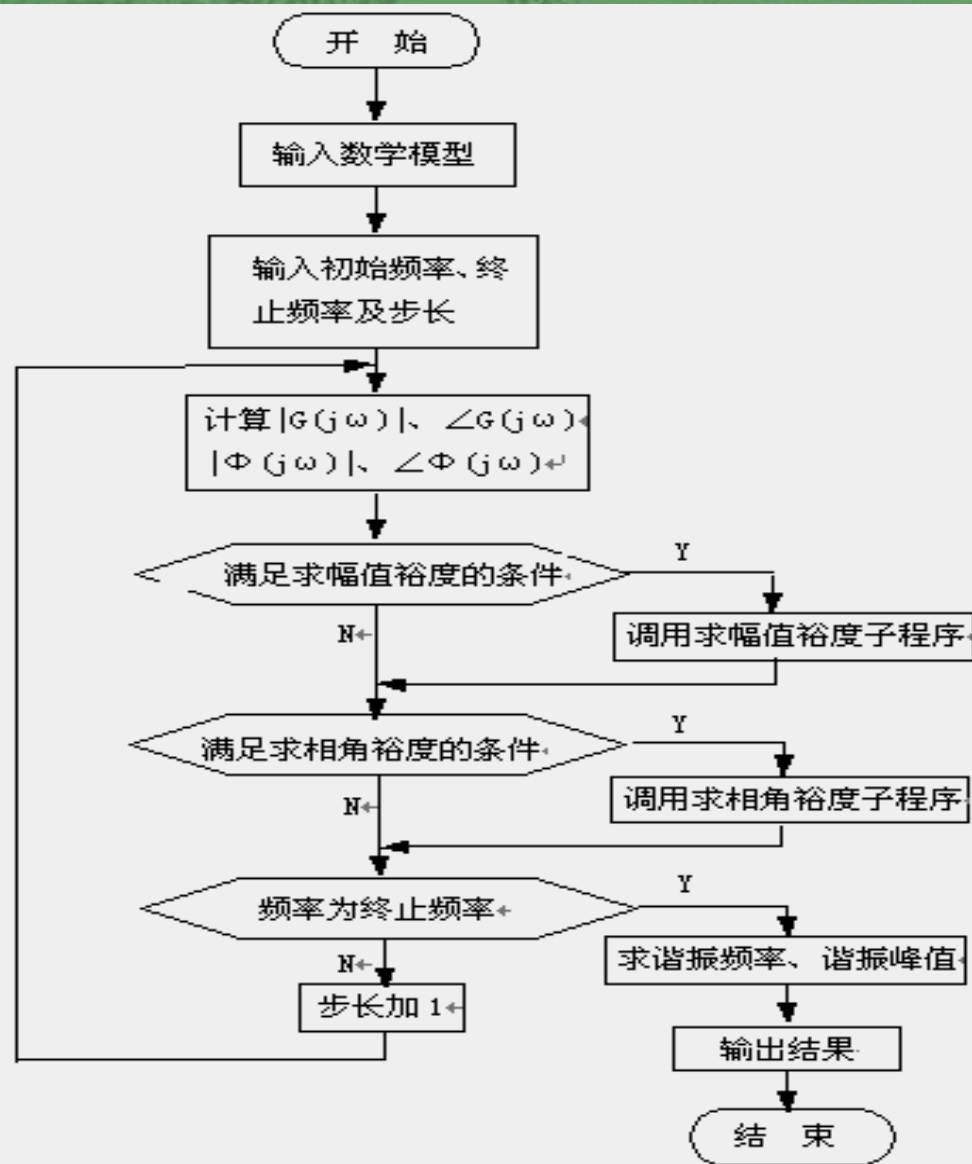


图 5-74 计算频率特性的程序流程图

5-8 传递函数的实验确定法

自动控制系统的分析和设计是从系统的数学模型出发的。确定数学模型一般用解析法或实验法。本节介绍用频率响应实验确定系统和元部件传递函数的方法。

频率响应实验确定数学模型的原理

测定系统和元部件频率特性原理，如图5-75所示。图中，正弦信号源有机械、电气和气动等形式，频率也有不同的范围，可根据被测对象类型和要求选定，但波形必须没有畸变。

变换器用来将输入信号 x 和输出信号 y 变换为电量 u_r 和 u_c （如果 x 和 y 为电量则毋需变换）。记录仪用来记录 u_r 和 u_c 的波形。如果变换器3、4均为比例环节，且有相同传递系数，则不断改变输入信号频率，记录稳态下对应的 u_r 和 u_c ，即可求得幅频和相频

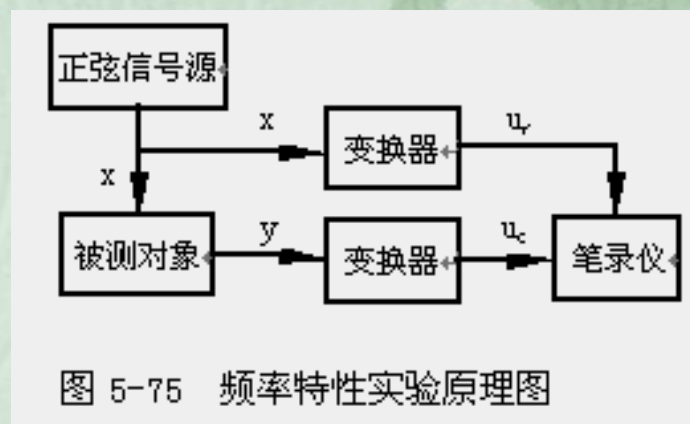


图 5-75 频率特性实验原理图

特性，画出对数幅频和相频特性，然后，将实验得到的对数幅频曲线用斜率为 0db/dec 、 $\pm 20\text{db/dec}$ 和 $\pm 40\text{db/dec}$ 等直线近似，即得近似对数幅频曲线。根据近似对数幅频和对数相频曲线，即可写出被测对象的传递函数。

由对数频率特性曲线确定最小相角系统的传递函数，在5-3节中已经说明，一个传递函数是否最小相角传递函数，可根据对数频率特性曲线高频部分判断；如果判断结果属最小相角传递函数，则根据近似对数幅频曲线即可确定。

应该注意，求得的传递函数的对数相频曲线与实验曲线应基本一致。两条曲线在低频和高频段，应严格相符。如果在较最高交接频率高十倍频程的频率上，实验所得相角不近似等于 $-90^\circ (n-m)$ (这里， n 和 m 分别为传递函数分母和分子的最高次幂)，则传递函数必定不是最小相角的，而是非最小相角的。

包含延迟环节传递函数的确定

如果被测对象按最小相角系统处理，得到的传递函数是 $G(s)$ ，而 $\angle G(j\omega)$ 与实验结果不符，两者差一个恒定的相角变化率，则被测对象包含有延迟环节。因为若被测对象传递函数为 $G(s)e^{-\tau s}$ ，则必有：

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{d}{d\omega} \angle G(j\omega)e^{-j\tau\omega} = -\tau$$

因此，根据频率 ω 趋于无穷时，实验所得相频特性的相角变化率，即可确定延迟环节的延迟时间 τ 。

例5-18: 设某系统试验频率响应曲线如图5-76所示，试确定系统传递函数。

先以斜率 0db/dec 、 $\pm 20\text{db/dec}$ 和 $\pm 40\text{db/dec}$ 等直线近似实验曲线，如图5-76细实线所示。

由于近似曲线最左段为 -20db/dec 的直线，故被测系统有一个积分环节；根据最左端直线 $\omega=1$ 时为 20db ，知道被测对象的比例环节 $K=10$ 。近似曲线有三个交接频率：1、2和8，按交接频率斜率的变化和 $\omega=8$ 附近的谐振峰值，可写出被测对象传递函数：

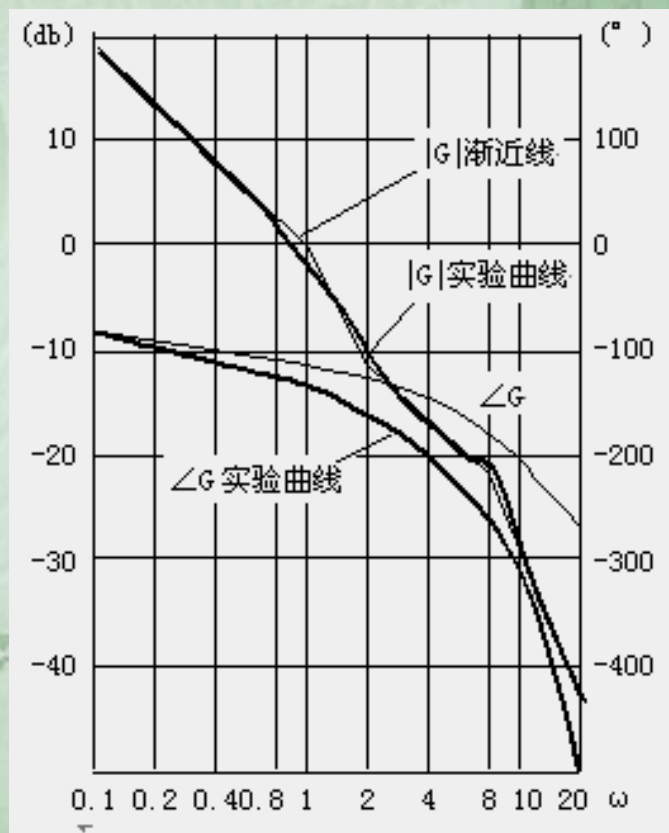


图 5-76 被测对象的伯德图

$$G(s) = \frac{10(0.5s + 1)}{s(s + 1)[(\frac{s}{8})^2 + \frac{s}{8} + 1]}$$

$$= \frac{320(s + 2)}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

由于尚未检查对数相频曲线，故这个传递函数是试探性的。

根据试探的传递函数，可绘制相应的对数相频曲线，如图5-76/G曲线所示。显见，G曲线与实验曲线不符。 $\omega=10$ 时，实验曲线与G之差约 -115° ，而 $\omega=20$ 时，差约 240° 。这基本上和延迟环节相频特性 -0.2ω (rad)相符，故被测对象的传递函数应是 $G(s)e^{-\tau s}$ ，延迟时间 τ 为0.2秒。

于是，被测对象的传递函数：

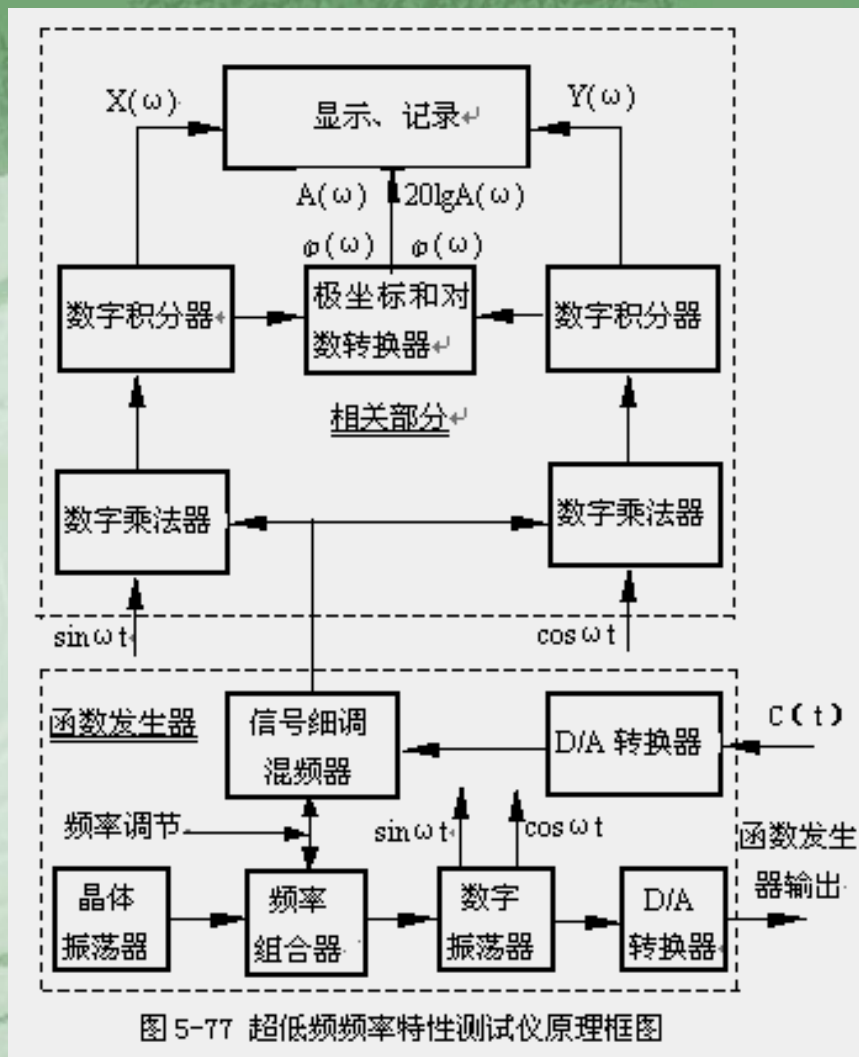
$$G(s) = \frac{320(s + 2)e^{-0.2s}}{s(s + 1)(s^2 + 8s + 64)}$$

国产BT-6A超低频频率特性测试仪

设控制系统的频率特性为 $G(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$

若输入正弦信号的周期为 T ，控制系统的输出为 $c(t)$ ，当 N 取较大的整数时，根据相关理论知识，经推导，得：

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{2}{NT} \int_0^{NT} c(t) \sin \omega t dt \\ Y(\omega) = \frac{2}{NT} \int_0^{NT} c(t) \cos \omega t dt \end{cases}$$



上式即为正弦信号相关分析法计算系统频率特性的公式。国产BT-6A超低频频率特性测试仪就是根据正弦信号相关分析法原理设计制造的专用测试仪表。其工作原理可用图5-77表示。

函数发生器主要产生正弦信号。它所产生的数字式正弦波经数/模转换器输出，作为被测系统的激励信号。

被测系统的输出经模/数转换器转换为数字信号，通过面板频率控制旋钮调节，使它与函数发生器频率同步。混频器的输出与函数发生器产生的数字式正弦、余弦信号一起送入仪器的相关部分，通过两个并列的数字式乘法器，实现被测系统的输出信号与函数发生器的正弦、余弦信号相乘，由积分器将乘法器的输出在激励信号基频整数倍的周期时间内积分并平均。经过相关分析过程处理，即能得出频率特性的实部 $X(\omega)$ 及虚部 $Y(\omega)$ 并判断象限。

BT-6A超低频频率特性测试仪的主要特性如下:

频率范围: $0.00001 \sim 479.7\text{Hz}$

测量方式: 直角坐标中实部和虚部; 极坐标中幅值与相角; 对数极坐标中对数幅值与相角

分辨率: 0.1mV (对 100 mV 量程)

谐波抑制能力: 40db

噪声抑制能力: 60db

幅值测量精度: 0.5%

相角测量精度: 0.2°

BT-6A超低频频率特性测试仪备有计算机接口,可与计算机连接使用,直接打印输出或绘出曲线。

小 结

频率特性是根据线性定常系统在正弦信号作用下输出的稳态分量而定义的，但它能反映系统动态过程的性能，故可视为动态数学模型。

频域分析法是一种常用的图解分析法，其特点是可以根据系统的开环频率特性去判断闭环系统的性能，并能较方便地分析系统参量对系统性能的影响，从而指出改善系统性能的途径。本章介绍的频域分析和设计方法已经发展成为一种实用的工程方法，应用十分广泛，其主要内容是：

- 1: 频率特性是线性定常系统的数学模型之一，它既可以根据系统的工作原理，应用机理分析法建立起来，也可以由系统的其它数学模型（传递函数、微分方程等）方便地转换过来，或用实验法来确定。

2: 在工程分析和设计中，通常把频率特性画成一些曲线，从频率特性曲线出发进行研究。这些曲线包括幅频特性和相频特性曲线，幅相频率特性曲线，对数频率特性曲线以及对数幅相曲线等，其中以幅相频率特性曲线，对数频率特性曲线应用最广。在绘制对数幅频特性曲线时，可用简单的渐近线近似地绘制，必要时可进行修正。

3: 对于最小相位系统，幅频特性和相频特性之间存在着唯一的对于关系，故根据对数幅频特性，可以唯一地确定相应的相频特性和传递函数。而对于非最小相位系统则不然。

4: 利用乃奎斯特稳定判据，可根据系统的开环频率特性来判断闭环系统的稳定性，并可定量地反映系统的相对稳定性，即稳定裕度。稳定裕度通常用相角裕度和幅值裕度来表示。

5: 把系统的开环频率特性画在等M圆图和等N圆图上, 可以求得系统的闭环频率特性。

6: 根据系统的开环频率特性或闭环频率特性可以粗略地估计系统的一些时域性能指标。

7: 利用数字计算机求解系统的频率特性更加显示出频域分析法简便、适用的优点。本章介绍了采用二次因子综合除法求解频率特性的算法以及采用三分之一步长快速衰减多次逼近算法求解稳定裕度的方法。

8: 在难以用解析方法确定系统或元件的频率特性的情况下, 可以用实验方法确定。