

热传导反算模型的建立及其在求解 界面热流过程中的应用 *

郭志鹏 熊守美

(清华大学机械工程系, 先进成形制造教育部重点实验室, 北京 100084)

曹尚铉 崔正吉

(韩国生产技术研究院新材料研究开发中心, 仁川, 韩国)

摘要 基于热传导反算中的非线性估算法, 建立了求解界面热流及换热系数的数学模型, 并在此基础上开发了热传导反算程序. 通过在网格边界上施加三角形热流, 求解出网格内部不同位置点的温度变化曲线, 然后以求解出的温度为输入数据, 利用反算程序求解出界面热流, 通过对比求解的热流和实际的热流, 验证了该模型的准确性. 同时本文还分析了测温传感器的滞后、热流形状、计算参数、采样频率以及测温点离表面的距离对于计算结果的影响, 并且针对相关问题提出了解决方案.

关键词 非线性估算法, 界面换热, 热传导反算

中图分类号 TG249.2, TG292 文献标识码 A 文章编号 0412-1961(2007)06-0607-05

DEVELOPMENT OF AN INVERSE HEAT TRANSFER MODEL AND ITS APPLICATION IN THE PREDICTION OF THE INTERFACIAL HEAT FLUX

GUO Zhipeng, XIONG Shoumei

Key Laboratory for Advanced Materials Processing Technology, Ministry of Education, Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084

CHO Sang-Hyun, CHOI Jeong-Kil

Advanced Material R & D Center, Korean Institute of Industrial Technology, Incheon, Korea

Correspondent: XIONG Shoumei, professor, Tel: (010)62773793, E-mail: smxiong@tsinghua.edu.cn

Supported by Korean Institute of Technology (20063000196) and National Natural Science Foundation of China (No.50675114)

Manuscript received 2006-10-23, in revised form 2007-01-26

ABSTRACT A mathematic model for the determination of the surface heat flux and heat transfer coefficient was built based on one of the inverse heat transfer methods—the nonlinear estimation method. A general inverse heat transfer analysis computer program was developed and used to estimate the heat flux history by the temperature data generated by applying a triangle heat flux on one of the one dimensional mesh boundaries. Validation of the inverse heat transfer program was conducted by comparing the estimated heat flux with the triangle heat flux history. The influences of the thermocouple delay, the shape of the heat flux, calculation parameters, temperature sampling frequency and the distance from the temperature measurement point to the surface on the prediction of the surface heat flux were also studied. Additionally, some approaches in reducing such influences were also discussed.

KEY WORDS nonlinear estimation method, interfacial heat transfer, inverse heat transfer problem

* 韩国工业技术研究院项目 20063000196 及中国国家自然科学基金项目 50675114 资助

收到初稿日期: 2006-10-23, 收到修改稿日期: 2007-01-26

作者简介: 郭志鹏, 男, 1981 年生, 博士生

在铸件的凝固过程中, 铸件-铸型界面换热行为决定了铸件的凝固方式和凝固时间, 并最终决定了铸件的组织和性能^[1,2]. 同时, 随着铸造过程计算机数值模拟技术的发展, 很多商业化软件的涌现, 使得精确模拟铸造充型、凝固过程成为可能, 但是采用这些软件进行精确的计算有

赖于精确的边界条件和初始条件^[2-5]. 其中, 作为边界条件之一的界面换热系数是制约计算结果准确性的最重要参数之一. 在实际的应用过程中换热问题尚未较好解决, 简化的措施就是采用一个猜测值或者经验公式, 这些猜测值或者经验公式的计算结果可能在凝固相对较慢的过程如砂型铸造过程中带来的误差并不会很大, 但是在相对快速比如压铸^[6]或者挤压铸造^[7]的凝固计算中, 计算结果的误差是非常大的甚至可能是错误的. 因此, 建立正确的数学模型, 深入地研究界面换热行为, 探讨各种因素对于反算结果准确性的影响, 从而针对特定的问题确定特定的、正确的计算方法就显得尤为重要.

本文首先建立热传导反算的数学模型, 算法是基于由 Beck 等^[8]首先提出的非线性估算法. 以此为基础, 编写了热传导反算的计算机程序. 然后以三角形热流作用于网格边界, 另一侧的边界条件设为绝热, 计算一维温度场的内部特定位置的温度变化曲线, 以此温度曲线为初始输入参数, 采用该计算机程序反算边界上的热流值, 将此热流值和实际的三角形热流进行比较, 验证了模型的正确性. 同时, 本文还考虑了传感器的延迟、热流形状、计算参数、采样频率以及测温点离表面的距离对于计算结果的影响. 力求能够对实际的求解热传导反问题的过程进行相关指导.

1 数学模型

1.1 非线性估算法

非线性估算法^[8]在求解 M 时刻热流时, 假设 M 以及 M 以后的 r 个时间步长之内热流值相等, 即

$$q_M = q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r} \quad (1)$$

定义 $F(q_M)$ 为

$$F(q_M) = \sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^r (\theta_{j,M+i}^m - \theta_{j,M+i}^c)^2 \quad (2)$$

在以后的结算中以极小化 $F_M(q)$ 为主要目的. 其中 $\theta_{j,i}^m$ 和 $\theta_{j,i}^c$ 分别为在测温点 j 和时间段 $M+i$ 实际测量的温度和计算求解的温度, J 和 r 分别为测量温度点的总数和将来时间段的总数, 这里所指的将来时间段数是非线性估算法特别考虑的, 其主要的意义是在计算当前时刻的热流时把以前时刻热流的影响考虑在内, 详见文献^[8]. 对式 (2) 进行求导并令其为 0 可得

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^r (\theta_{j,M+i}^m - \theta_{j,M+i}^c) \frac{\partial \theta_{j,M+i}^c}{\partial q_M} = 0 \quad (3)$$

由 Taylor 展开式

$$\theta_{j,M+i}^c = \theta_{j,M+i}^{c*} + \phi_{j,M+i}^M (q_{j,M} - q_{j,M}^*) \quad (4)$$

$$\phi_{j,M+i}^M = \left. \frac{\partial \theta_{j,M+i}^c}{\partial q_M} \right|_{q_M=q_{j,M}^*} \quad (5)$$

其中 $\theta_{j,M+i}^c$ 和 $q_{j,M}^*$ 是上一时刻的温度值和热流值. 通过数学推导, 最终通过以下两式求解界面热流:

$$\Delta q_M = \frac{\sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^r (\theta_{j,M+i}^m - \theta_{j,M+i}^{c*}) \phi_{j,M+i}^M}{\sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^r (\phi_{j,M+i}^M)^2} \quad (6)$$

$$q_M = q_M^* + \Delta q_M \quad (7)$$

采用式 (7) 通过迭代, 每一步迭代过程均对铸件铸型内部温度场进行计算, 直至迭代满足条件

$$\Delta q_M / q_M < \varepsilon \quad (8)$$

(ε 为小数, 一般取 $\varepsilon=10^{-4}$), 即对时间段 M 求解完毕, 转入下一时间段. 在本文中, 只涉及到了求解界面热流的问题, 若是需要求解界面换热系数, 只需再求解出铸件表面温度, 然后根据下式计算即可:

$$h_M = q_M / (\theta_c - \theta_s) \quad (9)$$

其中, h_M , θ_s 和 θ_c 分别为换热系数以及铸型和铸件的表面温度.

1.2 温度场计算

求解相关温度场时采用一维传热模型, 其数学描述如下式所示:

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (10)$$

式中, ρ 为密度, κ 为热导率, c 为比热容. 引入 Kirchoff 变换以及热焓变换

$$U = \frac{1}{\kappa_0} \int_{T_0}^T \kappa dt \quad (11)$$

$$H = \int_{T_0}^T c dt \quad (12)$$

式中, κ_0 是温度为 T_0 时金属的热导率, 其中 T_0 为参考温度 (一般为室温), H 为热焓, T 为当前温度. 方程 (10) 变为

$$\kappa_0 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial H}{\partial t} \quad (13)$$

采用有限差分法, 将方程 (13) 进行离散, 利用全隐式解法可得

$$AF_i H_i^{t+1} + 2U_i^{t+1} = U_{i+1}^{t+1} + U_{i-1}^{t+1} + AF_i H_i^t \quad (14)$$

$$AF_i = \rho_i^k (\Delta x)^2 / (\kappa_0 \Delta t) \quad (15)$$

式中, 上标 t 为当前时间, $t+1$ 为下一时刻时间. 此方程可以采用松弛迭代法进行求解.

2 模型验证

采用三角形热流, 如图 1 中的 q 所示, 热流的最大值为 2 MW/m^2 , 三角形热流持续的时间为 1 s , 其余时间段

热流值为 0.0005 MW/m^2 ，热流总的持续时间为 5 s 。将该热流施加于网格边界上，另一侧边界设置为绝热条件，网格单元总长度为 10 mm ，计算过程中材料为 H13 钢。时间步长为 0.02 s ，空间步长为 0.2 mm 。图 1 中的 T_{sf} 以及 $T_{3 \text{ mm}}$ 和 $T_{10 \text{ mm}}$ 为计算得到热流边界温度以及距离热流边界分别为 3 和 10 mm 处的网格单元的温度。

以计算得到的 3 和 10 mm 处的温度值为输入参数，采用热传导反算程序，反算出网格边界处的热流和其相应的温度值，计算中，时间步长 r 值取 4 。如图 2 所示，热流及界面温度的计算结果与实际值都非常吻合，最大误差小于 2% 。计算结果表明，针对给定的三角形热流，反算模型能够很准确地求解界面热流和相关温度值。

3 各种因素对于计算准确性的影响

热传导反算问题在很多情况下都是病态的，也就是说在很大程度上，计算的准确性受制于测量温度的准确程

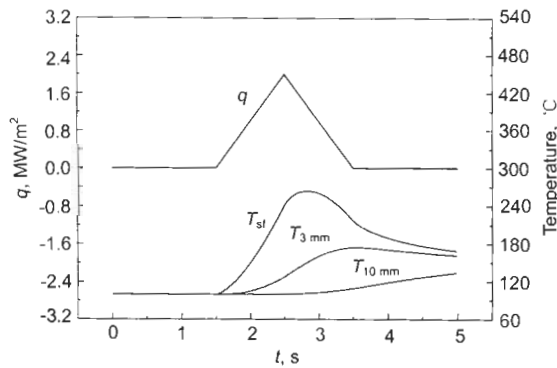


图 1 三角形热流 (q) 及直接计算得到的网格表面 (T_{sf}) 和内部距离热流表面 3 mm ($T_{3 \text{ mm}}$)、 10 mm ($T_{10 \text{ mm}}$) 处的温度值

Fig.1 Triangle shaped heat flux (q) and the calculated surface temperature (T_{sf}) and internal temperatures located at 3 mm ($T_{3 \text{ mm}}$) and 10 mm ($T_{10 \text{ mm}}$) from the surface

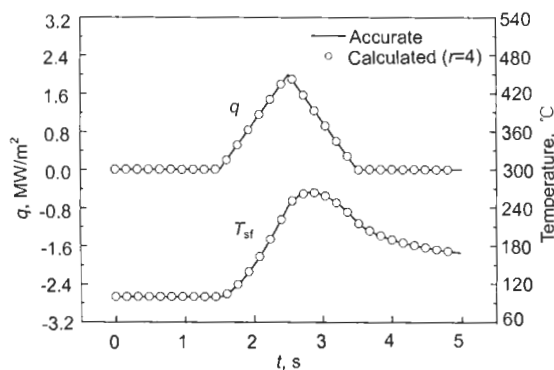


图 2 以 3 和 10 mm 处温度作为初始输入参数利用反算程序计算得到的热流值及网格边界温度值

Fig.2 Comparisons between calculated surface heat flux and surface temperature and the accurate values

度。在实际的温度测量过程中，测量的温度与真实的温度之间不可避免的存在着误差 [9]，尤其是温度传感器本身对于热量的感应存在着一定的延迟，这样带来的误差在反算的过程中会放大，最终将造成结果的不准确甚至失真。在计算过程中，不同的表面热流需要采用不同的温度测量和计算方法才能够实现较为准确的求解，同时计算参数的选择（未来时间段数等）、采样频率和最近测温点的位置，也对计算结果有着很大的影响。以下将对这几个方面的问题进行相关讨论。

3.1 温度传感器的延迟

对于温度传感器与周围环境的热交换，由文献 [9]，可以采用以下方程进行描述：

$$\tau \cdot \frac{d\theta_T}{dt} + \theta_T = \theta_e \quad (16)$$

$$\tau = \frac{mc}{Ah} \quad (17)$$

$$\theta_T = \theta_M - \theta_{ref} \quad (18)$$

$$\theta_e = \theta_a - \theta_{ref} \quad (19)$$

其中， θ_M 为热电偶测得的温度， θ_a 为实际的准确温度， θ_{ref} 为参考温度， τ 为热电偶的时间常数（其单位为 s ）， m 为热电偶测温端的质量， c 为比热容， A 为测温端与周围介质的接触面积， h 为热电偶与周围介质的等效换热系数。简单数学推导可得

$$\theta_T(t) = \theta_e(1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

将式 (20) 应用于热流的测试计算中，采用不同的 τ 值可以得到如图 3 的计算结果。

从图 3 可以看出，随着 τ 值的增大，计算结果偏离正确解的程度也在逐渐加大。不论是从数值上还是变化幅度上来说， τ 值的增大都显著地降低了计算结果的准确性。可见，在实际的求解界面换热问题的过程中，必须要充分地考虑热电偶时间常数的影响，采用时间常数对实际测得的温度进行相关修正，然后再进行计算，否则计算结果很可能是误差很大的。

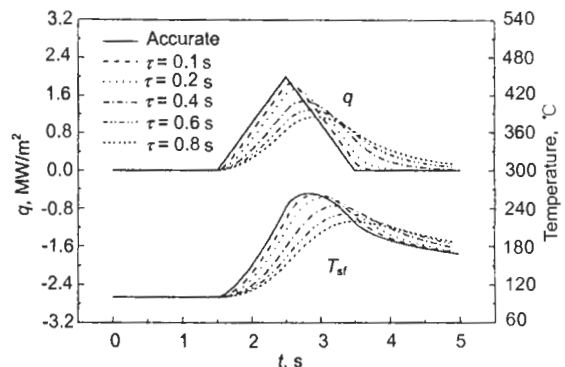


图 3 采用不同的时间常数 (τ) 测试计算的结果

Fig.3 Calculated and accurate results under different time constant values (τ)

3.2 热流形状的影响

很多的铸造或其他材料加工过程都涉及到快速凝固, 而快速凝固则必然导致热流的变化幅度和速度的加快, 计算这样的热流势必与计算普通的变化缓慢的热流不同. 图4显示了采用变化较快的三角形热流测试计算的结果. 其中, 热流在1.5 s处, 在很短的时间(0.01 s)内从较小值 0.0005 MW/m^2 增大到了 2 MW/m^2 . 计算参数与模型验证中采用的参数一致.

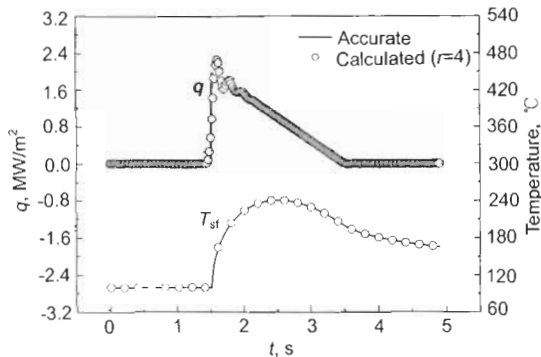


图4 采用变化较快的热流进行测试计算的结果

Fig.4 Calculated and accurate results under a fast change flux case

从图4可以看出, 计算结果和实际结果在热流变化很快的1.5 s处差别较大, 误差达到了51%. 而且计算结果的热流峰值达到了近 2.4 MW/m^2 比实际热流峰值要高. 同时, 从热流形状可以看出, 计算得到的热流在1.5 s处的变化率要比实际热流小, 也就是说, 计算的热流开始增大的时刻比实际的时刻要提前, 但是峰值到来的时刻却要比实际的时刻推后, 这就使得热流变化较快时计算结果与实际结果存在着严重的偏差. 而从热流变化率较小的后半部分来看, 计算结果与实际热流则有较好的吻合, 这也证明了采用这种计算参数不利于求解变化较快的热流.

3.3 未来时间段数的影响

Beck等^[8]提出的非线性估算法的一个重要的特点就是在计算中引入了未来时间步长(即 r 值)的概念, 从而使求解的过程变得比较稳定, 计算结果的准确性也大大地提高. 但是 r 值的选取不当也会给计算结果带来很大的误差.

图5显示了两种不同热流测试计算的结果. 从中可以看出3点结论(以计算得到的热流为例): (1) r 值的增大提前了热流开始增大的时刻, 但是却延迟了热流峰值的到来时间; (2) r 值的增大增加了计算结果的平滑程度; (3) 对于变化较快的热流来说, r 值的减小会增加计算结果的不稳定性. 这一点可以明显地从图5b看出, 在 r 值为2时, 热流的计算结果在峰值附近存在着明显的波动.

3.4 采样频率的影响

从式(20)可以看出, 在同样的测温条件下(同样的

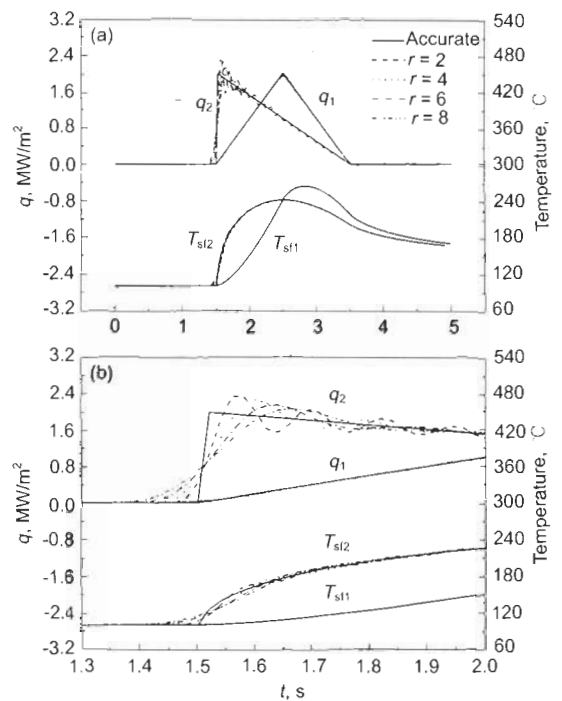


图5 r 值的不同对于反算结果的影响

Fig.5 Influences of the future time step (r) on the calculation results in the whole domain (a) and partial domain (b)

热电偶, 同样的测温环境) 采样频率越大, 测得的温度值就越接近实际的温度值. 那么在其他误差恒定的条件下, 是不是求得的热流值就更接近实际值呢? 图6显示了采样频率的不同对于实际计算结果的影响.

从图6可以看出, 采样频率的减小极大地增加了计算结果的不稳定性, 同时计算带来的误差也越大; 而采样频率的减小虽然增加了计算结果的稳定性, 但是却增大了计算结果的滞后性. 但是也可以从热流的计算结果看出, 采样频率的增大推后了热流升高的初始时刻, 使其与实际热流反应的初始时刻更为接近. 从这个角度来说, 则是增加了计算结果的准确性.

3.5 最近测温点距离的影响

图7显示采用离表面1 mm点的温度值和10 mm点的温度值作为初始数据, 采用变化较快的热流测试计算得到的结果与实际结果的比较. 可以看出, 在这种情况下, 计算得到的热流和表面温度与实际值是非常接近的. 误差不超过5%. 同时, 采用200 Hz的采样频率, 使得热流反应的初始时刻与实际的热流反应的初始时刻基本重合, 在相位上也是非常准确的. 因此可以得出: 采用较近的温度测量点非常有利于提高计算结果的准确性.

从上面5个方面的分析可以看出, 在测温准确的前提下, 对于变化比较缓慢的热流来说, 采用普通的计算参

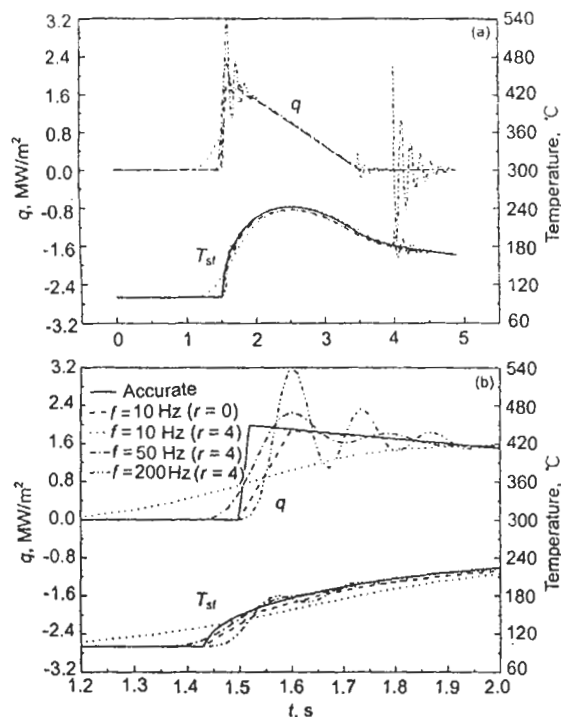


图 6 采样频率的不同对于反算结果的影响

Fig.6 Influences of the sampling frequency (f , Hz) on the calculation results in the whole domain (a) and partial domain (b)

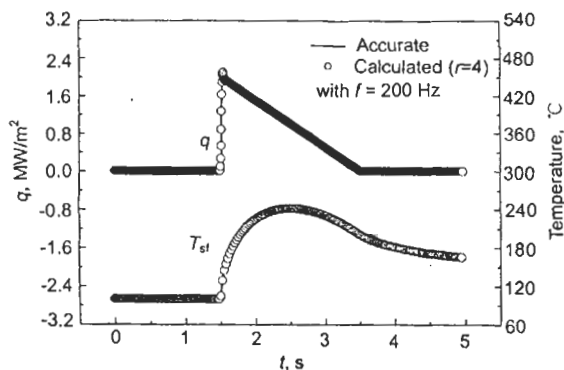


图 7 采用距离热流表面 1 和 10 mm 处作为最近测温点, 利用反算程序计算得到的结果与实际结果的比较

Fig.7 Comparisons between the accurate and the calculated results using the temperature readings at 1 mm and 10 mm from the surface as the input temperatures

数, 采样频率无需很高, 最近测温点也不需要非常靠近表面, 反算程序就可以求解出很精确的结果; 而对于变化非常剧烈的热流来说, 要想求得较准确的解必须满足的两个条件为: 测量温度的采样频率要高及最近测温点须离表面很近.

4 结论

(1) 建立了求解界面热流和换热系数的反算模型, 并编写了反算程序, 且采用三角形热流验证了反算模型的准确性.

(2) 分析了相关因素对于计算结果的影响如下:

(a) 热电偶的延迟对于反算结果有很大的影响, 随着时间常数的增大, 计算结果逐渐偏离实际值.

(b) 计算参数中 r 值的选取对计算结果有较大的影响, r 值越大, 计算结果越平滑, 但是相位 (即热流升高或降低起始时刻以及峰值到来时刻) 却逐渐偏离正确值.

(c) 采样频率的增大可以减小由于 r 值增大引起的相位误差, 但是频率太大会使计算结果不稳定.

(d) 对于存在剧烈变化热流的传热过程来说, 最近测温点一定要离表面很近, 而且也应在较高的频率之下进行温度采集, 这样才能求解出较为精确的解.

实验工作得到日本东洋机械金属株式会社村上正幸、松本悦豪和池田伸吾的大力支持.

参考文献

- [1] Guthrie R I L. *Metall Mater Trans*, 2000; 31B: 1031
- [2] Griffiths W D. *Metall Mater Trans*, 2000; 31B: 285
- [3] Santos C A, Quaresma J M V, Garcia A. *J Alloy Compd*, 2001; 319: 179
- [4] Lau F, Lee W B, Xiong S M, Liu B C. *J Mater Proc Technol*, 1998; 79: 25
- [5] Ho K, Pehlke R D. *Metall Mater Trans*, 1985; 16B: 585
- [6] Dour G, Dargusch M, Davidson C, Nef A. *J Mater Proc Technol*, 2005; 169: 223
- [7] Hines J A. *Metall Mater Trans*, 2004; 35B: 299
- [8] Beck J V, Blackwell B, Clair C R St. *Inverse Heat Conduction Ill-posed Problems*. New York: Wiley, 1985: 145
- [9] Michalski L, Echersdort K, McGhee J. *Temperature Measurement*. New York: Wiley, 1991: 230