第四章　线性系统的根轨迹法

4-1　根轨迹方程

4-2　根轨迹绘制的基本法则

4-3　广义根轨迹

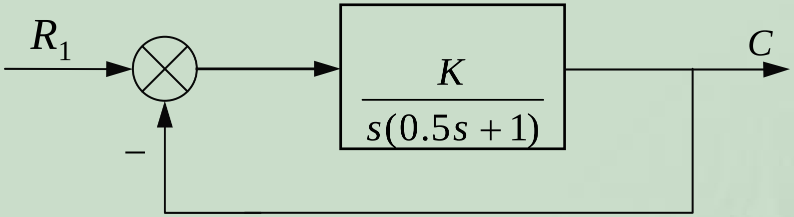
4-4　系统性能的分析与估算

4-1　根轨迹方程

一、根轨迹概念

根轨迹——当系统的某个参数（例如开环增益K）由零变到无穷十，闭环特征根在S平面上移动的根轨迹。

例4-1 设控制系统如图示。



解：开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(0.5s+1)}=\dfrac{2K}{s(s+2)}$

开环极点　$p_1=0,\ p_2=-2$　，没有开环极点

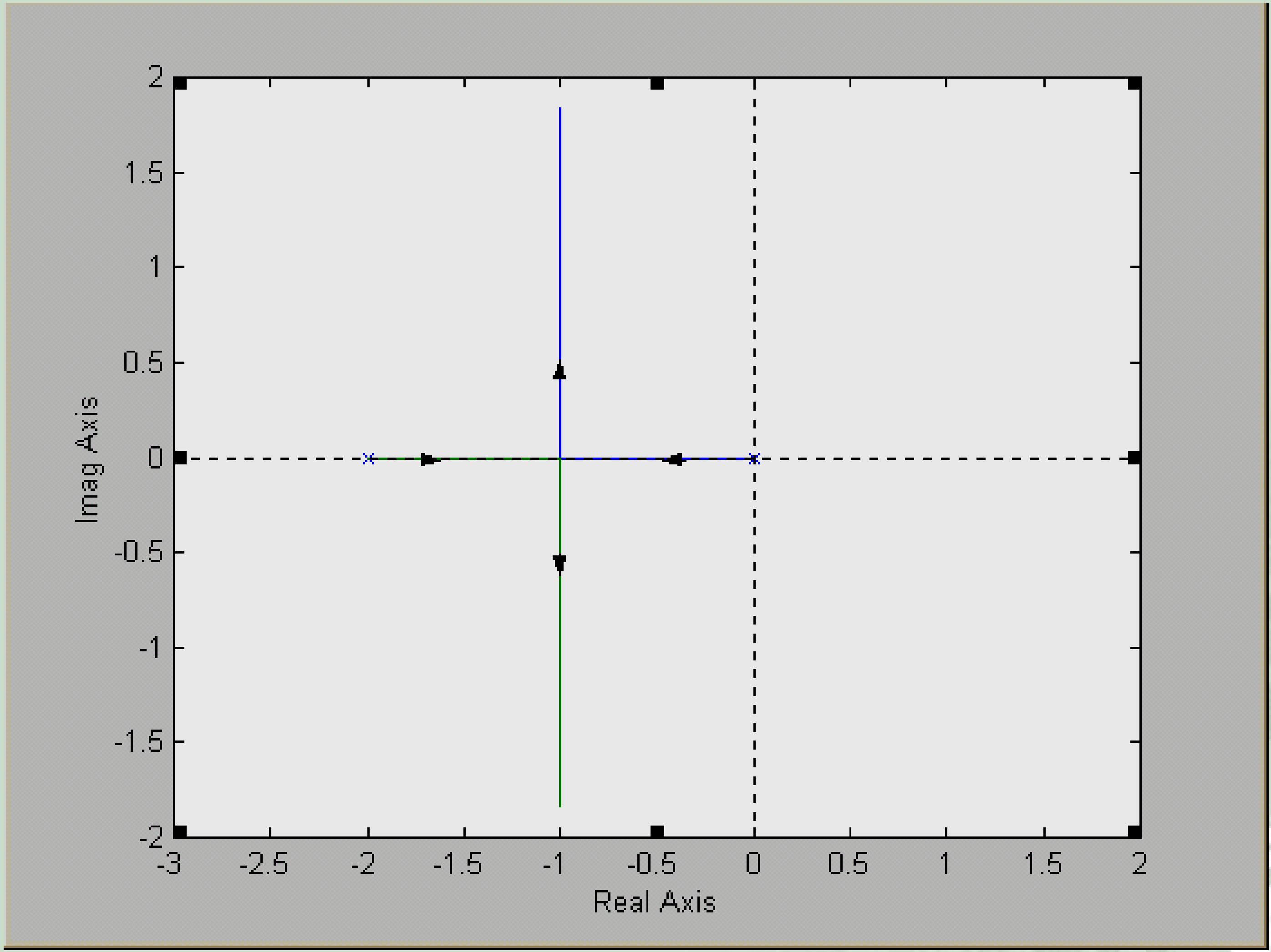
闭环极点为 $\Phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{2K}{s^2+2s+2K}$

闭环特征方程 $=s^2+2s+2K$

$s_1-1+\sqrt{1-2K}$，$s_2=-1-\sqrt{1-2K}$

当$K:0\to\infty$时

$K=0$	$s_1=0$	$s_2=-2$
$K=0.25$	$s_1=-0.29$	$s_2=-1.71$
$K=0.5$	$s_1=-1$	$s_2=-1$
$K=1$	$s_1=-1+j$	$s_2=-1-j$
$K=\infty$	$s_1=-1+j\infty$	$s_2=-1-j\infty$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
Imag Axis
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
Real Axis

性能分析:

（1）稳定性

$k:0\rightarrow\infty$ 根轨迹全部分布在 s 左半平面，系统稳定。

（2）动态性能

$0<k<0.5$ 特征根为两个不相等的实根，过阻尼状态;

$k=0.5$ 特征根为两个相等的负实根，临界阻尼状态;

$k>0.5$ 特征根为一对共轭复根，欠阻尼状态;

（3）稳态性能

有一个开环极点在原点，系统为 I 型。阶跃输入下，$e_{ss}=0$；斜坡输入下，$e_{ss}=$ 常数，静态速度误差系数 $K_v=K$。

二、闭环零、极点与开环零、极点的关系

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{K_G(\tau_1 s + 1)(\tau_2^{\ 2} s^2 + 2\varsigma_1 \tau_2 s + 1)\cdots}{s^v (T_1 s + 1)(T_2^{\ 2} s^2 + 2\varsigma_2 s + 1)\cdots}$$

$$= \frac{K_G^* \prod_{i=1}^{f} (s - z_i)}{\prod_{i=1}^{q} (s - p_i)}$$

K_G — 前向通路增益

K_G^* — 前向通路根轨迹增益

$$K_G^* = K_G \frac{\tau_1 \cdot \tau_2^2 \cdots}{T_1 \cdot T_2^2 \cdots}$$

$$H(s) = \frac{K_H^* \prod_{j=1}^{l} (s - z_j)}{\prod_{j=1}^{h} (s - p_j)}$$

K_H^* — 反馈通路的根轨迹增益

$$G(s)H(s) = \frac{K^* \prod_{i=1}^{f} (s - z_i) \prod_{j=1}^{l} (s - z_j)}{\prod_{i=1}^{q} (s - p_i) \prod_{j=1}^{h} (s - p_j)}$$

$K^* = K_G^* K_H^*$ ——开环根轨迹增益

$z_i(i=1,\cdots,f)$—前向通路传递函数的零点

$z_j(j=1,\cdots,l)$—反馈通路传递函数的零点

$p_i(i=1,\cdots,q)$—前向通路传递函数的极点

$p_j(j=1,\cdots,h)$—反馈通路传递函数的极点

$$\Phi(s) = \frac{K_G^* \prod_{j=1}^{f}(s-z_i)\prod_{j=1}^{h}(s-p_j)}{\prod_{i=1}^{q}(s-p_i)\prod_{j=1}^{h}(s-p_j) + K^* \prod_{i=1}^{f}(s-z_i)\prod_{j=1}^{l}(s-z_j)}$$

开环、闭环零、极点的关系：

(1) 闭环根轨迹增益等于前向通路根轨迹增益；单位反馈系统：闭环根轨迹增益等于开环根轨迹增益。

(2) 闭环零点由前向通路零点和和反馈通路极点组成；单位反馈系统：闭环零点等于开环零点。

(3) 开环极点与开环零、极点以及根轨迹增益均有关。

三、根轨迹方程

闭环特征方程 $1+G(s)H(s)=0$

根轨迹方程 $G(s)H(s)=-1$

$$\frac{K_G^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=-1$$

$$\begin{cases} \dfrac{K_G^* \prod\limits_{i=1}^{m} |s - z_i|}{\prod\limits_{i=1}^{n} |s - p_i|} = 1 & \text{模方程} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) - \sum\limits_{i=1}^{n} \angle(s - p_i) = (2k+1)\pi & \text{相方程} \\ \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots & \end{cases}$$

（1）相方程是决定闭环根轨迹的充要条件;

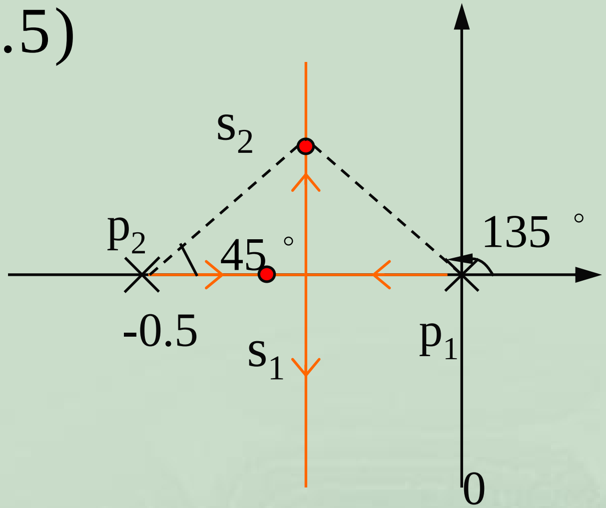
（2）由模方程决定根轨迹上各点相应的K^*值。

四.利用根轨迹方程求根轨迹

例2　单位反馈系统开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K}{s(2s+1)}$ ，用根轨迹方程作根轨迹。

解:

$$G(s)=\frac{K}{s(2s+1)}=\frac{0.5K}{s(s+0.5)}=\frac{K^*}{s(s+0.5)}$$



$K^*=0.5K$

开环极点 $p_1=0$，$p_2=-0.5$

无开环零点

根据相角方程

$$\angle G(s)=-\angle(s-p_1)-\angle(s-p_2)$$
$$=-\angle s-\angle(s+0.5)=(2k+1)\pi$$

用试探法找到满足相角方程的点:

（1）在0～0.5的负实轴区段上任取一点s_1

$$\angle G(s_1)=-\angle(s_1-p_1)-\angle(s_1-p_2)$$
$$=-180°-0°=-180°$$

满足相角方程，该区段在根轨迹上。

（2）取一点s_2，使

$$\angle G(s_2) = -\angle(s_2 - p_1) - \angle(s_2 - p_2)$$
$$= -135° - 45° = -180°$$

S_2是根轨迹上的点。逐点试探可绘制出全部根轨迹。

根据模值方程，在S_1处
$$\frac{1}{|s_1 - p_1||s_1 - p_2|} = \frac{1}{k^*}$$
$$k_1^* = |s_1 - p_1||s_1 - p_2|$$
$$= |s_1||s_1 + 0.5|$$
$$k_2^* = |s_2 - p_1||s_2 - p_2|$$
$$= |s_2||s_2 + 0.5|$$

4－2　绘制根轨迹的基本法则

法则1 根轨迹的起点和终点：根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。如果开环零点数m<n，则有（n-m）条根轨迹终止于无穷远处。

证明：根轨迹方程

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=-\frac{1}{K^*}$$

模值方程

$$K^*=\frac{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_i\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|}$$

根轨迹起点：　$K^*=0(K=0)$

要使模值方程成立，则 $s = p_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$

所以p_i是根轨迹起点。

根轨迹终点 $K^*=\infty(K=\infty)$

要使模值方程成立，则 $s=z_i \qquad (i=1,\cdots,m)$

所以z_i是根轨迹终点。

当m<n时，有m条根轨迹到开环零点止，另有（n-m）条根轨迹终止于无穷远处

$\because s\to\infty$

$$K^*=\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|}=\lim_{s\to\infty}|s|^{n-m}\to\infty \qquad (n>m)$$

说明：如果m>n，则应有（m-n)条根轨迹的起点在∞处。

法则2 根轨迹的分支数和对称性：根轨迹的分支数与开环有限零点数和有限极点数中的大者相等，它们是连续的并且对称于实轴。

法则3 实轴上的根轨迹：实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

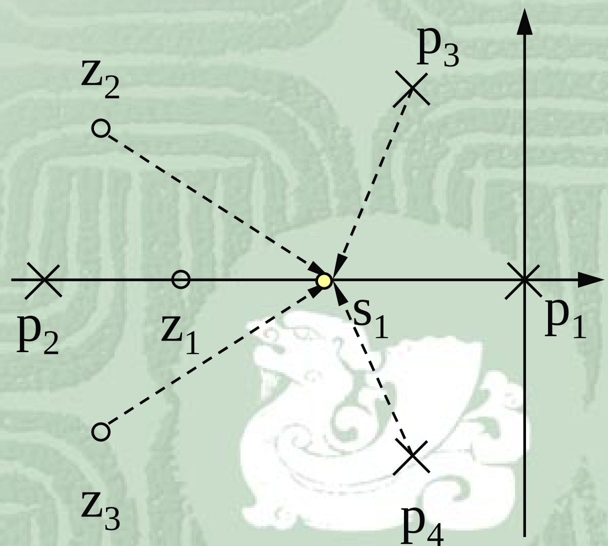
证明：由相角方程

（1）开环复数零、极点都成对出现，相角等值反号，在相角方程中相互抵消；

（2）位于闭环极点s_1左边的开环零、极点到s_1的向量相角为0;

（3）位于闭环极点s_1右边的开环零、极点到s_1的向量相角为 π 。

只有右边零、极点是奇数时，总相角才是 $(2k+1)\pi$ 。



法则4 根轨迹的渐近线：当开环有限极点数n大于有限零点数m时，有n-m条根轨迹分支沿着与实轴交角 φ_a 为 σ_a交点为 的一组渐近线趋向无穷远处，且有

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-m-1)$$

和

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

证明:

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = K^* \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n} \quad (1)$$

式中

$$b_1 = -\sum_{j=1}^{m} z_j, a_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

当 $s\to\infty$ 时，式（1）可近似为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s^{n-m}+(a_1-b_1)s^{n-m-1}}=-1$$

$$s^{n-m}(1+\frac{a_1-b_1}{s})=-K^*$$

$$s(1+\frac{a_1-b_1}{s})^{\frac{1}{n-m}}=(-K^*)^{\frac{1}{n-m}} \qquad (2)$$

根据二项式定理

$$(1+\frac{a_1-b_1}{s})^{\frac{1}{n-m}}=1+\frac{a_1-b_1}{(n-m)s}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n-m}(\frac{1}{n-m}-1)(\frac{a_1-b_1}{s})^2+\cdots$$

当 $s\to\infty$ 时，近似有

$$(1+\frac{a_1-b_1}{s})^{\frac{1}{n-m}}=1+\frac{a_1-b_1}{(n-m)s} \qquad (3)$$

将（3）代入（2），渐近线方程可表示为

$$s\left[1+\frac{a_1-b_1}{(n-m)s}\right]=(-K^*)^{\frac{1}{n-m}} \qquad (4)$$

将$s=\sigma+j\omega$代入式（4）

$$\left(\sigma+\frac{a_1-b_1}{n-m}\right)+j\omega=\sqrt[n-m]{K^*}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n-m}+j\sin\frac{(2k+1)\pi}{n-m}\right]$$

$$(k=0,1,\cdots,n-m-1)$$

$$\sigma+\frac{a_1-b_1}{n-m}=\sqrt[n-m]{K^*}\cos\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

$$\omega=\sqrt[n-m]{K^*}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

解得

$$\sqrt[n-m]{K^*}=\frac{\omega}{\sin\varphi_a}=\frac{\sigma-\sigma_a}{\cos\varphi_a} \tag{5}$$

$$\omega=(\sigma-\sigma_a)tg\varphi_a \tag{6}$$

式中 $$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad (k=0,1,\cdots,n-m-1) \tag{7}$$

$$\sigma_a=-\left(\frac{a_1-b_1}{n-m}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m} \tag{8}$$

在s平面上式（6）代表直线方程，它与实轴的交角为 φ_a，交点为 σ_a。

当k取不同值时，可得n-m个 φ_a 角，而 σ_a 不变，因此，根轨迹渐近线是n-m条与实轴交点为 σ_a，交角为φ_a 的一组射线。

法则5 根轨迹的分离点：两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又立即分开的点，称为根轨迹的分离点；分离点的坐标d是下列方程的解

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}$$

证明：由根轨迹方程

$$1+K^*\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

$$D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=0$$

根轨迹相遇的点即为特　征方程的重根。设重根　为d

根据代数中的重根条件

$$D'(s)=\frac{d}{ds}\left[\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)\right]=0$$

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K*\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=-K*\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{m}(s-z_j) \qquad (2)$$

将式（1）除式（ 2）得

$$\frac{\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=\frac{\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}$$

$$\frac{d\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}{ds}=\frac{d\ln\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{ds}$$

代入

$$\begin{cases}\ln\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\sum_{i=1}^{n}\ln(s-p_i)\\ \ln\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)=\sum_{j=1}^{m}\ln(s-z_j)\end{cases}$$

得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}d\ln(s-p_i)}{ds}=\frac{\sum_{j=1}^{m}d\ln(s-z_j)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s-z_j}$$

从上式解出s，即为分离点d。

分离点的特点：

（1）分离点位于实轴上或以共轭形式出现；

（2）根轨迹在实轴上两相邻开环极点（其中一个可为无限极点）之间，至少存在一个分离点；根轨迹在实轴上两相邻开环零点（其中一个可为无限零点）之间，至少存在一个分离点。

（3）分离角可由 $(2k+1)\pi/l,(k=0,1,\cdots,l-1)$ 决定。

法则6 根轨迹的起始角与终止角：根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴的夹角，称为起始角 θ_{pi} ；根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴的夹角，称为终止角 φ_{zi}

$$\theta_{pi}=(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_i-z_j)-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\angle(p_i-p_j)$$

$$\varphi_{zi}=(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{n}\angle(z_i-p_j)-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\angle(z_i-z_j)$$

证明：在十分靠近待求起始角（或终止角）的复数极点（或复数零点）的根轨迹上，取一点s_1。根据相角方程有

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(p_i-z_j)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\angle(p_i-p_j)-\theta_{pi}=(2k+1)\pi$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\angle(z_i-z_j)+\varphi_{zi}-\sum_{j=1}^{n}\angle(z_i-p_j)=(2k+1)\pi$$

移项后得证。

法则7 根轨迹与虚轴的交点：若根轨迹与虚轴相交，则交点上的K^*值和ω 值可用劳斯判据确定，也可令闭环特征方程中的 $s=j\omega$ ，然后分别令其实部和虚部为零而求得。

法则8 根之和：在 $n-m\geq 2$ 时，开环n个极点之和总是等于闭环n个极点之和，即 $\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$

证明：系统的闭环特征方程为

$$\sum_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\sum_{i=1}^{m}(s-z_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(s-s_i)$$

$$=s^n+\left(-\sum_{i=1}^{n}s_i\right)s^{n-1}+\cdots+\prod_{i=1}^{n}(-s_i) \qquad （1）$$

$$\sum_{i=1}^{n}(s-p_i)=s^n+\left(-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)s^{n-1}+\cdots \qquad （2）$$

$$K*\sum_{i=1}^{m}(s-z_i)=K*s^m+K*s^{m-1}\left(-\sum_{i=1}^{m}z_i\right)+\cdots \qquad （3）$$

(2)、（3）相加后与（1）比较，当 $n-m\geq 2$ 时， s^{n-1} 特征方程中 $K*$ 项系数与 $K*$ 无关，因此，无论为何值，都有

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}p_i$$

例1 已知开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(0.05s+1)(0.05s^2+0.2s+1)}$$

试绘制K由 $0\rightarrow\infty$ 时的闭环根轨迹。

解：$G(s)=\dfrac{20\times 20\times K}{s(s+20)(s^2+4s+20)}=\dfrac{K^*}{s(s+20)(s+2+j4)(s+2-j4)}$

$K^*=400K$

开环极点：$p_1=0, p_2=-20, p_{3,4}=-2\pm j4$

无开环零点

1、根轨迹分支数：4

2、实轴上的根轨迹：（－20，0）

3、渐近线：

$n=4, m=0$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{0+(-20)+(-2+j4)+(-2-j4)}{4}=-6$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{4} = \begin{cases} 45^\circ & k=0 \\ 135^\circ & k=1 \\ -45^\circ & k=-1 \\ -135^\circ & k=-2 \end{cases}$$

4、根轨迹的起始角

$$\theta_{p3} = (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{m} \angle(p_3 - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{n} \angle(p_3 - p_i)$$

$$= (2k+1)\pi - \angle(p_3 - p_1) - \angle(p_3 - p_2) - \angle(p_3 - p_4)$$

$$= (2k+1)\pi - 116.5^\circ - 12.5^\circ - 90^\circ$$

$$= -39^\circ$$

$$\theta_{p3} = 39^\circ$$

5、分离点d

$$\frac{1}{d-p_1}+\frac{1}{d-p_2}+\frac{1}{d-p_3}+\frac{1}{d-p_4}=0$$

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+20}+\frac{1}{d+2+j4}+\frac{1}{d+2-j4}=0$$

$$d^3+18d^2+50d+100=0$$

$$(d+15.1)(d^2+2.9d+6.6)=0$$

$$d=-15.1$$

6、根轨迹与虚轴的交点

$$D(s)=s(s+20)(s^2+4s+20)+K^*$$

$$=s^4+24s^3+100s^2+400s+K^*=0$$

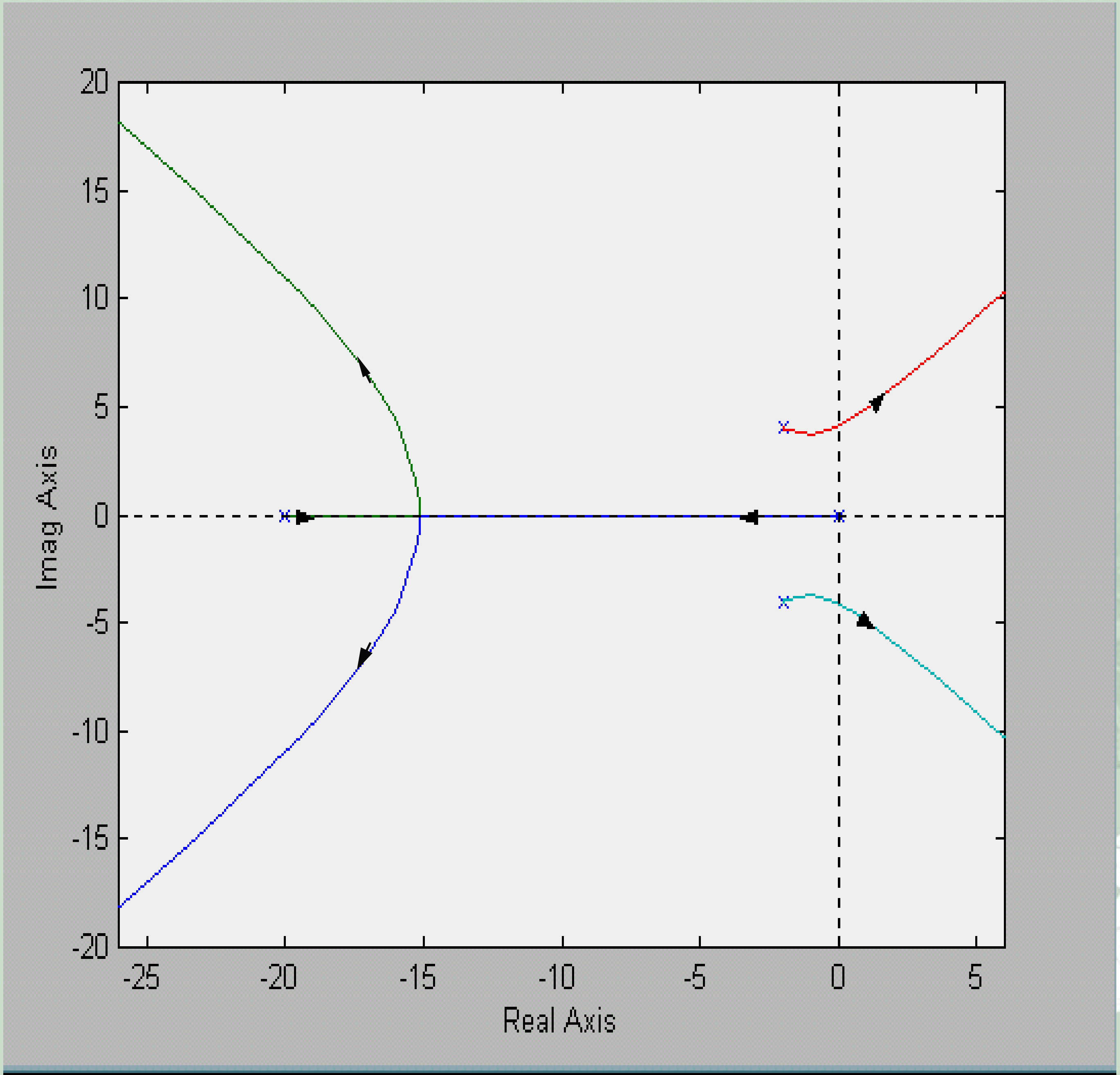
令$s=j\omega$

$$D(j\omega)=(j\omega)^4+24(j\omega)^3+100(j\omega)^2+400(j\omega)+K*$$

$$=(\omega^4-100\omega^2+K*)+j(-24\omega^3+400\omega)=0$$

$$\begin{cases}\omega^4-100\omega^2+K*=0\\-24\omega^3+400\omega=0\end{cases}$$

$$\omega_1=0,\omega_{2,3}=\pm 4.1 \quad K*=400K=1391, K=3.47$$


20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
Imag Axis
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
Real Axis

例2 非最小相位系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

试作闭环根轨迹。

解：1、根轨迹分支数：4

开环极点 $p_1=0, p_2=1, p_{3,4}=-2\pm j2\sqrt{3}$

开环零点 $z_1=-1$

2、实轴上的根轨迹： $(-\infty,-1)$ $(0,1)$

3、渐近线:

$$n=4, m=1$$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}=\frac{0+1-2+j2\sqrt{3}-2-j2\sqrt{3}-(-1)}{3}=-\frac{2}{3}$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \frac{(2k+1)\pi}{3} = \begin{cases} 60^\circ & k=0 \\ 180^\circ & k=1 \\ -60^\circ & k=-1 \end{cases}$$

4、分离点:

$$\frac{1}{d-p_1} + \frac{1}{d-p_2} + \frac{1}{d-p_3} = 0$$

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d-1} + \frac{1}{d+2+j2\sqrt{2}} + \frac{1}{d+2-j2\sqrt{2}} = \frac{1}{d+1}$$

$d_1 = 0.46 \quad d_2 = -2.22 \quad d_{3,4} = -0.79 \pm j2.16$(不是分离点舍去)

5、起始角: $\theta_{p3} = -54.5^\circ \quad \theta_{p4} = 54.5^\circ$

6、根轨迹与虚轴的交点:

$$s(s-1)(s^2+4s+16) + K^*(s+1) = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (K^*-16)s + K^* = 0$$

$$\begin{array}{llll} s^4 & 1 & 12 & K^* \\ s^3 & 3 & K^*-16 & 0 \\ s^2 & \dfrac{3\times 12-K^*+16}{3} & K^* & \\ s^1 & \dfrac{-K^{*2}+59K^*-832}{52-K^*} & 0 & \\ s^0 & K^* & & \end{array}$$

令 $\dfrac{-K^{*2}+59K^*-832}{52-K^*}=0$

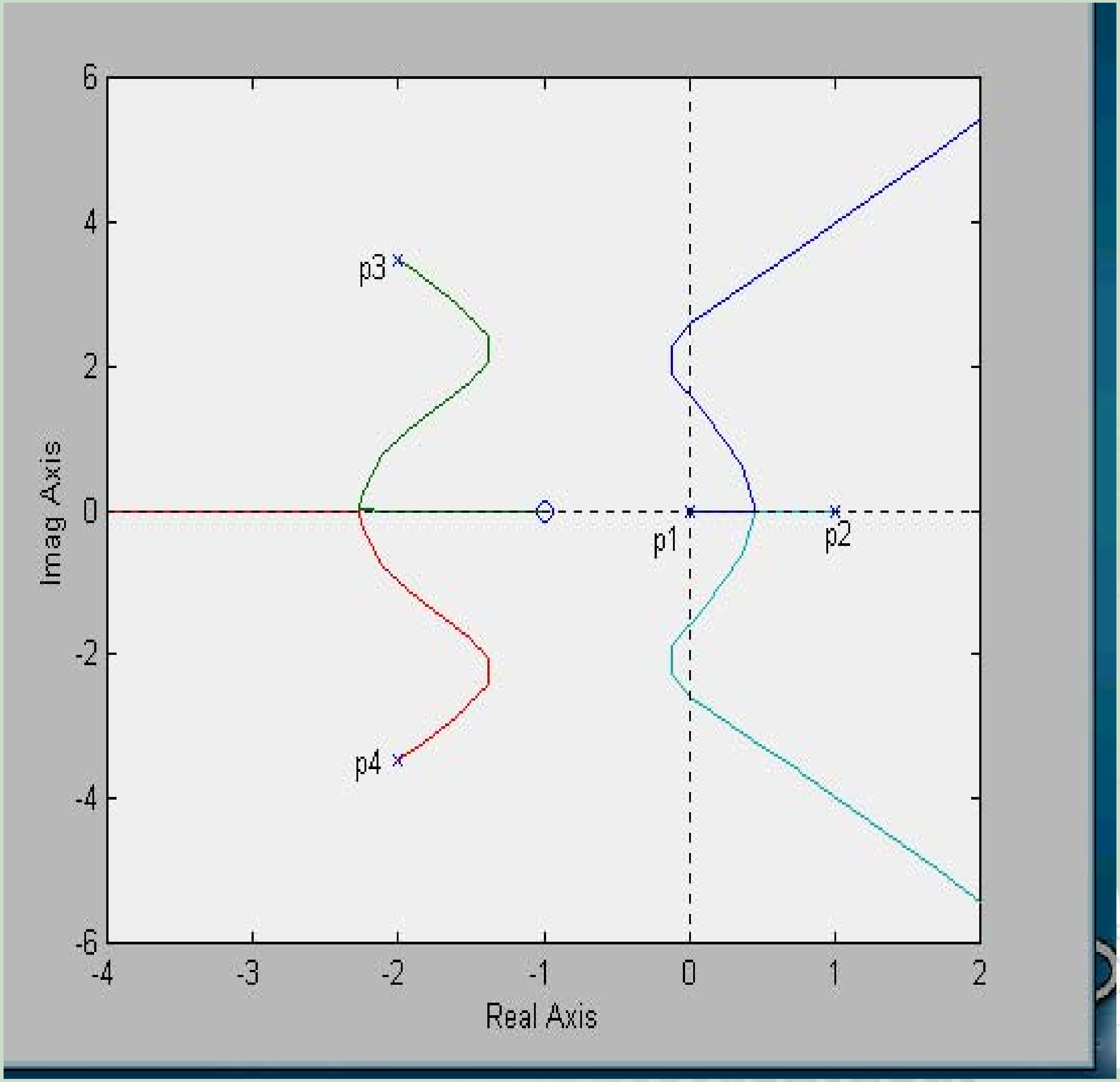
$K_1^*=23.3 \quad K_2^*=35.7$

由 s^2 行系数组成的辅助方程 $F(s)=\dfrac{52-K^*}{3}s^2+K^*=0$

当 $K_1^*=23.3$ 时 $\quad s_{1,2}=\pm j1.56$

当 $K_2^*=35.7$ 时 $\quad s_{3,4}=\pm j2.56$

当 $23.3<K^*<35.7$ 时系统稳定。



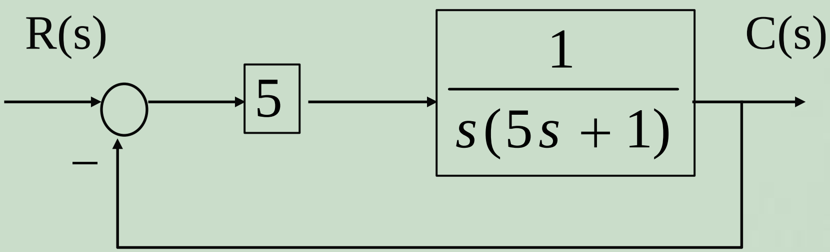
6
4
2
0
-2
-4
-6
Imag Axis
-4
-3
-2
-1
0
1
2
Real Axis
p1
p2
p3
p4

4－3 广义根轨迹

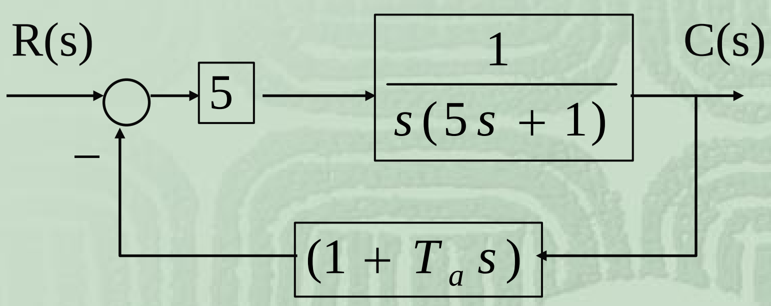
广义根轨迹：（1）除开环增益K以外的参数变化；（2）多个参数变化；（3）零度根轨迹。

一、 K以外的参数变化时的闭环根轨迹

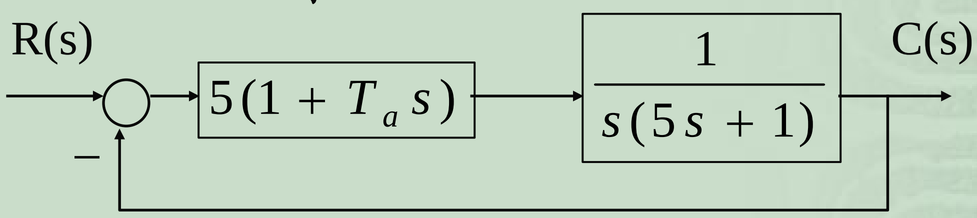
例1 设位置随动系统如图示。系统Ⅰ为比例控制系统，系统Ⅱ为比例－微分控制系统，系统Ⅲ为测速反馈控制系统，T_a 表示微分器时间常数。试分析 T_a 对系统性能的影响。



系统 Ⅰ



系统Ⅲ



系统 Ⅱ

解：系统Ⅱ和Ⅲ具有相同的开环传递函数，即$G(s)H(s)=\dfrac{5(1+T_a)}{s(1+5s)}$

但闭环传递函数是不相同的，即 $\Phi_2=\dfrac{5(1+T_a)}{s(1+5s)+5(1+T_a)}$

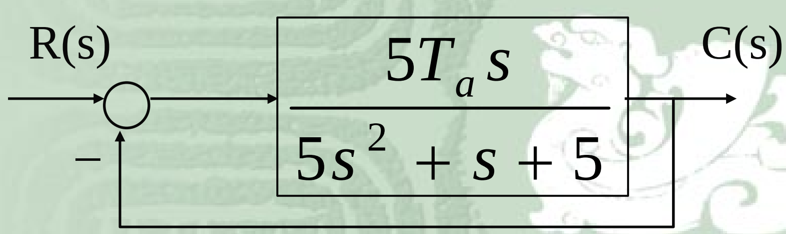
$$\Phi_3=\frac{5(1+T_a)}{s(1+5s)+5(1+T_a)}$$

但两者具有相同的闭环极点。两者的闭环特征方程为

$$5s^2+s+5+5T_as=0$$

可改写为 $1+\dfrac{5T_as}{5s^2+s+5}=0$

构造了一个新系统，，结构图为



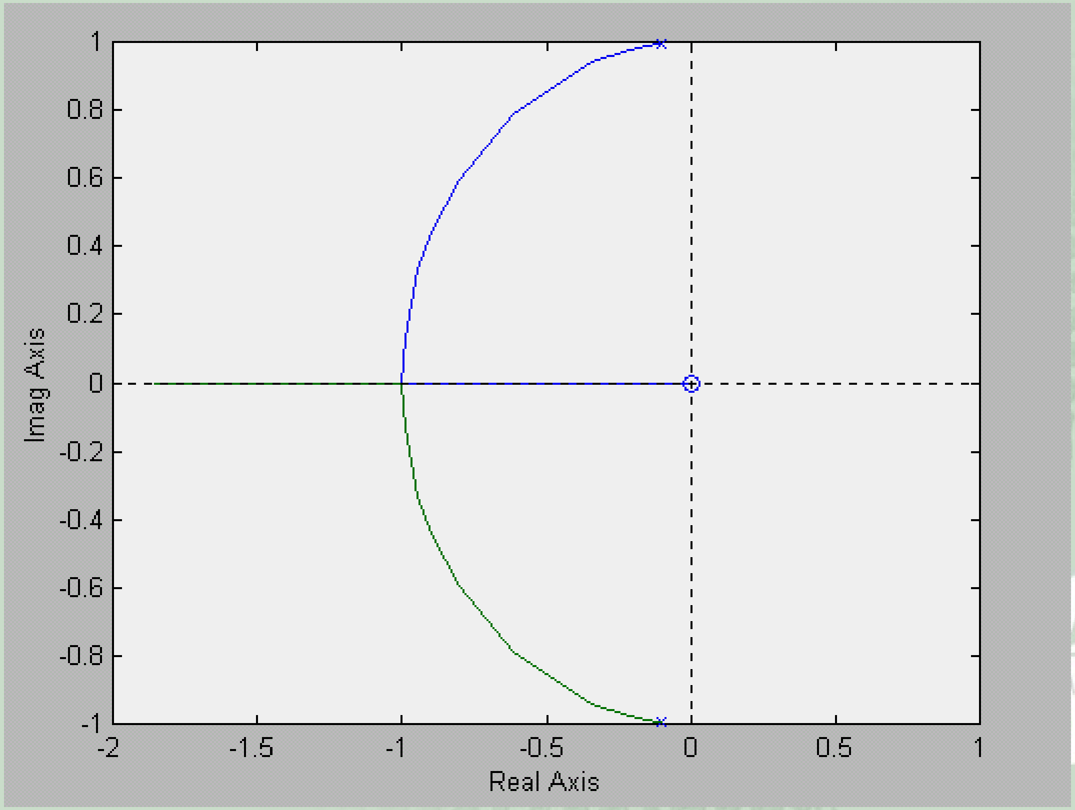
新系统开环传递函数

$$G'(s)=\frac{T_a s}{(s+0.1+j0.995)(s+1-j0.995)}$$

新系统开环极点$p_{1,2}=-0.1\pm j0.995$(系统I的闭环极点)

开环零点$z_1=0$

当$T_a:0\to\infty$时



参数根轨迹绘制方法:

（1）对原系统闭环特征方程 $1+G(s)H(s)=0$ 等效变换为

$$1+A\frac{P(s)}{Q(s)}=0$$

其中A为除K*以外任意变化的参数，P(s)和Q(s)是与变化的参数A无关的首一多项式，得到等效系统的开环传递函数

$$G_1(s)H_1(s)=A\frac{P(s)}{Q(s)}$$

（2）作 $A:0\to\infty$ 时的根轨迹。

二、零度根轨迹

在下面两种情况下，绘制根轨迹要按零度根轨迹绘制法则：

（1）非最小相位系统中包涵s最高次幂的系数为负的因子；

（2）正反馈系统。

根轨迹方程为 $1-G(s)H(s)=0$ 即 $G(s)H(s)=1$

幅值方程与常规根轨迹相同，而相角方程不同，应为

$$\begin{cases} K^* = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod\limits_{i=1}^{m}|s-z_i|} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum\limits_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=0^\circ+2k\pi \qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots \end{cases}$$

绘制零度根轨迹时，要对常规根轨迹的部分法则作修改：

法则3 实轴上的根轨迹应为：实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为偶数，则该区域必是根轨迹。

法则4 渐近线的交角应为:

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-m-1)$$

法则5 根轨迹的起始角和终止角应为:

$$\theta_{pi} = \sum_{j=1}^{m} \angle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \angle(p_i - p_j)$$

$$\varphi_{zi} = \sum_{j=1}^{n} \angle(z_i - p_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \angle(z_i - z_j)$$

例2 单位正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试绘制根轨迹。

解：1、根轨迹的分支数：3

开环极点：$p_{1,2}=-1\pm j, p_3=-3$

开环零点：$z_1=-2$

2、实轴上的根轨迹段：$(-\infty,-3)$ $(-2,\infty)$

3、渐近线：$n=3, m=1$

$$\varphi_a=\frac{2k\pi}{n-m}=\frac{2k\pi}{3}=\begin{cases}0^\circ & k=0\\ 180^\circ & k=1\end{cases}$$

4、起始角：

$$\theta_{p1}=2k\pi+\sum_{i=1}^{m}\angle(p_1-z_i)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 3}}^{n}\angle(p_1-p_i)$$

$$=2k\pi+\angle(p_1-z_1)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)$$

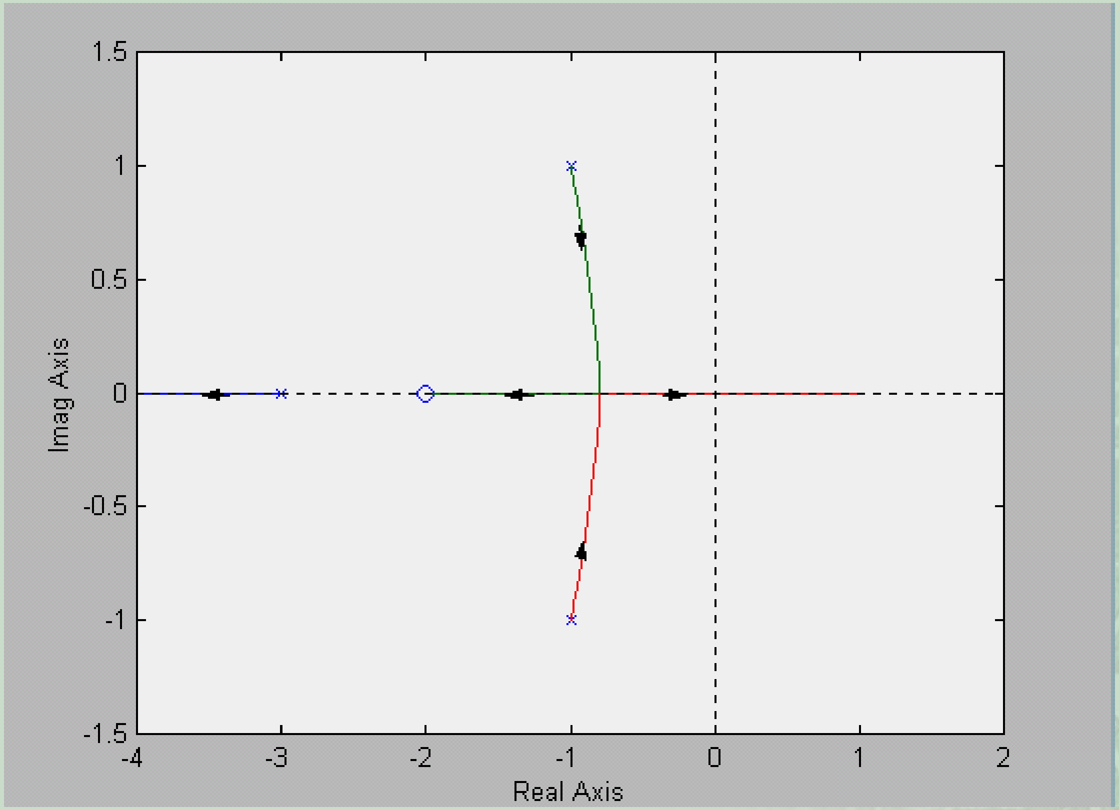
$$=-72^\circ$$

$$\theta_{p2}=72^\circ$$

4、分离点坐标:

$$\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1+j}+\frac{1}{d+1-j}=\frac{1}{d+2}$$

$$d=-0.8$$



利用模值方程

$$当s=0时 \quad K^*=\frac{|s+1+j||s+1-j||s+3|}{|s+2|}=3$$

$$当s=0.8时 \quad K^*=1.9$$

$0<K^*<1.9$,系统有一对共轭复根和一个负实根,响应为衰减的振荡;

$1.9<K^*<3$,系统有三个负实根,响应为无振荡;

$3<K^*<\infty$,系统有一个不稳定的极点,系统不稳定。

三、系统中有两个参数同时变化时的根轨迹

例3 单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(T_a s+1)}$

其中K可自行选定。试分析时间常数T对系统性能的影响。

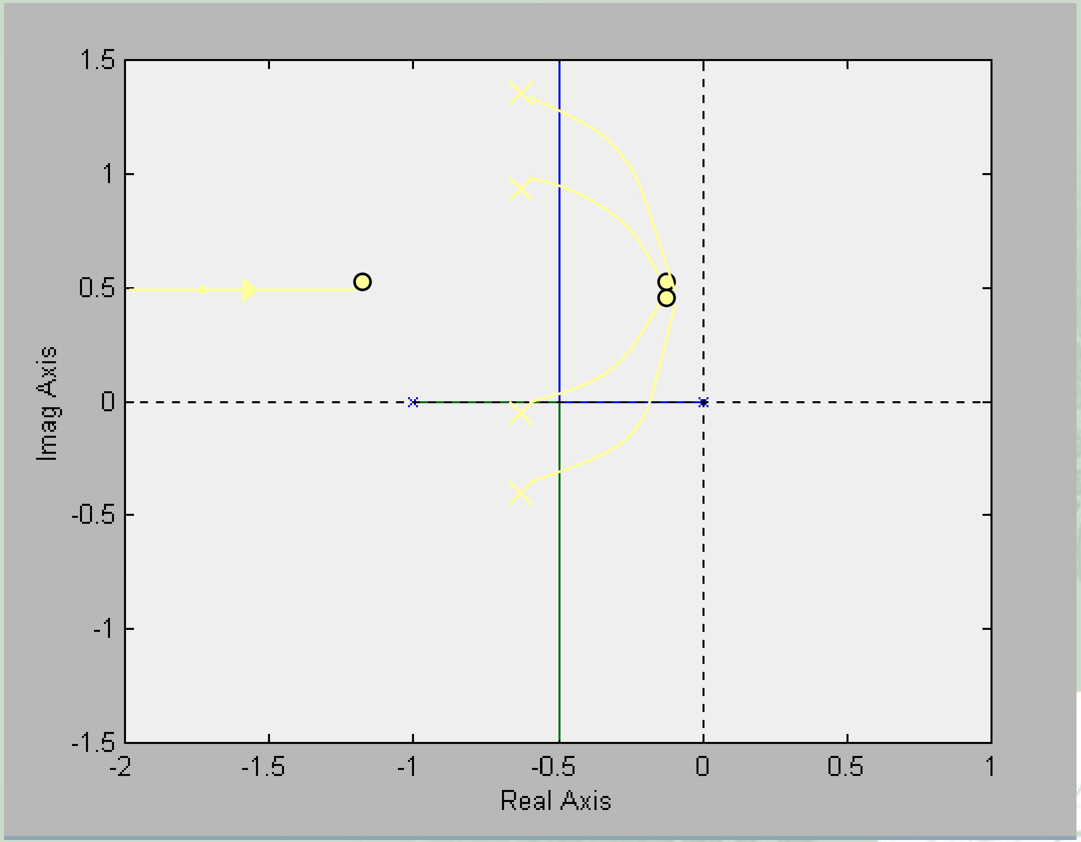
解：闭环特征方程为 $s(s+1)(T_a s+1)+K=0$

$$\left[s(s+1)+K\right]+T_a s^2(s+1)=0$$

等效开环传递函数 $G_1(s)=\dfrac{T_a s^2(s+1)}{s(s+1)+K}$

$T_a=0$时的特征方程为 $s(s+1)+K=0$

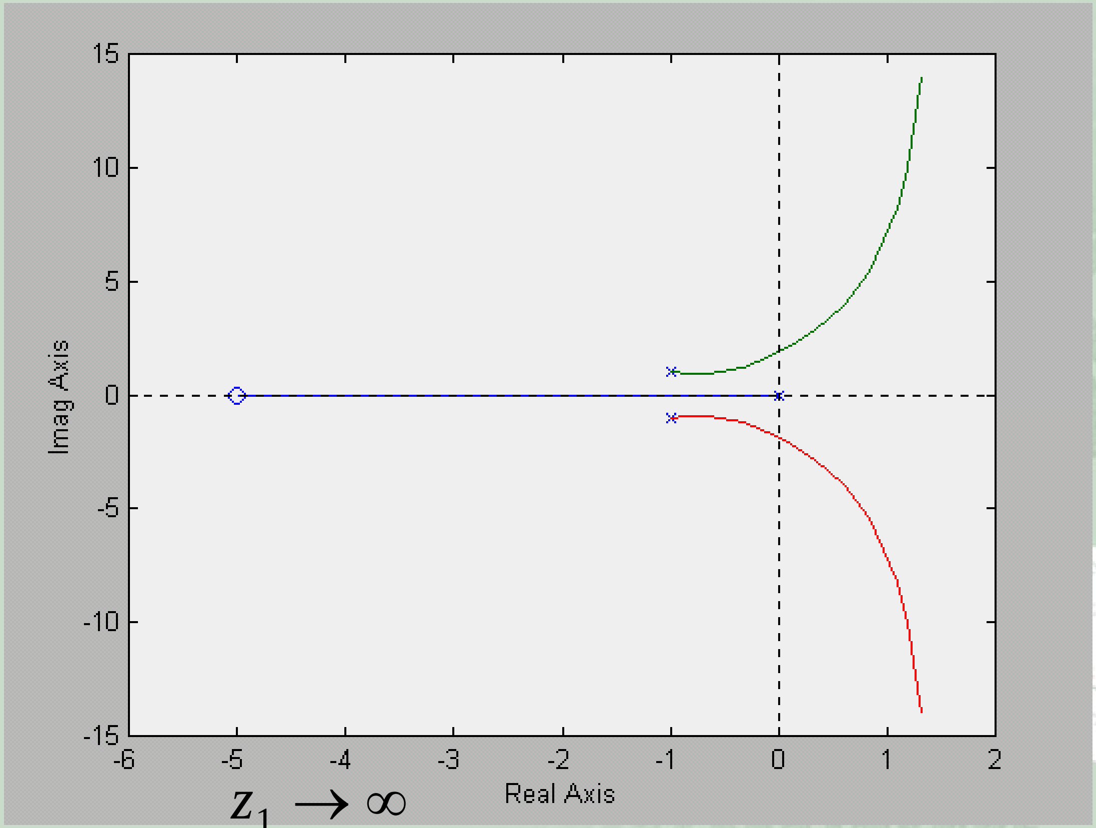
即$1+\dfrac{K}{s(s+1)}=0$



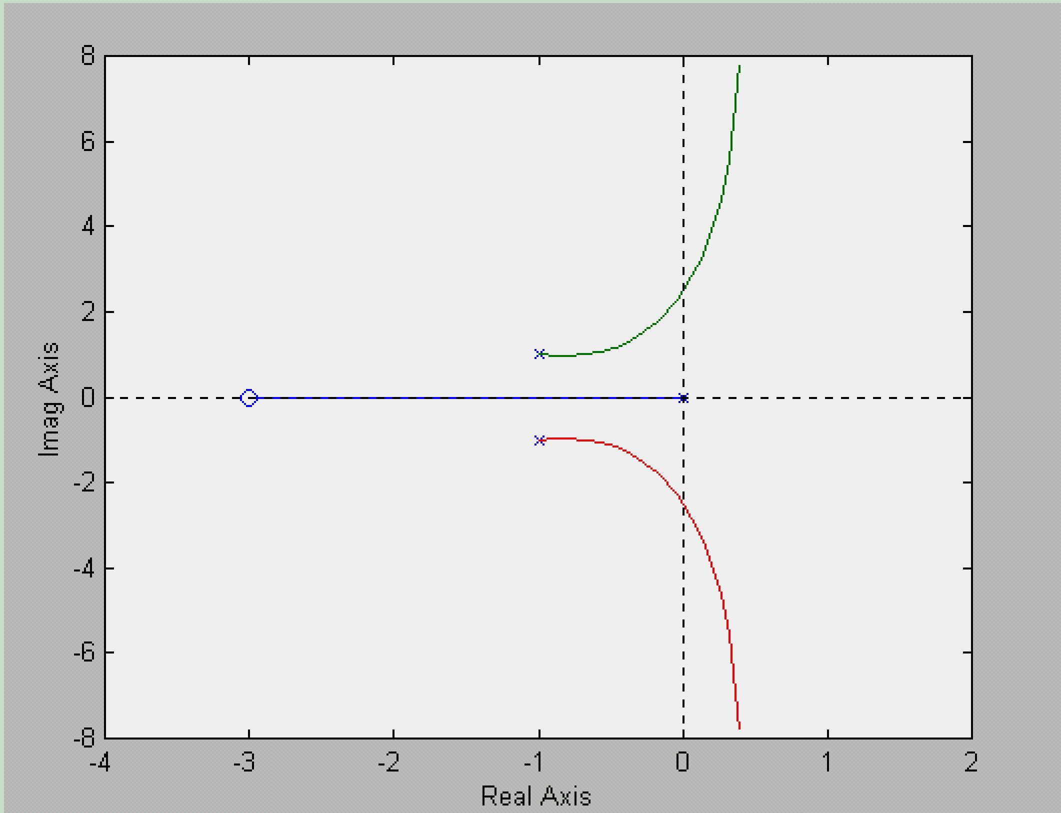
四、附加开环零点的作用

例 系统开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)}{s(s^2+2s+2)}$

其中z_1为附加的开环实数零点。

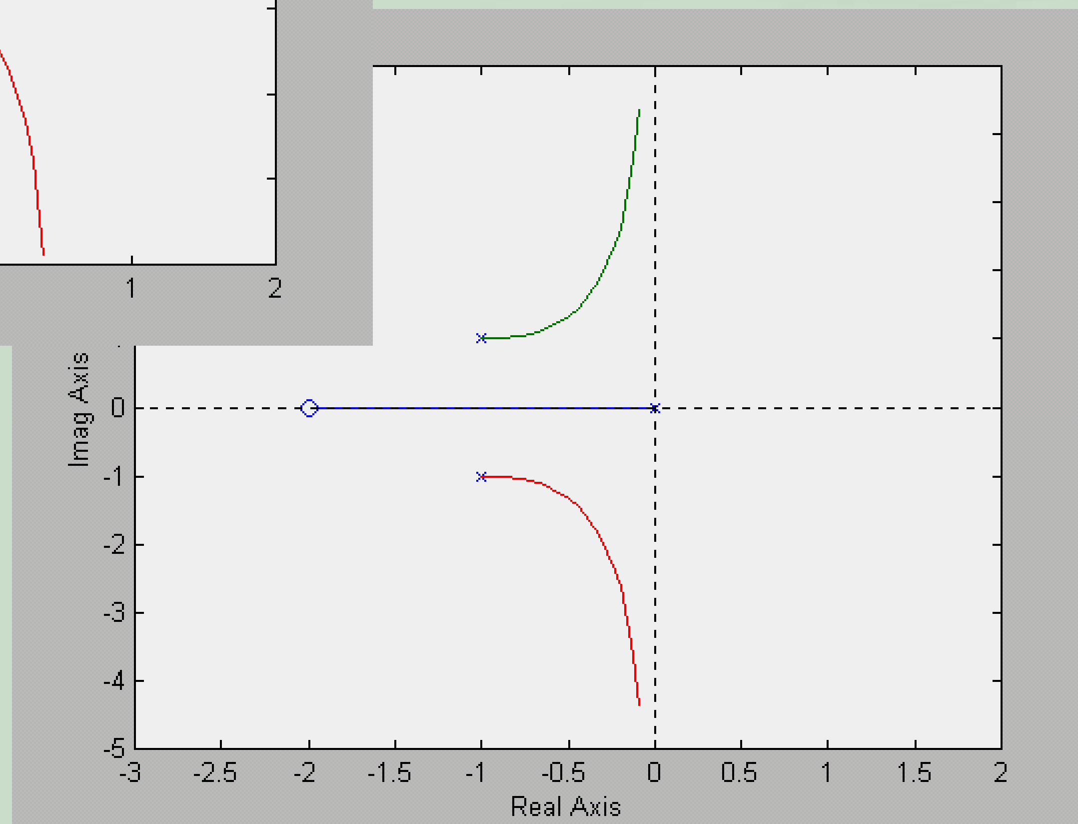


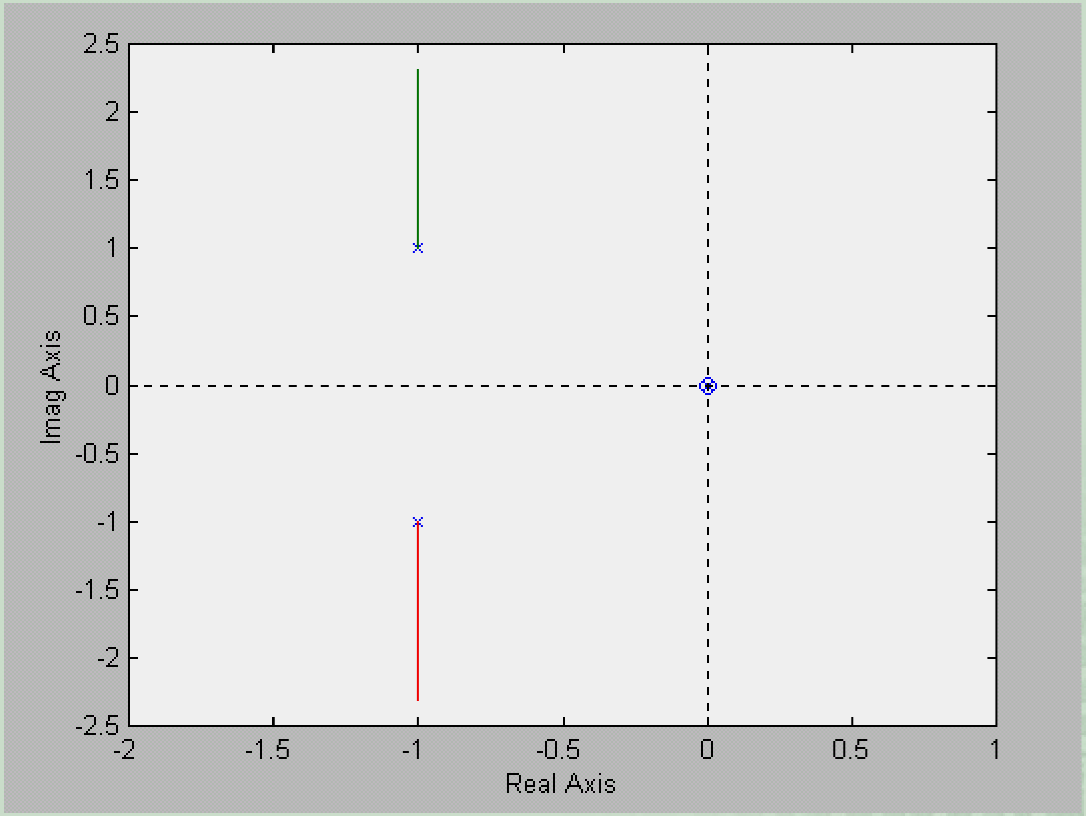
$z_1 \to \infty$


Imag Axis
Real Axis
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-4
-3
-2
-1
0
1
2

$z_1 = -3$

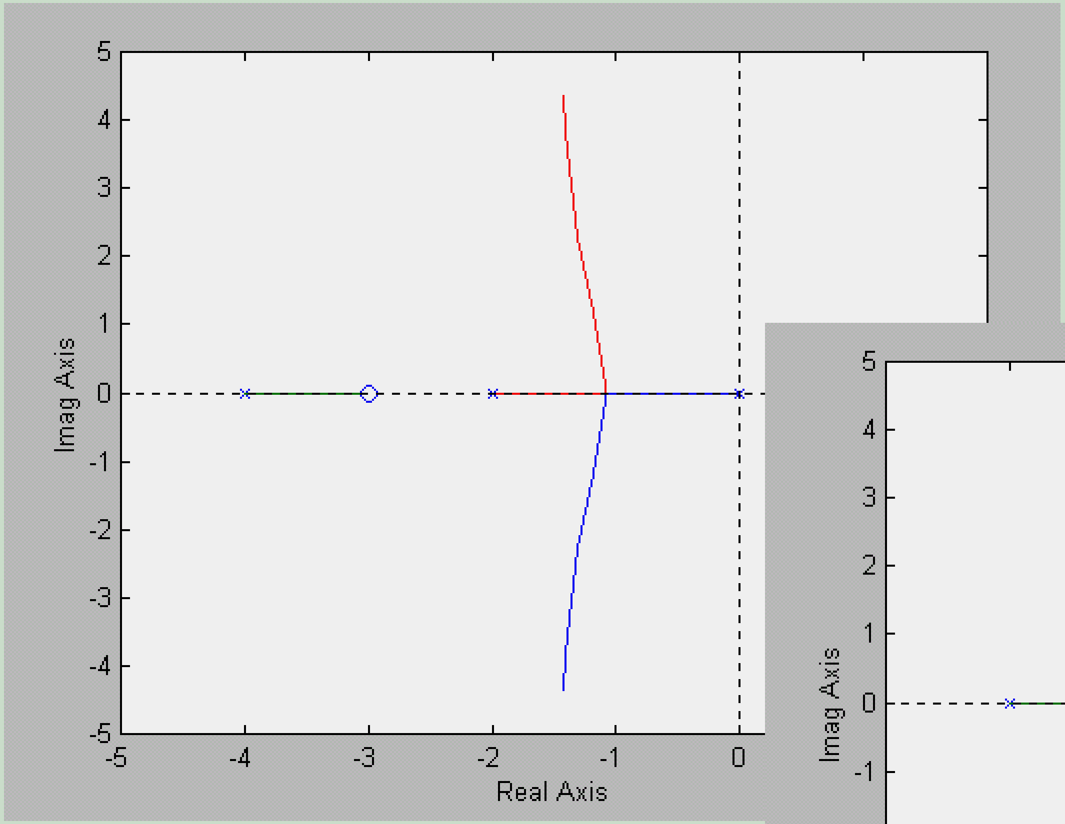
$z_1 = -2$


Imag Axis
Real Axis
0
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

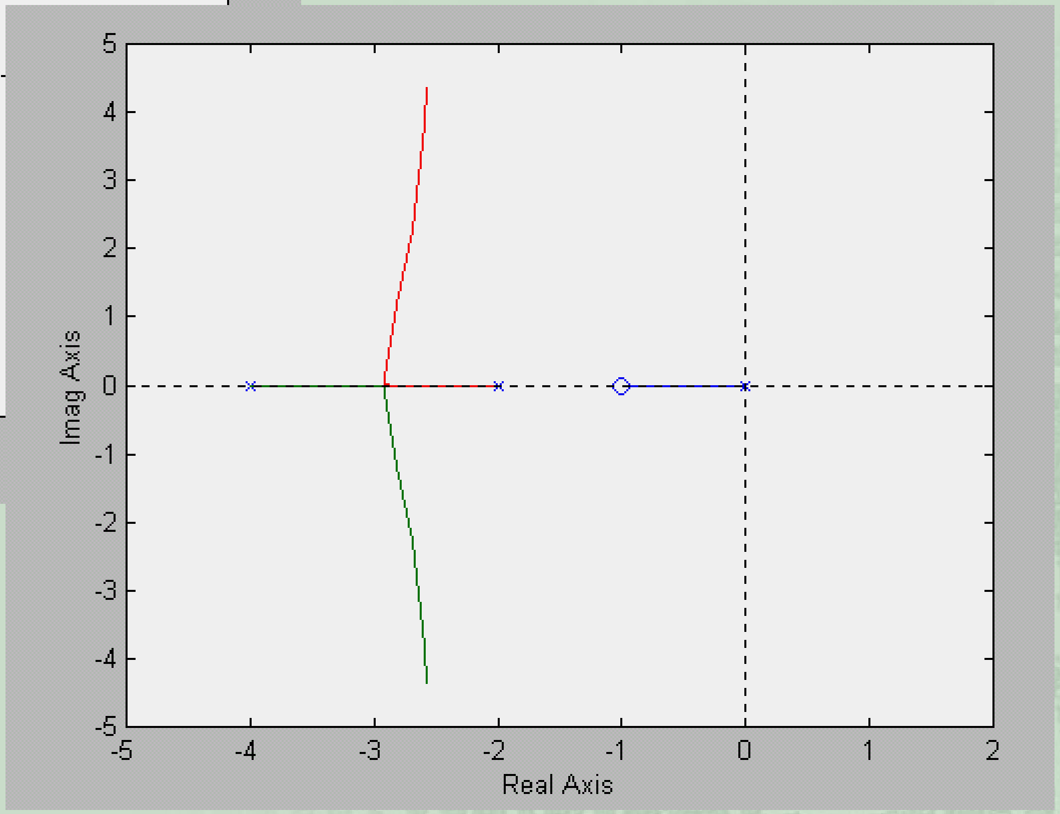


$$z_1 = 0$$

例 系统开环传递函数 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s-z_1)}{s(s+2)(s+4)}$



$z_1=-3$



$z_1=-1$

以上两幅图，附加零点分别为－3、－1，

从稳定性来看：（b)优于（a）

从动态性能来看：（a)优于(b)。

（a）图：主导极点可为共轭复数，闭环系统可近似为一个二阶振荡系统;

（b）图：闭环主导极点为实数极点，系统等价为一阶系统。

4－4　系统性能的估算

一、定性分析

闭环系统的传递函数 $\Phi(s)=\dfrac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}$

z_i —闭环零点

s_i —闭环极点

在单根情况下，单位阶跃响应

$$C(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{s-s_k}$$

$$A_k=(s-s_k)C(s)\Big|_{s=s_k}=\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s_k-z_i)}{s_k\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}(s_k-s_i)}$$

$$A_0=sC(s)\Big|_{s=0}=\Phi(0)$$

$$C(t)=A_0+\sum_{k=1}^{n}A_k e^{s_k t}$$

1、稳定性

所有闭环极点均位于s平面的左半部，则系统稳定。

2、快速性

系统快速性好，即每一项 $A_k e^{s_k t}$ 应衰减快

（1） $e^{s_k t}$ 衰减快，则闭环极点 s_k 应远离虚轴

（2）要求 A_k 小，则 $s_k - s_i$ 要大，$s_k - z_i$ 要小，即闭环极点之间距离要大，零点要尽量靠近该极点。

3、运动形式

如闭环系统无零点，闭环极点为实数时，响应单调；闭环极点为复数，响应振荡。

如闭环有零点，对于一阶系统，闭环零点使系统加速趋于稳态值；对于二阶振荡系统，闭环零点使系统的峰值时间提前，这相当于减小闭环系统的阻尼，从而使超调量加大。当闭环零点接近坐标原点时，这种作用尤胜。

二、主导极点和偶极子

主导极点：在s平面上，最靠近虚轴而附近又无闭环零点的一些闭环极点，对系统性能影响最大，称为主导极点。凡比主导极点离虚轴的距离大6倍以上的其他闭环极点和零点都可忽略。

偶极子：如零、极点之间的距离，比它们本身的模值小一个数量级，它们就构成偶极子。远离原点的偶极子，其影响可忽略；接近原点的偶极子，其影响，必须考虑。

三、动态指标的定量估算

例 系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$ 试用根轨迹法分析系统的稳定性，并计算闭环主导极点具有 $\varsigma=0.5$ 时的性能指标。

解:

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

$$K^*=2K$$

1.作根轨迹图

(1) 有三条根轨迹

(2) 实轴上的根轨迹: $(-\infty,-2)$

(3) 渐近线: $\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} = \begin{cases} 60°, & k=0 \\ -60°, & k=-1 \\ 180°, & k=1 \end{cases}$

(4) 分离点: $\dfrac{1}{d+1} + \dfrac{1}{d+2} + \dfrac{1}{d} = 0$

$3d^2 + 6d + 2 = 0$

$d_1 = -0.423 \qquad d_2\ -1.58$ (舍去)

(5) 与虚轴交点

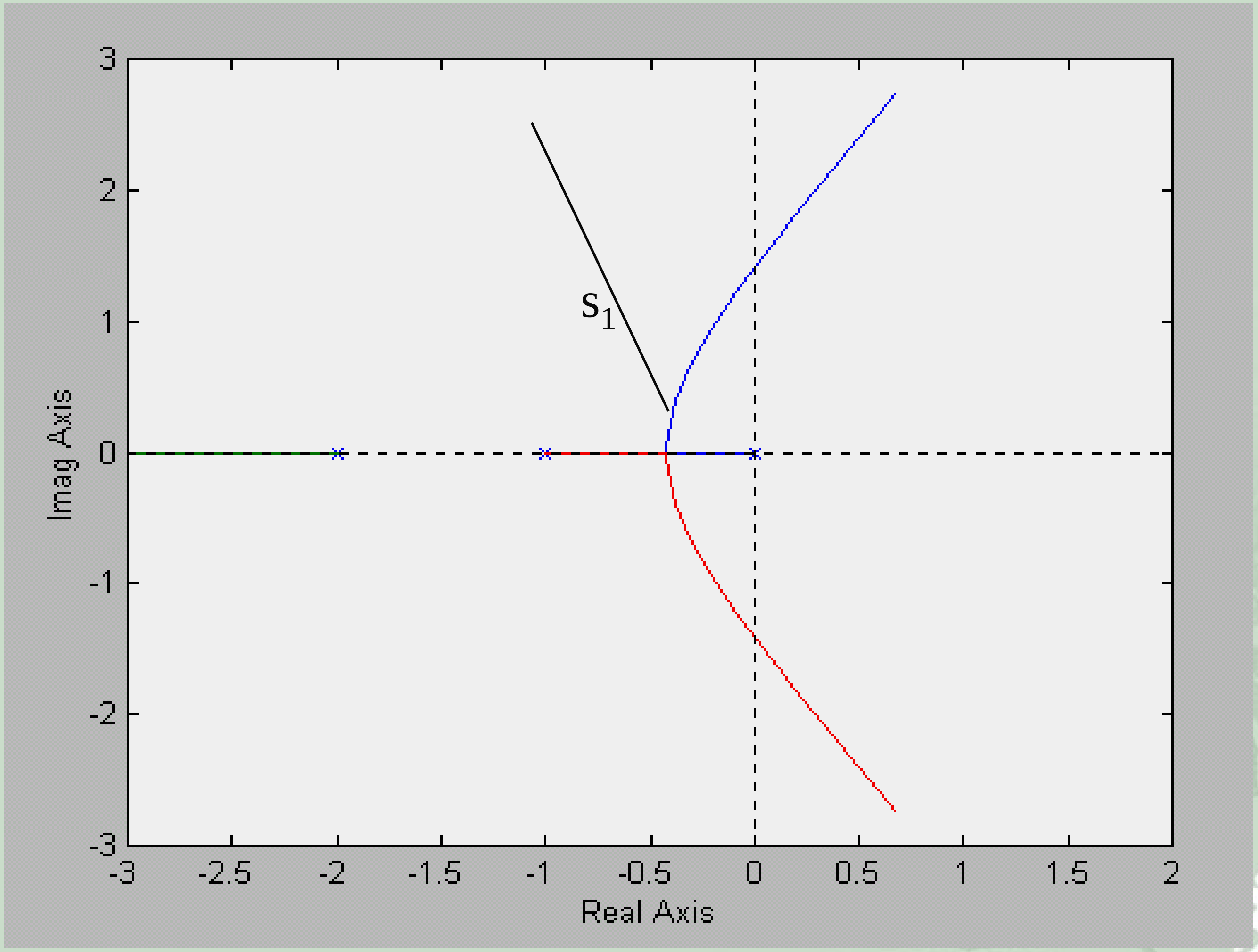
特征方程 $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$

令 $s = j\omega$

$$\begin{cases} -\omega^3 + 2\omega = 0 \\ -3\omega^2 + K^* = 0 \end{cases}$$

$K^* = 6 \qquad K = 3$

$\omega = 1.414$



3
2
1
0
-1
-2
-3
Imag Axis
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
Real Axis
s_1

2. 稳定性分析：系统稳定域

3. 确定$\zeta=0.5$时的闭环主导极点

(1) 画$\zeta=0.5$即$\beta=60^\circ$时的等阻尼线，求s_1

令$s_1=-\sigma+j\omega$

$$\therefore \frac{\omega}{\sigma}=tg\,60^\circ$$

$$\therefore \omega=\sqrt{3}\sigma$$

代入闭环特征方程 $s(s+1)(0.5s+1)+K=0$

$\therefore s_1=-0.33+j0.58$ 共轭极点 $s_2=-0.33+j0.58$

(2) 利用模值方程求 K^*

$$\frac{K^*\prod_{i=1}^{m}\left|s-z_i\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|s-p_i\right|}=1$$

$$K^* = |s_1 - p_1|\cdot|s_1 - p_2|\cdot|s_1 - p_3| = |s_1|\cdot|s_1 - 1|\cdot|s_1 - 2|$$

$$= 0.667 \times 0.886 \times 1.77 = 1.05$$

$$K = 0.525$$

(3)求 s_3

由 $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K^* = 0$

$K^* = 1.05 \quad s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ 可求出

$$s_3 = -2.34$$

$\therefore s_{1,2} = -0.33 \pm j0.58$ 是主导极点

4.估算性能指标

系统可近似二阶

$$\because (s + 0.33 + j0.58)(s + 0.33 - j0.58) = s^2 + 0.667s + 0.445$$

$$\therefore \Phi(s) = \frac{0.445}{s^2 + 0.667s + 0.445}$$

$$\omega_n = \sqrt{0.445}, \zeta = 0.5$$

$$\sigma\% = e^{-\zeta\omega_n / \sqrt{1-\zeta^2}} = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 1.05 \text{秒}$$