第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

短文

一种线性二次型调节器闭环稳定的充分条件及在预测控制中的应用

陈忠保
（中国科学技术大学计算机系 合肥 230027）
李嗣福
（中国科学技术大学自动化系 合肥 230027）

摘 要 提出了终态松弛的线性二次型 Kleinman 调节器，给出并证明了该调节器保证系统闭环稳定的一个充分条件．将结果用于预测控制的稳定性分析，得到选择代价函数中加权阵的定量准则．

关键词 线性二次型调节器，稳定性，预测控制，区间后退策略．

A SUFFICIENT CONDITION FOR LQR TO STABILIZE SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO PREDICTIVE CONTROL

CHEN Zhongbao
(*Dept. of Computer University of Science & Technology of China, Hefei* 230027)
LI Sifu
(*Dept. of Automation, University of Science & Technlology of China, Hefei* 230027)

Abstract This paper proposes a free-final-state Kleinman LQR and a sufficient condition to ensure the close-loop stability with the regulator. By applying the result to the stability analysis of predictive control, a quantitative criterion is obtained to choose the weighting matrices in the cost function.

Key words LQR, stability, predictive control, receding horizon strategy.

1 引言

对于线性离散时不变系统

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{1}$$

收稿日期 1997-04-29 收修改稿日期 1997-11-18

其中 $x_k \in R^n, u_k \in R^m, A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$. 设计常值状态反馈阵使闭环系统渐近稳定的方法很多. Kleinman 于1974年提出了一种简易的方法[1]，其中假定：$A1)(A,B)$能控；$A2)A$非奇异. 考虑有限区间上的代价函数 $J_k=\sum_{i=0}^{N-1} u_{k+i}^{\mathrm{T}} R u_{k+i} (N \geqslant n)$在 $x_{k+N}=0$的约束下，得到二次型最优解. 按区间后退(receding horizon)策略，取当前时刻的控制输入 u_k 施加于系统，所形成的定常状态反馈可保证系统是闭环稳定的. Clarke 考虑预测控制的稳定性时[2]，利用上述结果，提出了一种定性选择代价函数中加权阵的方法：固定输出偏差加权阵，由控制加权阵 $R=\lambda I \to 0$近似实现 $x_{k+N}=0$的约束. 但 R 应小到何种程度才是良好的近似，即保证闭环稳定性，上述定性准则不能解决.

本文针对定性选择加权阵的缺陷，在 Kleinman 调节器的基础上，取消 $x_{k+N}=0$的约束，得到一种新的终态松弛的 Kleinman 调节器，并给出了保证系统闭环稳定的充分条件. 利用该结果分析预测控制，推导出选择加权阵的定量准则，以确保预测控制闭环稳定.

2　主要结果

2.1　终态松弛的 Kleinman 调节器

取代价函数

$$J = x_{k+N}^{\mathrm{T}} Q x_{k+N} + \sum_{i=0}^{N-1} u_{k+i}^{\mathrm{T}} R u_{k+i} \qquad (N \geqslant n),$$

其中 $Q>0, R>0$，且都是对称阵. 在系统(1)的约束下，得到 $u_{k+i}(i=0,1\cdots,N-1)$的解为

$$u = -(\bar{R} + O_B^{\mathrm{T}} Q O_B)^{-1} O_B^{\mathrm{T}} Q A^N x_k,$$

其中 $u=[u_k^{\mathrm{T}},\cdots,u_{k+N-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, \bar{R}=\mathrm{diag}\{\underbrace{R,R,\cdots,R}_{N个}\}, O_B=[A^{N-1}B,\cdots,B]$. 利用求逆引理$(A+BCD)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(C^{-1}+DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$，可将各时刻的控制输入展开为

$$u_{k+i} = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1-i}W_N^{-1}[I+Q^{-1}W_N^{-1}]^{-1}A^N x_k \quad (i=0,1,\cdots,N-1),$$

其中 $W_N=O_B\bar{R}^{-1}O_B^{\mathrm{T}}$，由条件 A1)及 $N \geqslant n$ 知 O_B 行满秩，故 W_N 非奇异且正定.

采用区间后退策略，每次只取 u_k，得到定常状态反馈

$$u_k = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1}W_N^{-1}[I+Q^{-1}W_N^{-1}]^{-1}A^N x_k \triangleq -Lx_k. \tag{2}$$

2.2　闭环稳定的充分条件

定理. 在条件 A1)及 A2)下，对所有 $N \geqslant n$，取 $Q=pW_N^{-1}, p\in(0,\infty)$，$R$ 为任意对称正定阵，如果

$$\frac{2\gamma-1}{\gamma^2} > \|H^{\mathrm{T}}W_N^{-1}H\|_2, \tag{3}$$

其中 $\gamma=\frac{p}{p+1}, H=A^{N-1}BR^{-\frac{1}{2}}$，$\|\cdot\|_2$表示2次范数，则状态反馈(2)使闭环系统渐近稳定.

证明. 当 $Q=pW_N^{-1}$ 时，(2)式中的反馈阵可表示为 $L=\gamma R^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1}W_N^{-1}A^N$，闭环系统矩阵为 $A_C=A-BL=A-\gamma BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1}W_N^{-1}A^N$. 由条件 A2)知 A^N 非奇异，用它对 A_C 作相似变换，有 $A_C \sim A-\gamma A^N BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1}W_N^{-1} \triangleq \phi$. 考虑系统 $x(k+1)=\phi^{\mathrm{T}}x(k)$的稳定性，因 $W_N>0$，取 $x^{\mathrm{T}}(k)W_N x(k)$为李亚普诺夫函数，下面证 $\phi W_N \phi^{\mathrm{T}}-W_N$ 半负定.

$$\phi W_N \phi^{\mathrm{T}} - W_N = AW_NA^{\mathrm{T}} + \gamma^2 A^N BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{N-1}W_N^{-1}A^{N-1}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^N -$$

$$2\gamma A^N BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^N - W_N, \tag{4}$$

因

$$AW_N A^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{N} A^i BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^i = A^N BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^N + W_N - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

且考虑 $H=A^{N-1}BR^{-\frac{1}{2}}$，将(5)式代入(4)式可得

$$\phi W_N \phi^{\mathrm{T}} - W_N = -AH[(2\gamma-1)I - \gamma^2 H^{\mathrm{T}} W_N^{-1} H]H^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}. \tag{6}$$

当(3)式成立时，对任意 n 维非零向量 $\boldsymbol{x}$，$\gamma^2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} W_N^{-1} H \boldsymbol{x} \leqslant \gamma^2 \| H^{\mathrm{T}} W_N^{-1} H \|_2 \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} < (2\gamma-1) \cdot \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$，该式表明 $V=(2\gamma-1)I-\gamma^2 H^{\mathrm{T}} W_N^{-1} H$ 正定，从而 $AHVH^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，又因 $BR^{-1}B^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，所以 $\phi W_N \phi^{\mathrm{T}} - W_N \leqslant 0$.

此外，可证明由任意非零初态 $\boldsymbol{x}(0)$ 所确定的轨线 $\boldsymbol{x}(k)$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)AHVH^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)$ 不恒为 0；否则有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)A^N BR^{-\frac{1}{2}}=0(\forall\ k \geqslant 0)$，即 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\phi^k A^N B=0(\forall\ k \geqslant 0)$. 又 $\phi^k A^N = A^N A_C^k$，取 $k=0,1,\cdots,n-1$，得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)A^N[B, A_C, B, \cdots, A_C^{n-1}B] = 0.$$

该式表明闭环系统不可控，而状态反馈不改变系统的可控性，故开环系统也不可控，这与条件 A1)矛盾. 所以任意非零初态 $\boldsymbol{x}(0)$ 确定的轨线不会使 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)AHVH^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)$ 恒为0，由(6)式知 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)[\phi W_N \phi^{\mathrm{T}} - W_N]\boldsymbol{x}(k)$ 也不恒为零. 根据李亚普诺夫渐近稳定定理知 ϕ^{T} 渐近稳定，A_C 相似于 ϕ，所以 A_C 也渐近稳定. 证毕.

运用以上定理设计二次型调节器时，不必求解 Ricatti 方程，只要适当选择加权阵，即能保证稳定性，和原 Kleinman 调节器相比，引入了变量 p，扩大了设计自由度. 另外，在分析预测控制的稳定性时，该定理具有重要意义.

2.3 在预测控制中的应用

预测控制和采用区间后退策略的二次型控制本质上是一致的，为了应用前述定理，先给出 MIMO 系统的最小状态空间实现

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\Delta \boldsymbol{u}_k, \quad \boldsymbol{y}_k = C\boldsymbol{x}_k, \tag{7a),(7b}$$

上式中 $\boldsymbol{x}_k \in R^n$；$\Delta \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_{k-1} \in R^m$ 是控制增量；$\boldsymbol{y}_k \in R^p$；A,B,C 分别是适当维矩阵. 因稳定性与外部信号无关，不妨令系统设定值为0，预测控制的代价函数取为

$$J_{pc} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \mathrm{R} \Delta \boldsymbol{u}, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{y}_{k+N_1}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{y}_{k+N_2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\Delta\boldsymbol{u}=[\Delta\boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}},\cdots,\Delta\boldsymbol{u}_{k+Nu-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$Q \geqslant 0$，$R=rI_{m\times Nu}>0$ 分别是输出偏差加权阵和控制加权阵，$[N_1, N_2]$ 是预测区间，Nu 是优化长度.

对于系统(7)，(8)唯一确定了预测控制律[4]

$$\Delta \boldsymbol{u}_k = -[I_m, 0, \cdots, 0](G^{\mathrm{T}}QG+R)^{-1}G^{\mathrm{T}}QO_C A^{N_1}\boldsymbol{x}_k, \tag{9}$$

其中

$$G=\begin{bmatrix} G_{N_1} & \cdots & G_{N_1-Nu+1} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{N_2} & \cdots & G_{N_2-Nu+1} \end{bmatrix}, \quad G_i=\begin{cases} CA^{i-1}B, & i>0, \\ 0, & 其它, \end{cases} \quad O_C=\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{N_2-N_1} \end{bmatrix}.$$

推论. 当被控对象没有不稳定的模态对消，A 非奇异，取 $N_1=Nu \geqslant n$，$N_2-N_1 \geqslant n-1$，r 为任意正实数，$Q=p(O_C^{\mathrm{T}})^+ W_{Nu}^{-1} O_C^+$（注. X^+ 表示 X 的伪逆），$p \in (0,\infty)$，如果

$$\frac{2\gamma-1}{\gamma^2} > \| H^{\mathrm{T}} W_{N_u}^{-1} H \|_2, \tag{10}$$

其中 $\gamma=\frac{p}{p+1}$，　$W_{Nu}=r^{-1}O_BO_B^{\mathrm{T}}$，　$O_B=[A^{Nu-1}B,\cdots,B]$，　$H=A^{Nu-1}B/\sqrt{r}$，则(9)式的预测控制律使闭环系统渐近稳定.

证明. 1)被控对象没有不稳定的模态对消，意味着只要有不稳模态必包含在最小实现中，所以使最小实现稳定，整个系统即稳定. 2)当 $N_1=Nu$ 时，$\Delta \boldsymbol{u}_{k+i}=0(i\geqslant N_1)$，利用系统方程(7)得到

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}C\\ \vdots\\ CA^{N_2-N_1}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{k+N_1}=O_c\boldsymbol{x}_{k+N_1}=O_c\boldsymbol{x}_{k+N_u}. \tag{11}$$

将(11)式代入(8)式，有 $J_{pc}=\boldsymbol{x}_{k+Nu}^{\mathrm{T}}O_C^{\mathrm{T}}QO_C\boldsymbol{x}_{k+Nu}+\sum_{i=0}^{Nu-1}r\Delta\boldsymbol{u}_{k+i}^2$. 因 $N_1=N_u\geqslant n$，由前文的定理知，只要取

$$O_C^{\mathrm{T}}QO_C=pW_{N_u}^{-1} \tag{12}$$

且 $\gamma=\frac{p}{p+1}$满足(10)式，即可保证系统闭环稳定. 因 $N_2-N_1\geqslant n-1$，所以 O_C 列满秩，(12)式中的 Q 必有解. 当 $Q=p(O_C^{\mathrm{T}})^{+}W_{Nu}^{-1}O_C^{+}$ 时，(12)式恒成立. 从而在推论的条件下，预测控制律(9)使闭环系统渐近稳定.　　证毕.

3　结论

文中通过改变线性二次型问题的终态约束，推导出终态松弛的 Kleinman 调节器，且给出了保证系统闭环稳定的充分条件. 和原调节器相比，文中的结果为调节器设计提供了更大的自由度；特别地，将结论应用到预测控制的稳定性分析中，得到了加权阵、系统参数矩阵和预测区间、优化长度之间的定量关系，从而克服了现有定性准则不能量化的缺点.

参 考 文 献

1　Kleinman D L. Stabilizing a discrete, constant, linear system with application to iterative methods for solving the Ricatti equation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1974, **19**:252－254

2　Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 1989, **25**(6):859－875

3　李嗣福. 参数化模型预测空间实现及递推预测算法. 控制理论与应用，1993，**10**(6)：650－656

陈忠保　1970年生，1992年毕业于国防科技大学自动控制系，1997年在中国科技大学获工学博士学位，并留校任教. 研究方向为预测控制，自适应控制和计算机工业应用.

李嗣福　1939年生，1964年毕业于哈尔滨工业大学无线电系，现为中国科技大学自动化系教授. 主要学术方向是多变量控制、预测控制和计算机控制工程.