第21卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 5
1995年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1995

隐式自校正广义预测控制器及其全局收敛性

舒迪前 石中锁
（北京科技大学自动化信息工程学院 100083）

摘 要

通过引入等价性能指标，给出了一种基于 CARIMA 模型、考虑模型误差的隐式自校正广义预测控制器. 并通过构造两个辨识器，使控制器的全部参数能递推估计. 文末给出了当采用改进型最小二乘法和随机逼近法估计参数时的自校正广义预测控制隐式算法的全局收敛性证明.

关键词： 自校正控制，预测控制，隐式算法，全局收敛性.

1 引言

自适应控制算法的全局收敛性是控制理论一个重要问题，虽已取得了不少可喜进展，但有关自校正预测控制算法的全局收敛性，仍未见到满意的研究成果. 文[1]证明了递推综合广义预测控制器的随机收敛性，但它所定义的广义输出 $y_s(t+N)=f_1(z^{-1})\phi(t+N)+\lambda f_2(z^{-1})\phi'(t+N)$ 及 $y_s^*(t+N)=f_1(z^{-1})y^*(t+N)$，因 $f_1(z^{-1})$、$f_2(z^{-1})$ 未知，故它们都是未知的，因此文[1]中的多步递推参数估计公式(5.1)—(5.4)无法实现. 本文通过构造两个辨识器给出一种能递推估计参数的隐式自校正算法及其全局收敛性证明.

2 最优控制律

2.1 多步输出方程

CARIMA 模型如下：

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k-1)+C(z^{-1})\xi(k)/\Delta, \tag{1}$$

或

$$\bar{A}(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})\Delta u(k-1)+C(z^{-1})\xi(k), \tag{2}$$

式中

$$A(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n_a}a_iz^{-i},\ B(z^{-1})=\sum_{i=0}^{n_b}b_iz^{-i},\ C(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{n_c}C_iz^{-i},$$

本文于1993年5月17日收到

$$\bar{A}(z^{-1}) = A(z^{-1})\Delta.$$

引入 Diophantine 方程

$$C(z^{-1}) = \bar{A}(z^{-1})E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}), \tag{3}$$

$$\frac{G_j(z^{-1})}{C(z^{-1})} = \bar{G}_j(z^{-1}) + z^{-j}\frac{\bar{F}_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}, \tag{4}$$

式中 $G_j = BE_j$, $\deg E_j = j-1$, $\deg F_j = n_a$, $\deg G_j = n_b + j - 1$, $\deg \bar{G}_j = j-1$, $\deg \bar{F}_j = n_c - 1$. 由 (2—4) 式可得系统的 j 步输出方程

$$y(k+j) = \frac{F_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}y(k) + \bar{G}_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + \frac{\bar{F}_j(z^{-1})}{C(z^{-1})}\Delta u(k-1) + E_j(z^{-1})\xi(k+j). \tag{5}$$

上述多步输出是根据系统真实模型参数推出,但系统真实参数未知,只能用估计模型参数代替. 用估计模型计算出的多步输出为

$$\hat{y}(k+j) = \frac{\hat{F}_j(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})}y(k) + \hat{\bar{G}}_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + \frac{\bar{F}(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})}\Delta u(k-1) + \hat{E}_j(z^{-1})\xi(k+j). \tag{6}$$

真实模型与估计模型有模型输出误差,可用 k 时刻模型输出误差 $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ 乘修正系数 h 修正,即

$$y(k+j) = \frac{\hat{F}_j(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})}y(k) + \hat{\bar{G}}_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + \frac{\hat{\bar{F}}_j(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})}\Delta u(k-1) + \hat{E}_j(z^{-1})\xi(k+j) + \left[h_j - \frac{\hat{F}_j(z^{-1})}{\hat{C}(z^{-1})}\right]e(k). \tag{7}$$

2.2 最优控制律

取预测时域长度为 P, 控制时域长度为 M, 设 $\Delta u(k+j-1) = 0$(当 $j > M$), 则 (7)式写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}(k+1) = G\Delta\boldsymbol{U}(k) + \boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1) + \boldsymbol{F}_2 y(k) + (\boldsymbol{H} - \boldsymbol{F}_2)e(k) + \boldsymbol{E}, \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}(k+1) = [y(k+1), y(k+2), \cdots, y(k+P)]^{\mathrm{T}},$$
$$\Delta\boldsymbol{U}(k) = [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \cdots, \Delta u(k+M-1)]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{E} = [\hat{E}_1\xi(k+1), \hat{E}_2\xi(k+2)\cdots\hat{E}_P\xi(k+P)]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{F}_1 = \left[\frac{\hat{\bar{F}}_1}{\hat{C}}, \frac{\hat{\bar{F}}_2}{\hat{C}}, \cdots, \frac{\hat{\bar{F}}_P}{\hat{C}}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{F}_2 = \left[\frac{\hat{F}_1}{\hat{C}}, \frac{\hat{F}_2}{\hat{C}}, \cdots, \frac{\hat{F}_P}{\hat{C}}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{H} = [h_1, h_2, \cdots, h_P]^{\mathrm{T}},$$

$$G = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 & & & \\ \hat{\bar{g}}_{21} & \hat{b}_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \hat{\bar{g}}_{P,P-1} & \hat{\bar{g}}_{P,P-2} & \cdots & \hat{\bar{g}}_{P,P-M} \end{bmatrix}_{P\times M}$$

引入二次型性能指标

$$J=E\left\{\sum_{j=1}^{P}[y(k+j)-y_r(k+j)]^2+\sum_{j=1}^{M}\lambda[\Delta u(k+j-1)]^2\right\}, \tag{9}$$

式中 $y_r(k+j)$ 为参考轨线.

将 (9) 式写成向量形式

$$J=E\{[\boldsymbol{Y}(k+1)-\boldsymbol{Y}_r(k+1)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}(k+1)-\boldsymbol{Y}_r(k+1)] + \lambda\Delta\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(k)\Delta\boldsymbol{U}(k)\}, \tag{10a}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_r(k+1)=[y_r(k+1),y_r(k+2),\cdots,y_r(k+P)]^{\mathrm{T}}.$$

将(8)式代入 (10a) 式,令 $\dfrac{\partial J}{\partial\Delta\boldsymbol{U}(k)}=0$，整理化简可得

$$\Delta\boldsymbol{U}(k)=(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}_r(k+1)-\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1) -\boldsymbol{F}_2y(k)-(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k)]. \tag{11}$$

若采取只执行当前时刻一步, $k+1$ 及其以后时刻控制量重新计算的闭环控制策略,则有

$$\Delta u(k)=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}_r(k+1)-\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)-\boldsymbol{F}_2y(k)-(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k)], \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}=(1,0,\cdots,0)(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}}=(d_{11},d_{12},\cdots,d_{1P})$.

3 隐式自校正广义预测控制算法

3.1 等价性能指标

定义广义输出 $\boldsymbol{\phi}(k+1)$ 和广义输出预报 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+1)$

$$\boldsymbol{\phi}(k+1)=\boldsymbol{Y}(k+1)+G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k),\ (\mathrm{rank}G=M), \tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+1)=\boldsymbol{Y}_P(k+1)+G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k)=\boldsymbol{\phi}(k+1)-\boldsymbol{E}, \tag{14}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_P(k+1)=G\Delta\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)+\boldsymbol{F}_2y(k)+(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k), \tag{14a}$$

则性能指标 (10a) 式与下列性能指标 J_P 等价:

$$J_P=E[\boldsymbol{Y}(k+1)+G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k)-\boldsymbol{Y}_r(k+1)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}(k+1) +G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k)-\boldsymbol{Y}_r(k+1)]. \tag{10b}$$

将(8)式代入 (10b) 式,并求导有

$$[G+G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda]\Delta\boldsymbol{U}(k)=\boldsymbol{Y}_r(k+1)-\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)-\boldsymbol{F}_2y(k) -(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k), \tag{14b}$$

两边同乘以 $(1,0,\cdots,0)(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}}$ 得

$$\Delta u(k)=\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{Y}_r(k+1)-\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)-\boldsymbol{F}_2y(k)-(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k)]. \tag{14c}$$

(14c) 与 (12) 式相同,故两种指标等价.

3.2 参数辨识方程和辨识算法

对(14)式两边乘以 $C(z^{-1})=1+C^*(z^{-1})$，且令 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(k+1)\triangleq\boldsymbol{Y}_r(k+1)$，有

$$\boldsymbol{\phi}(k+1)=C(z^{-1})\{[G+G(G^{\mathrm{T}}G)^{-1}\lambda]\Delta\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)+\boldsymbol{F}_2y(k) +(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{F}_2)e(k)\}-C^*(z^{-1})\boldsymbol{Y}_r(k+1)+\boldsymbol{E}, \tag{15a}$$

上式两边乘以 $(1,0,0,\cdots,0)(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}}$，引入下列记号

$$A = (a_{ij})_{M\times P} = (G^{\mathrm{T}}G + \lambda I)^{-1}G^{\mathrm{T}}, \quad B = (b_{ij})_{M\times M} = (G^{\mathrm{T}}G + \lambda I)^{-1},$$

$$f_1(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{P} a_{1K} z^{-(P-K)}/a_{1P}, \quad f_2(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{M} b_{1K} z^{-(M-k)}/a_{1P},$$

$$\alpha'(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{P} a_{1K}\hat{\bar{F}}_K/a_{1P}, \quad \alpha(z^{-1}) = \frac{C(z^{-1})}{a_{1P}} + z^{-1}\alpha'(z^{-1}),$$

$$\beta(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{P} a_{1K}\hat{F}_K/a_{1P}, \quad \gamma(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{P} a_{1K}[C(z^{-1})h_K - \hat{F}_K]/a_{1P},$$

$$V(k+P) = \sum_{j=1}^{P} a_{1j}E_j\xi(k+j)/a_{1P}, \quad 且\ a_{1P} = d_{1P} \neq 0,$$

$\deg \alpha' = n_c - 1$, $\deg \alpha = n_\alpha = n_c$, $\deg\beta = n_\beta = n_a$, $\deg \gamma = n_\gamma = \max(n_a, n_c)$.

并定义

$$\phi(k+P) = f_1(z^{-1})y(k+P) + \lambda f_2(z^{-1})\Delta u(k+M-1), \tag{15b}$$

$$y_r^*(k+P) = f_1(z^{-1})y_r(k+P), \tag{15c}$$

则(15a)式可简写成

$$\phi(k+P) = \alpha(z^{-1})\Delta u(k) + \beta(z^{-1})y(k) + \gamma(z^{-1})e(k) - C^*(z^{-1})y_r^*(k+P) + V(k+p), \tag{15d}$$

$$\phi(k+P) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta} + V(k+P), \tag{16}$$

式中

$$\boldsymbol{\theta} = [\alpha_0,\cdots,\alpha_{n_\alpha},\beta_0,\cdots,\beta_{n\beta},\gamma_0,\cdots,\gamma_{n\gamma},C_1,\cdots,C_{nc}]^{\mathrm{T}}, \tag{17a}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k) = [\Delta u(k),\cdots,\Delta u(k-n_\alpha),y(k),\cdots,y(k-n_\beta),e(k),\cdots,e(k-n_\gamma), -y^*(k+P-1),\cdots,-y_r^*(k+P-n_c)]^{\mathrm{T}}. \tag{17b}$$

再考虑控制律(12)式,取首行,同除以 α_{1P}, 再同乘 $C(z^{-1})$ 整理得

$$y_r^*(k+P) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\theta}. \tag{18}$$

当 $\phi(k+P)$ 和 $y_r^*(k+P)$ 已知时,将(16),(18)式中的 $\boldsymbol{\theta}$ 改为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, 退后 P 步, 采用改进型最小二乘法估计参数, 便构成自适应系统. 为此必须修改数据向量 $\boldsymbol{\varphi}(k)$, 用 $y_r^*(k)$ 的验后预报 $\bar{y}(k)$ 取代 $y_r^*(k)$, 即

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k) = [\Delta u(k),\cdots,\Delta u(k-n_\alpha), y(k),\cdots,y(k-n_\beta),e(k),\cdots,e(k-n_\gamma), -\bar{y}(k+P-1),\cdots,-\bar{y}(k+P-n_c)]^{\mathrm{T}}, \tag{19a}$$

式中

$$\bar{y}(k) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k). \tag{19b}$$

改进型最小二乘辨识算法如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-P) + a(k-P)\bar{P}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)[\phi(k) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-P)], \tag{20}$$

$$\bar{P}(k-P) = \bar{P}(k-2P) - \frac{\bar{P}(k-2P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-2P)}{1+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-2P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)}, \tag{21}$$

$$a(k-P) = 1, \tag{22}$$

其中 $\bar{P}(-2P) = \bar{P}(-2P+1) = \cdots = \bar{P}(-P) = \delta I$, ($\delta$ 为正数).

若不能满足以下条件：

A) $r(k-P)\mathrm{tr}\,\bar{P}(k-P)\leqslant K_1<\infty$, (23)

式中

$$r(k-P)=r(k-P-1)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P), \tag{24a}$$

$$r(-P-1)=r(-P)=\cdots=r(-1)=n_\alpha+n_\beta+n_\gamma n_c+1, \tag{24b}$$

B) $\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-2P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)\leqslant K_2<\infty$,

则有

$$\bar{P}(k-P)=\frac{r(k-2P)}{r(k-P)}\bar{P}(k-2P), \tag{25}$$

$$a(k-P)=\frac{1}{1+\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)}, \tag{26}$$

式中

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)=[\Delta u(k-P),\cdots,\Delta u(k-P-n_\alpha),y(k-P),\cdots,$$
$$y(k-P-n_\beta)e(k-P),\cdots,e(k-P-n_r),-\bar{y}(k-1),\cdots,-\bar{y}(k-n_c)]^{\mathrm{T}}.$$

控制律由下式计算：

$$y_r^*(k+P)=\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\theta}}(k). \tag{27}$$

由于组成 $\phi(\cdot)$，$y_r^*(\cdot)$ 的参数未知，因而不能求出 $\phi(\cdot)$，$y_r^*(\cdot)$，为求取 $\phi(\cdot)$、$y_r^*(\cdot)$，需引入第二个辨识器。

前面求控制律时，多步输出是基于估计模型推出的，完全类似的可推出基于真实模型的多步输出。为简单计仍采用前面的符号，只是其中的参数已为真实参数，即

$$\boldsymbol{Y}(k+1)=G\Delta\boldsymbol{U}(k)+\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)+\boldsymbol{F}_2y(k)+\boldsymbol{E}. \tag{28}$$

(28)式乘 G^{T}，两边加 $\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k)$ 后整理得

$$\Delta\boldsymbol{U}(k)=(G^{\mathrm{T}}G+\lambda I)^{-1}[G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}(k+1)+\lambda\Delta\boldsymbol{U}(k)-G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_1\Delta u(k-1)$$
$$-G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_2y(k)-G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}], \tag{28a}$$

取首行并考虑前面引入的记号、定义，有

$$f_1(z^{-1})y(k+P)+\lambda f_2(z^{-1})\Delta u(k+M-1)$$
$$=\frac{\Delta u(k)}{a_{1P}}+\bar{\alpha}(z^{-1})\Delta u(k-1)+\bar{\beta}(z^{-1})y(k)+\tilde{C}(z^{-1})\xi(k+P). \tag{29}$$

注意到 $f_1(z^{-1})$ 为首一多项式，故有

$$y(k+P)=-[f_1(z^{-1})-1]y(k+P)-\lambda f_2(z^{-1})\Delta u(k+M-1)$$
$$+\frac{\Delta u(k)}{a_{1P}}+\bar{\alpha}(z^{-1})\Delta u(k-1)+\bar{\beta}(z^{-1})y(k)+[\tilde{C}(z^{-1})-1]\xi(k+P)$$
$$+\xi(k+P),$$
$$y(k+P)=\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}(k+P-1)\boldsymbol{\theta}_n+\xi(k+P), \tag{30}$$

这里

$$\bar{\alpha}(z^{-1})=\frac{1}{C(z^{-1})}\alpha'(z^{-1}),\quad \bar{\beta}(z^{-1})=\frac{\beta(z^{-1})}{C(z^{-1})},\quad \tilde{C}(z^{-1})\xi(k+P)=V(k+P),$$

$$\widetilde{C}(z^{-1})=1+\sum_{i=1}^{P-1}\widetilde{C}_i z^{-i},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_n(k+P-1)=[&-y(k+1),\cdots,-y(k+P-1),-\lambda\Delta u(k),\cdots,\\&-\lambda\Delta u(k+M-1),\Delta u(k-1),\cdots,\Delta u(k-n_{\bar{a}}+1),y(k),\cdots,\\&y(k-n_{\bar{\beta}}),\xi(k+P-1),\cdots,\xi(k+P-n_{\tilde{c}})]^{\mathrm{T}},\end{aligned}\tag{31a}$$

$$\boldsymbol{\theta}_n=\left[\frac{a_{11}}{a_{1P}},\cdots,\frac{a_{1P}-1}{a_{1P}},\frac{b_{11}-1}{a_{1P}},\cdots,\frac{b_{1M}}{a_{1P}},\bar{\alpha}_0,\cdots,\bar{\alpha}_{n\bar{a}},\bar{\beta}_0,\cdots,\bar{\beta}_{n\bar{\beta}},\widetilde{C}_1,\cdots,\widetilde{C}_{n\tilde{c}}\right]^{\mathrm{T}}.\tag{31b}$$

对(30)式退后 P 步,用随机逼近法估计参数

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k-1)+\frac{\bar{a}}{r_n(k)}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n(k-1)\hat{\xi}(k),\tag{32}$$

$$r_n(k)=r_n(k-1)+\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n^{\mathrm{T}}(k)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n(k),\quad(r_n(0)=1),\tag{33}$$

$$\hat{\xi}(k)=y(k)-\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k-1),\tag{34}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_n(k-1)=[&-y(k-P+1),\cdots,-y(k-1),-\lambda\Delta u(k-P),\cdots,\\&-\lambda\Delta u(k-P+M-1),\Delta u(k-P-1),\cdots,\Delta u(k-P-n_{\bar{a}}+1),\\&y(k-P),\cdots,y(k-P-n_{\bar{\beta}}),\hat{\xi}(k-1),\cdots,\hat{\xi}(k-n_{\tilde{c}})]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}\tag{35}$$

3.3 隐式自校正算法步骤

1) 置初值,并由(32)—(35)式估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)$;

2) 计算 $\phi(\cdot)$,并由(20)—(26)式估计控制器参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$;

3) 由(27)式计算控制律后返回.

4 全局收敛性分析

假设. $A1)$ $A(z^{-1})$、$B(z^{-1})$、$C(z^{-1})$ 的阶次 n_a、n_b、n_c 的上界已知,且 $C(z^{-1})$ 为稳定多项式; $A2)$ $\frac{1}{C(z^{-1})}-\frac{1}{2}$ 严格正实; $A3)$ $\widetilde{C}(z^{-1})-\frac{\bar{a}}{2}$ 严格正实; $A4)$ 噪声项 $\xi(k)$ 满足 $E\{\xi(k)/F_{k-1}\}=0$, a.s.

$$E\{\xi^2(k)/F_{k-1}\}=\sigma^2,\ \text{a.s.}\quad \sup\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\xi^2(k)<\infty,\ \text{a.s.}$$

$\{\xi(k)\}$ 为定义在概率空间 $\{\Omega,F,P\}$ 中的随机过程,它可转化为递增 σ 代数 $\{F_k,k\in N\}$ 序列, F_k 由零到 k 时刻为止的观测值所产生.

引理 1[2]. 辨识算法(20)—(26)具有下列性质:

1) $r(k-P)\operatorname{tr}\bar{P}(k-P)\leqslant K_1<\infty$; 2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{O(k)}{r(k-P)}\leqslant K_3<\infty$;

3) $1-O(k)\geqslant\frac{1}{K_4}>0$; 4) $e'(k)=\frac{\eta(k)}{1-O(k)}$;

式中 $e'(k)=\phi(k)-y_r^*(k)$, $\eta(k)=\phi(k)-\bar{y}(k)$, $O(k)=a(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)$.

引理 2[2]. 假设 $A_1)$, $A_2)$ 成立,则自校正算法(20)—(26)有下列性质:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N}{r(N)}\right)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z^2(k)=0,\quad \text{a. s} \tag{36}$$

式中

$$z(k)=\phi(k+P)-\bar{y}(k+P)-V(k+P), \tag{36a}$$

$$C(z^{-1})z(k-P)=-\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{36b}$$

引理 3[3]**.** 若满足假设 $A_1), A_3)$，则估计算法 (32)—(35) 以 $WP1$ 有下面的结论:

$P1)$ $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)\|<M<\infty, \forall k$;

$P2)$ $\lim\limits_{K\to\infty}\|\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k)-\hat{\boldsymbol{\theta}}_n(k-d)\|=0$, d 为任意给定正整数;

$P3)$ $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N} z_n^2(k)/r_n(k)<\infty$;

式中 $z_n(k-1)=\hat{\xi}(k)-\xi(k)$.

定理 1. 假设 $A_1)$—$A_4)$ 成立,且 $H(z^{-1})=f_1(z^{-1})B(z^{-1})+z^{-(P-M)}\lambda f_2(z^{-1})\Delta A(z^{-1})$ 的根在 z 平面单位圆内,则自适应算法以 $WP1$ 有下面结论:

1) $\sup\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} y^2(k)<\infty$;　　2) $\sup\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\Delta u^2(k)<\infty$;

3) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} E\{[\phi(k)-y_r^*(k)]^2/F_{k-P}\}=\gamma^2$;

4) $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} E\left\{\left[y(k)-\frac{f_1(z^{-1})B(z^{-1})y_r(k)}{H(z^{-1})}\right]^2\Big/F_{k-P}\right\}\leqslant\gamma_0^2$.　$(\gamma_0>0)$

证明. 由 $e'(k)$ 的定义

$$\begin{aligned}e'(k+P)&=\phi(k+P)-y_r^*(k+P)=f_1(z^{-1})y(k+P)\\&\quad+\lambda f_2(z^{-1})\Delta u(k+M-1)-f_1(z^{-1})y_r(k+P),\end{aligned} \tag{37}$$

(37)式乘 $\Delta A(z^{-1})$，利用 (2) 式有

$$\begin{aligned}&[f_1(z^{-1})B(z^{-1})+z^{-(P-M)}\Delta A(z^{-1})\lambda f_2(z^{-1})]\Delta u(k+P-1)=\Delta A(z^{-1})e'(k+P)\\&\quad+\Delta A(z^{-1})f_1(z^{-1})y_r(k+P)-f_1(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k+P).\end{aligned} \tag{38}$$

由 $H(z^{-1})$ 的稳定性、引理 3、$y_r(k)$ 的有界性、假设 $A_4)$ 及文[2]中附录的引理 $A.1$，有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Delta^2 u(k)\leqslant\frac{C_1}{N}\sum_{k=1}^{N} e'^2(k)+C_2.\quad \text{a.s.} \tag{39}$$

同理,(37)式乘 $B(z^{-1})$，利用(2)式可得

$$\begin{aligned}&[f_1(z^{-1})B(z^{-1})+z^{-(P-M)}\Delta A(z^{-1})\lambda f_2(z^{-1})]y(k+P)=B(z^{-1})e'(k+P)\\&\quad+f_1(z^{-1})B(z^{-1})y_r(k+P)+z^{-(P-M)}\lambda f_2(z^{-1})C(z^{-1})\xi(k+P).\end{aligned} \tag{39a}$$

由上式同样有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y^2(k)\leqslant\frac{C_3}{N}\sum_{k=1}^{N} e'^2(k)+C_4.\quad \text{a.s.} \tag{40}$$

由

$$\begin{aligned}e'^2(k)&=\left[\frac{z(k-P)+V(k)}{1-a(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(k-P)\bar{P}(k-P)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(k-P)}\right]^2\\&\leqslant 2K_4^2[z^2(k-P)+V^2(k)],\end{aligned}$$

得
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e'^2(k) \leqslant \frac{K_5}{N}\sum_{k=1}^{N} z^2(k-P)+K_6. \tag{41}$$
由(39),(40),(41)式有
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \Delta u^2(k) \leqslant \frac{L_1}{N}\sum_{k=1}^{N} z^2(k)+L_2, \tag{42a}$$
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y^2(k) \leqslant \frac{L_3}{N}\sum_{k=1}^{N} z^2(k)+L_4. \tag{42b}$$
由 $\boldsymbol{\varphi}_n(k)$、$r_n(k)$ 的定义知,存在正整数 N_1 使得 $k>N_1$ 时,有
$$\frac{r_n(N)}{N} \leqslant \frac{C_5}{N}\sum_{k=1}^{N} z_n^2(k)+C_6 \leqslant \frac{C_5}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]+C_6. \tag{43}$$
由 $\boldsymbol{\varphi}(k)$、$r(k)$ 的定义知,存在正整数 N_2 使得 $k>N_2$ 时,有
$$\frac{r(N)}{N} \leqslant \frac{C_7}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]+C_8. \tag{44}$$
由(43),(44)式知,存在 $\bar{K}_1,\bar{K}_2,N_0$, 使得 $k>N_0$ 时,有
$$\frac{r_n(N)}{N} \leqslant \frac{\bar{K}_1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]+\bar{K}_2, \tag{45a}$$
$$\frac{r(N)}{N} \leqslant \frac{\bar{K}_1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]+\bar{K}_2, \tag{45b}$$
其中 $\bar{K}_1=\max\{C_5,C_7\}$, $\bar{K}_2=\max\{C_6,C_8\}$, $N_0=\max\{N_1, N_2\}$. 由引理 3 的 $P3$) 及 Kronecker 引理有
$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{N}{r_n(N)}\right]\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_n^2(k)=0. \quad \text{a.s.} \tag{46}$$
由 (45a),(45b),(46) 式及引理 2 得
$$\lim_{N\to\infty}\frac{\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]}{\dfrac{\bar{K}_1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]^2+\bar{K}_2}=0, \quad \text{a.s.}$$
故有
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[z^2(k)+z_n^2(k)]=0, \ \text{a.s.} \tag{47}$$
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z^2(k)=0, \quad \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} z_n^2(k)=0. \quad \text{a.s.} \tag{48}$$
又由 (45a),(45b) 及(47)式有
$$\lim_{N\to\infty}\sup\frac{r(N)}{N}<\infty, \ \lim_{N\to\infty}\sup\frac{r_n(N)}{N}<\infty, \ \text{a.s}, \tag{49}$$
故定理 1 的 1),2) 成立.

由引理 1 的 3),4) 及 (36a) 式有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=P}^{N}[e'(k)-V(k)]^2 \leqslant \frac{2K_4}{N}\sum_{k=P}^{N}[z^2(k-P)+O^2(k)V^2(k)], \tag{50}$$

因 $O(k)\leqslant 1$，故有

$$\sum_{k=P}^{N}\frac{O^2(k)V^2(k)}{r(k-P)}<\infty, \text{ a.s.} \tag{51}$$

应用单调收敛定理、Kronecker 引理、(48)式及(51)式有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=P}^{N}[e'(k)-V(k)]^2=0. \text{ a.s.} \tag{52}$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E[e'^2(k)/F_{k-P}]=E[V^2(k)/F_{k-P}]=\gamma^2.$$

定理 1 的 3) 得证.

由 (39a) 及 $H(z^{-1})$ 稳定,故存在 C_9 使得

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[y(k+P)-\frac{f_1(z^{-1})B(z^{-1})}{H(z^{-1})}y_r(k+P)\right]^2 \leqslant \frac{C_9}{N}\sum_{k=1}^{N}[\phi(k+P)-y_r^*(k+P)]^2+\sigma_0^2,$$

上式两边取数学期望,并令 $N\to\infty$ 得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}E\left\{\left[y(k+P)-\frac{f_1(z^{-1})B(z^{-1})}{H(z^{-1})}y_r(k+P)\right]^2\Big/F_k\right\} \leqslant C_9\gamma^2+\sigma_0^2=\gamma_0^2.$$

证毕.

5 仿真研究

设被控过程为一开环不稳的非最小相位系统,其模型为

$$(1-1.5z^{-1})y(k)=z^{-2}(0.6+0.7z^{-1})u(k)+(1-0.2z^{-1})\xi(k)/\Delta,$$

$\xi(k)$ 为方差 0.01 的高斯白噪声,参考给定信号为幅值为 1 的方波，取 $P=3$，$M=1$，仿真曲线见图 1.

仿真结果表明,本文提出的隐式自校正算法是可行的.

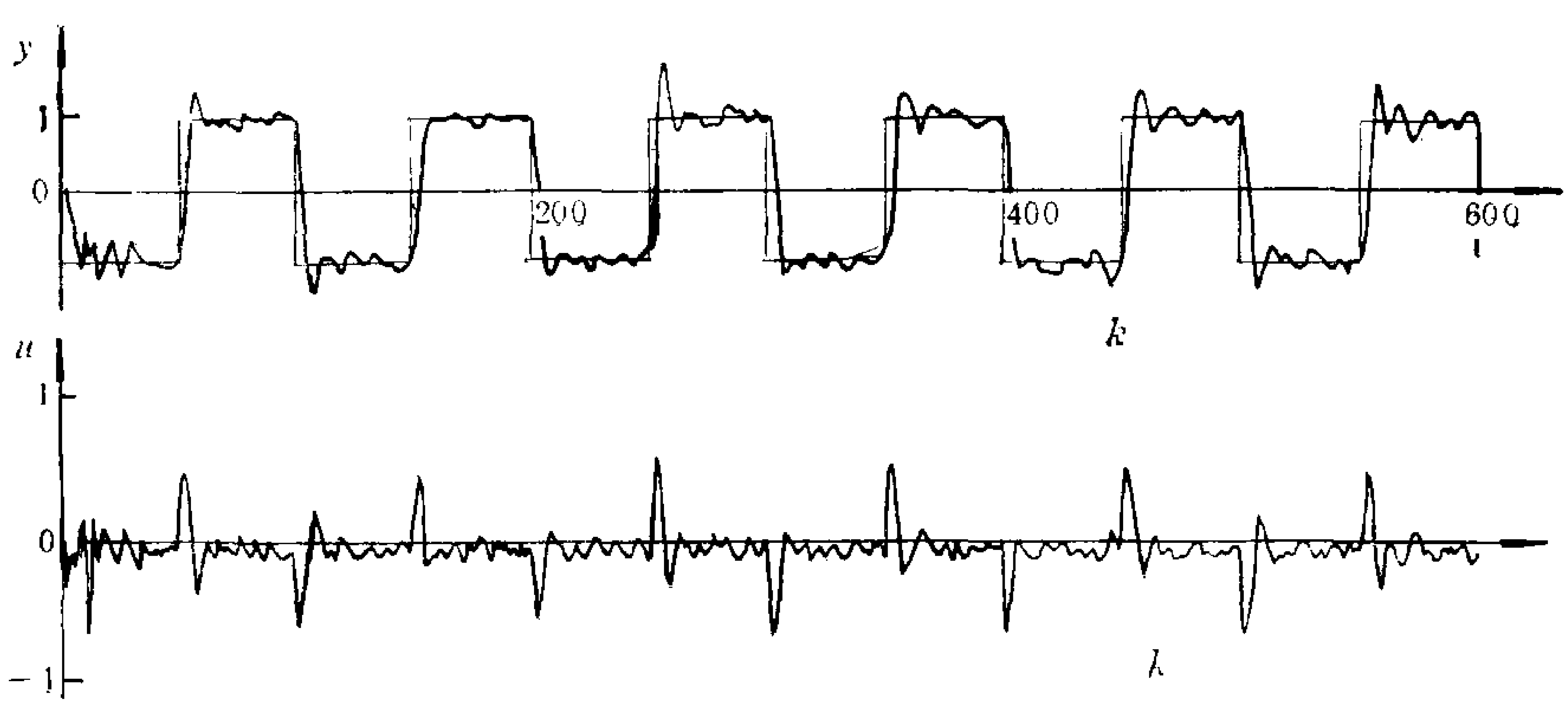


图 1　系统输入输出仿真曲线

参 考 文 献

[1] 袁著祉，陈增强. 综合广义预测自校正控制器的稳定及随机收敛性. 中国科学A辑，1989，**11**：1197—1207.
[2] 舒迪前主编. 自适应控制. 沈阳：东北大学出版社，1993.
[3] Hersh M A, Zerrop M B. Stochastic adaptive control of nonminimum phase systems. *Optirmal Control Application and Method*. 1986, **7**:153—161.

GLOBAL CONVERGENCE OF IMPLICIT SELF-TUNING GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLER

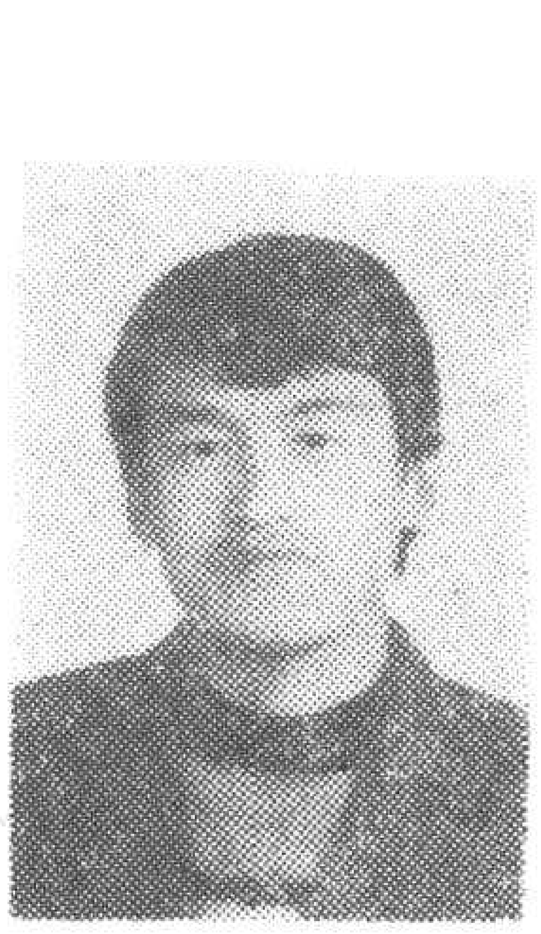
Shu Diqian Shi Zhongsuo
(*Dept. of Automation, Beijing Univ. of Sci. and Tech.* 100083)

Abstract

As to the convergency property of the implicit algorithm of the generalized predictive self-tuning controller, its satisfactory result has not yet been found. In this paper, by introducing an equivalent cost function and considering the parameter error of the model, an implicit self-tuning generalized predictive controller based on CARIMA model is presented. Parameters of the self-tuning controller can also be recursively estimated by introducing two identifiers. In the end, the convergent property of the proposed implicit algorithm is also given.

Key words: Self-tuning control, predicative control, implicit algorithm, global convergence.

舒迪前 照片、简介见本刊第17卷第2期.



石中锁 1964年生. 1987年毕业于东北大学数学系，1992年获北京科技大学控制理论及应用专业硕士学位. 现在北京科技大学自动化信息工程学院过程控制研究所从事过程计算机控制方面的研究工作，主要研究方向为过程建模、自适应控制及过程计算机控制等.