第四章 线性系统的稳定性

第一节、 稳定性的基本概念和定理

第二节、 线性时变系统的稳定性判据

第三节、 线性定常系统的稳定性判据

第四节、 线性系统的$BIBO$稳定性和$BIBS$稳定性

研究稳定性的意义

- 任何一个实际系统总是在各种偶然和持续的干扰下运动或工作的。显然，我们首先要考虑的问题是，当系统承受这种干扰之后，能否稳妥地保持预定的运动轨迹或者工作状态，这就是稳定性。

- 此外，描述系统的数学模型，绝大部分都是近似的，这或者是由于量测误差，或者是为使问题简化，而不得不忽略某些次要因素。近似的数学模型能否如实反映实际的运动，在某种意义上说，也是稳定性（鲁棒性）问题。

第一节 稳定性的基本概念和定义

一、稳定性的基本概念

平衡状态的稳定性

- 非线性自治系统：

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \geq t_0 \tag{4-1}$$

- 线性自治系统：

$$\dot{x} = A(t)x \tag{4-2}$$

受扰运动:

$$x(t) = x(t;\quad x_0, t_0), t \geq t_0 \tag{4-4}$$

$$x(t_0;\quad x_0, t_0) = x_0$$

平衡状态:

$$\dot{x}_c = f(x_c, t) = 0, \qquad \forall t \geq t_0 \tag{4-5}$$

李雅普诺夫意义下的稳定性

李雅普诺夫稳定性的概念是微分方程解对初值的连续依赖性这一概念在无穷时间区间上的推广和发展。因此下面讨论时均假定所研究方程的解在无穷区间$[t_0, \infty)$满足存在和唯一性条件。

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad x(t_0), \qquad t \geq t_0 \qquad (4\text{-}6)$$

$$\| x_0 - x_c \| \leq \delta(t_0, \varepsilon)$$

$$\Downarrow \ ?$$

$$\| x(t; x_0, t_0) - x_c \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

定义4-1：李雅普诺夫意义下稳定

$$\varepsilon > 0,\quad \delta(t_0, \varepsilon) > 0$$

$$\|x_0 - x_c\| \le \delta(t_0, \varepsilon) \tag{4-7}$$

满足不等式

$$\|x(t;\ x_0, t_0) - x_c\| \le \varepsilon,\quad t \ge t_0 \tag{4-8}$$

则称平衡状态x_c是**李雅普诺夫意义下稳定**的。

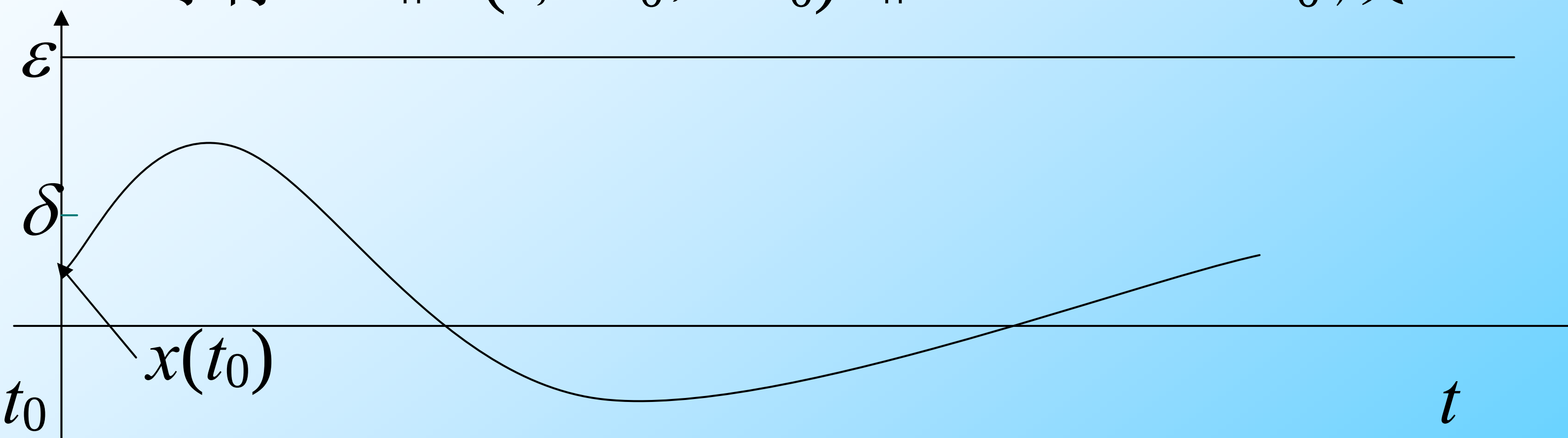
李雅普诺夫稳定性就是要研究微分方程的解在$t \in [t_0$，+∞）上的有界性。

李雅普诺夫意义下稳定的图示：

对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0，\varepsilon)>0$，使得当

$$\| x(t_0) \| < \delta(t_0，\varepsilon)$$

时有 $\| x(t;\ t_0,\ x_0) \| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0$ 成立



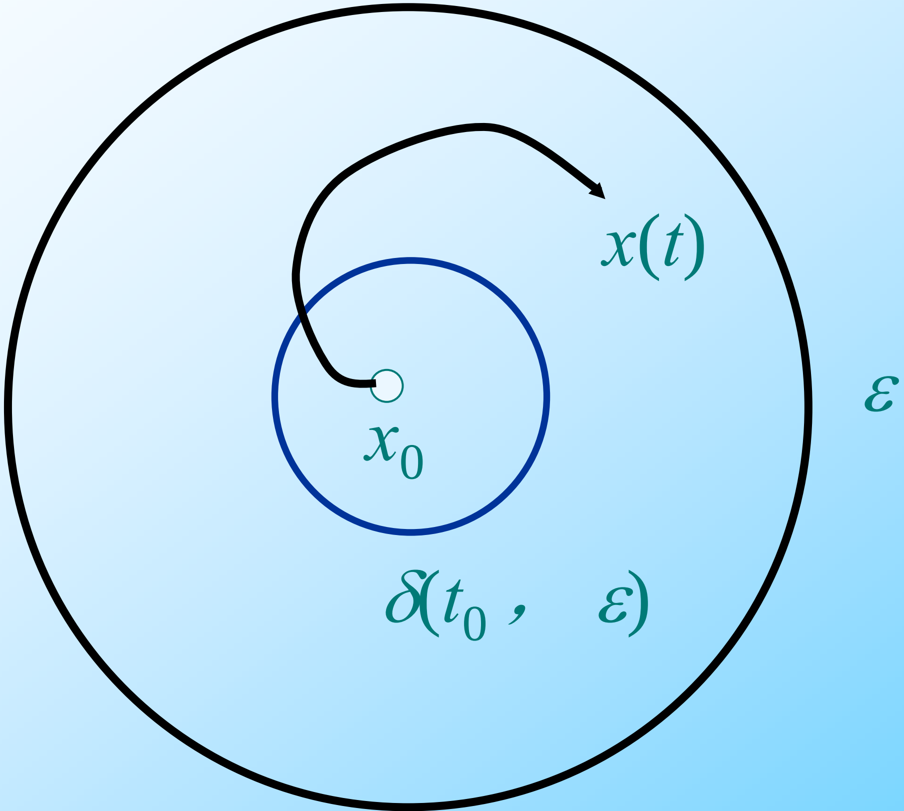
1. 此处δ随着ε、t_0而变化；

2. $\| x(t;\ t_0, x_0) \| < \varepsilon \qquad \forall t \geqslant t_0$

初值变化充分小时，解的变化($t \geqslant t_0$)可任意小(不是无变化)；

3.显然，$\delta(t_0，\varepsilon) \leq \varepsilon$ 。

李雅普诺夫意义下稳定的几何意义



对于任意的 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta(t_0，\varepsilon)>0$，使得当 $\| x(t_0) \| < \delta(t_0，\varepsilon)$时有

$$\| x(t;\ t_0,\ x_0) \| < \varepsilon \qquad \forall t \geqslant t_0$$

一致稳定：

δ的范围（大小）只取决于ε，而与初始时刻t_0无关。

对定常系统，李雅普诺夫意义下的稳定等价于一致稳定。
但对时变系统，没有这种等价关系。

定义 4-2　平衡状态x_c是渐近稳定的：

（1）x_c是稳定的。

（2）对于任意 $\mu > 0$和相应的$\delta(\mu, t_0) > 0$

存在 $T(\mu, \delta, t_0) > 0$

当$t \geq t_0 + T(\mu, \delta, t_0)$时，有

$$\left\| x(t;\ x_0, t_0) - x_c \right\| \leq \mu \qquad (4\text{-}9)$$

渐近稳定的几何意义

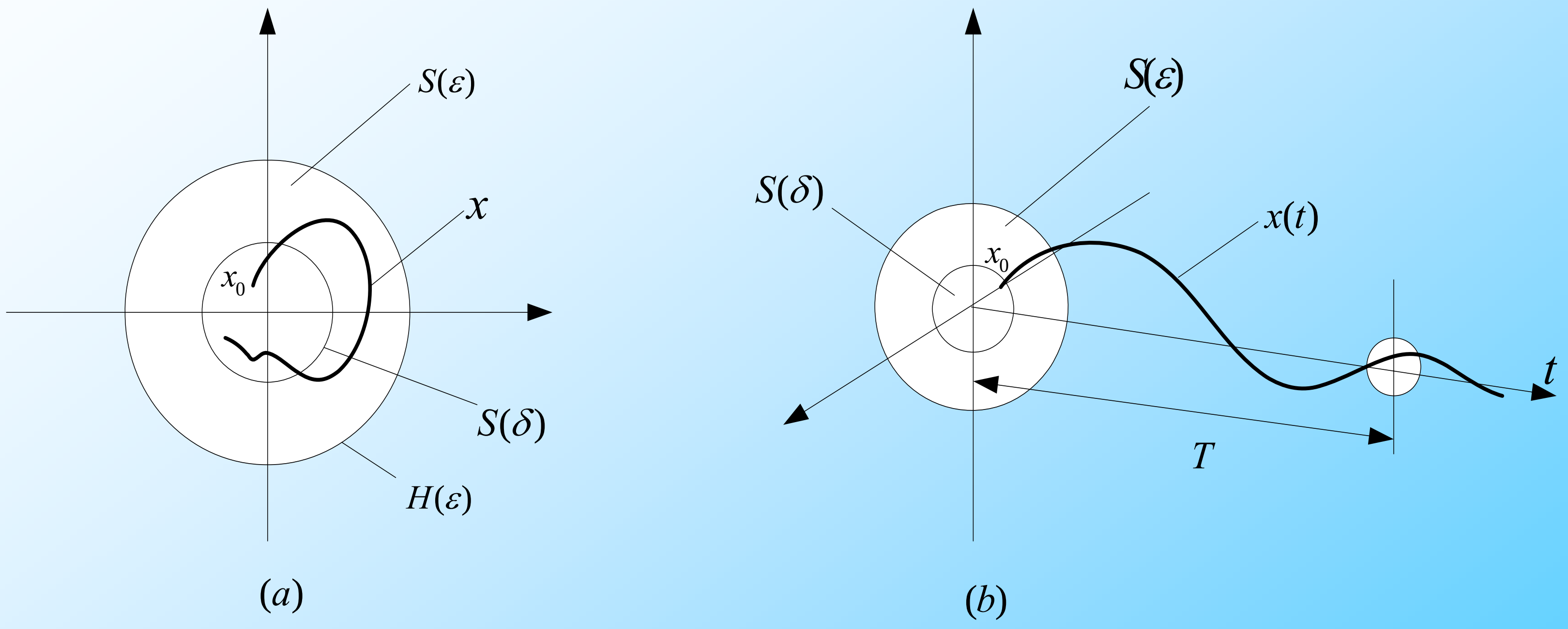
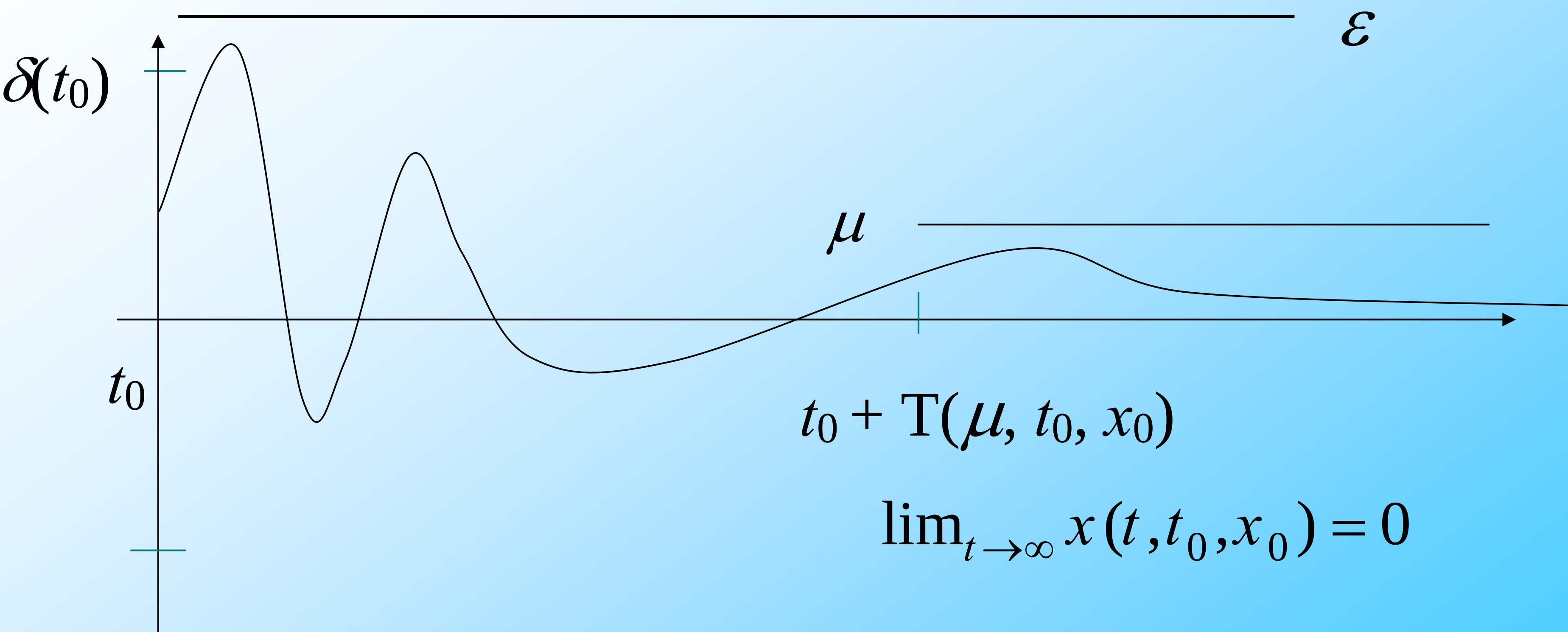


图4-2 渐近稳定的平衡状态

(a) $x=0$是稳定的, x在$t > t_0$的行为已决定

(b) 是 t 充分大时的性质。



$$\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$$

1. 此处$\delta(t_0)$是**固定的**一个范围（称为**吸引区**，不是任意小的）；

2. $\| x(t;\ t_0,\ x_0) \| < \mu$，$t > t_0 + \mathrm{T}(\mu,\ t_0,\ x_0)$

定义 4-3:　**平衡状态$\mathbf{x}_c$是指数渐近稳定**

存在$\upsilon > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$使当

$\|x_0 - x_c\| < \delta(\varepsilon)$　时，有

$$\|x(t;\ x_0, t_0) - x_c\| < \varepsilon e^{-\upsilon(t-t_0)} \tag{4-12}$$

按指数渐近稳定的两个重要方面：

- “渐近”的数量概念；
- 从工程应用的观点来看，渐近稳定比稳定更为重要。

定义4-4:　大范围渐近稳定

任何一个非零初始状态x_0，都使 $x(t; x_0, t_0)$ 有界，且

$$\lim_{t\to\infty} x(t; x_0, t_0) = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

则称$x_c=0$是**大范围渐近稳定**的。

δ 称为吸引区。

显然，大范围稳定的含义是 $\delta=\infty$。

前面所定义的稳定、一致稳定、渐近稳定、一致渐近稳定和按指数渐近稳定都是局部的概念，即定义中的条件只要在x_c附近成立即可。但在工程技术上，特别是在控制系统中，所发生的初始偏差并非任意的小，而是有限的或是任意大的。所以，全局稳定比局部稳定更有意义。

幸好，就我们所讨论的线性系统而言，全局和局部是一致的。

例： 考虑微分方程

$$\dot{x} = 5x$$

显然，$x_c = 0$是它的一个平衡状态。现若有初始扰动

$x(0)$=0. 0001，则 $x = 0.0001e^{5t}, t \ge 0$

可见，即使初始值微小地偏离了平衡状态，且在任意有限的时间内其解有界，但最终将发散。

若 $\dot{x} = -5x$

显然，$x_c = 0$是它的一个平衡状态。现若有初始扰动

$x(0)$=10000，则 $x = 10000e^{-5t}, t \ge 0$

可见，即使初始值很大地偏离了平衡状态，系统最终将收敛。

例 4-1

$$\dot{x} = -x(1-x)$$

该方程的解为

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}}$$

两个平衡状态$x_c=0$，$x_c=1$。

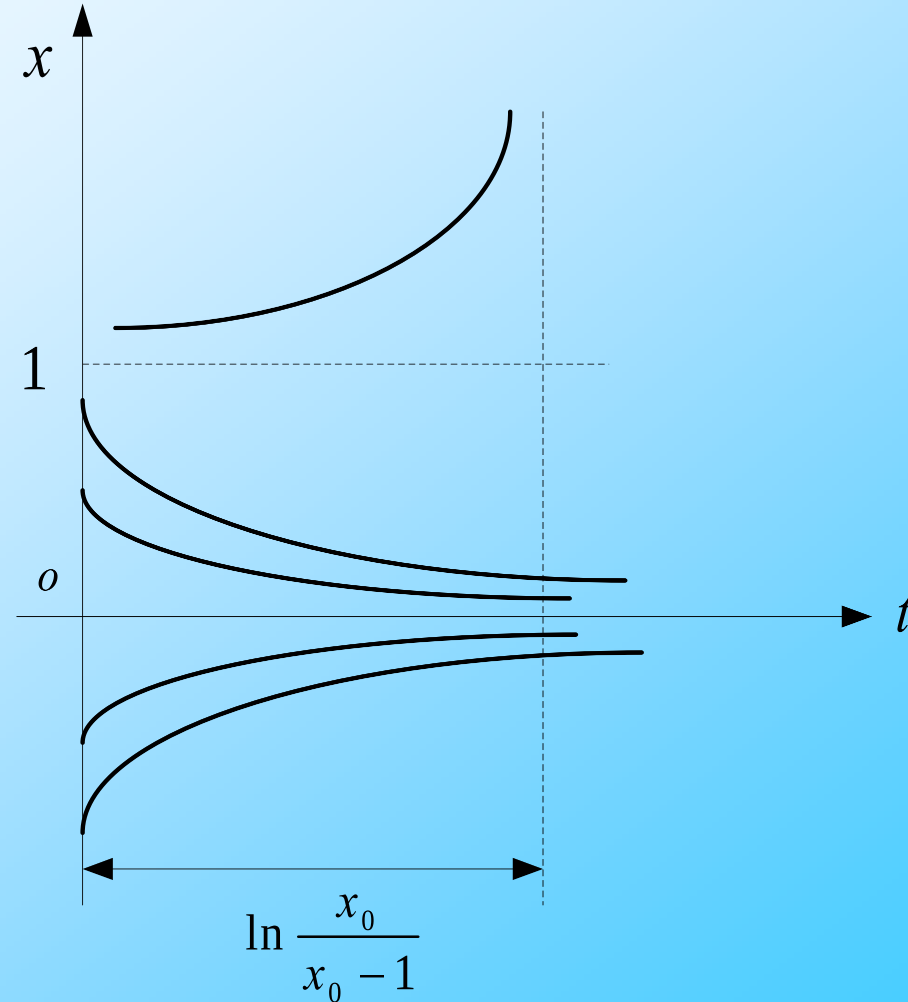


图4-3 非线性系统的解

例：讨论下列系统是否稳定、是否一致稳定、是否渐近稳定：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

解：这是一个定常系统，利用拉氏变换立即可得$e^{\mathbf{A}t}$，并有

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)$$

显然，任给$e > 0$，只要取d=e，则当$x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0) < d$，就有$x_1^2(t) + x_2^2(t) < e$。故系统是李氏稳定的。又$d$与$t_0$

无关，故系统还是一致稳定的。但

$$\lim_{t\to\infty} x_1^2(t)+x_2^2(t)=x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)\neq 0$$

故系统不是渐近稳定的。

例：讨论下列系统是否一致稳定、是否渐近稳定、是否一致渐近稳定：

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{x}{t+1}$$

解：容易解出：

$$x(t,t_0,x_0)=\frac{t_0+1}{t+1}x_0$$

任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则对所有$t\geq t_0$，只要$|x_0|<\delta$，就有$|x(t,t_0,x_0)|\leq|x_0|<\varepsilon$，故其零解一致稳定。又

$$\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{t_0+1}{t+1} x_0 = 0,$$

故零解渐近稳定。

另一方面，$\forall \mathrm{T} > 0$，令取$t_0 = t - \mathrm{T}$,即$t = t_0 + \mathrm{T}$,有

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 \frac{t_0+1}{t_0+\mathrm{T}+1} \xrightarrow[t_0\to\infty]{} x_0 \neq 0$$

故系统的零解不是一致渐近稳定的。

定义4-5：**不稳定**

无论取多大的有界$\varepsilon > 0$,

不存在$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$,满足

$$\|x_0 - x_c\| \le \delta(\varepsilon, t_0) \tag{4-14}$$

的任一初态出发的运动满足

$$\|x(t;\ x_0, t_0) - x_c\| \le \varepsilon, \quad t \ge t_0 \tag{4-15}$$

则称系统是**不稳定的**。

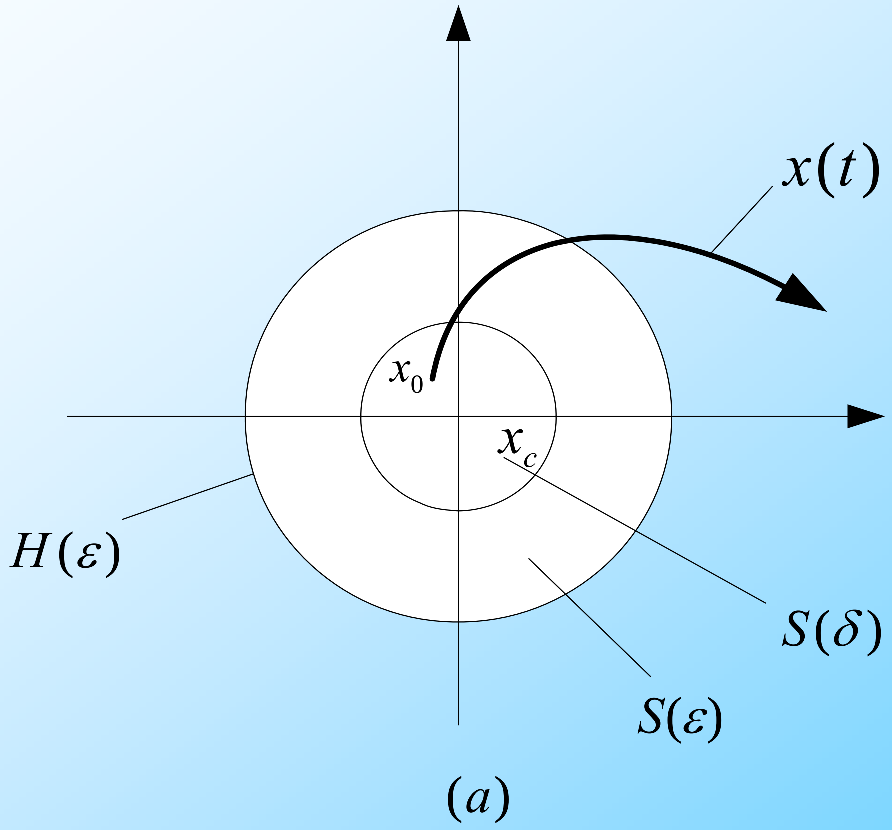
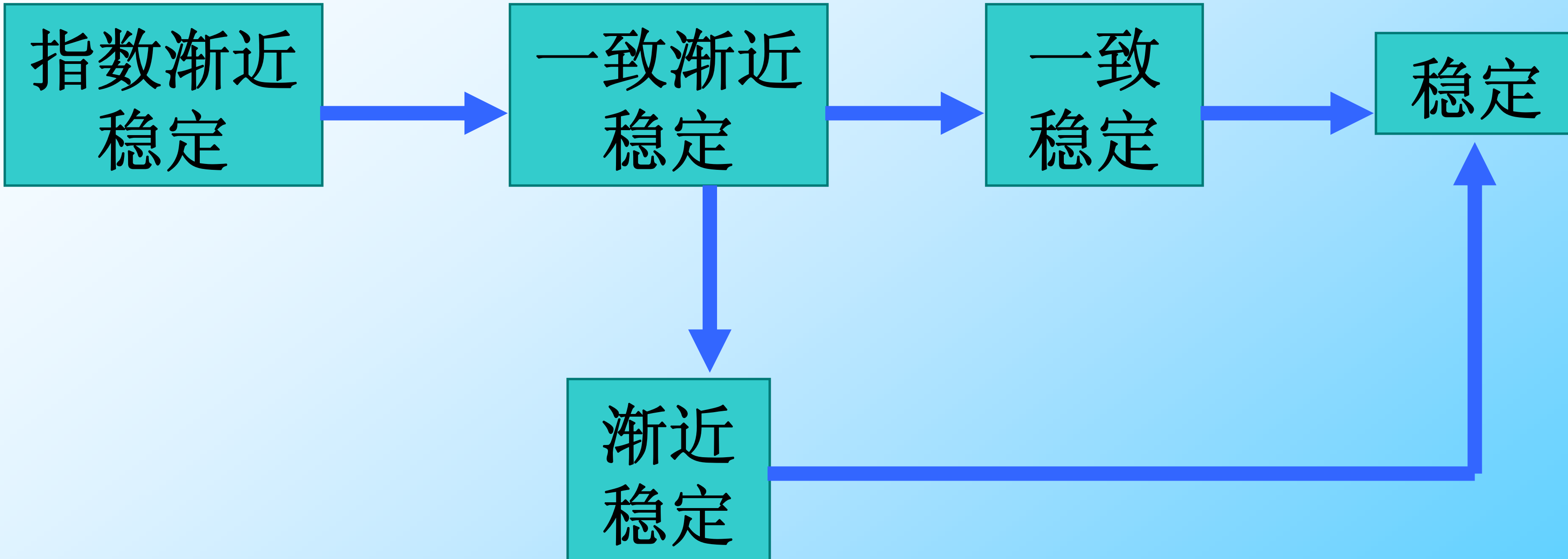


图4-4 不稳定平衡状态



各种稳定性之间的关系

二．李雅普诺夫第二方法

为了分析运动的稳定性,李雅普诺夫提出了两种方法:

第一方法包含许多步骤，包括最终用线性化的微分方程的显式解来对稳定性近行分析，是一个**间接**的方法。

第二方法不是求解微分方程组，而是通过构造所谓李雅普诺夫函数（标量函数）来**直接判断**运动的稳定性，因此又称为**直接法**。

李雅普诺夫第二方法目前仍是研究非线性、时变系统最有效的方法，是许多系统控制律设计的基本工具。

李雅普诺夫第二法的主要定理

李雅普诺夫第二法的关键就是构造所谓李雅普诺夫函数（标量函数）。

非线性时变自治系统

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad t \geq t_0$$
$$f(t,0) = 0 \qquad (4\text{-}16)$$

定理4-1:（**大范围一致渐近稳定的定理，充分条件**）

（1）$V(x,t),\dot{V}_t(x,t)$和$\dot{V}_x(x,t)$对x,t连续，且$V(0,t)=0$

（2）$V(x,t)$正定有界，即存在两个连续的非减标量函数$\alpha(\|x\|),\beta(\|x\|)$,其中$\alpha(0)=0$，$\beta(0)=0$，使对一切$t\geq t_0,x\neq 0$成立

$$0<\alpha\left(\|x\|\right)\leq V(x,t)\leq \beta\left(\|x\|\right) \qquad (4-17)$$

（3）$\dot{V}_t(x,t)$负定有界，即存在$\gamma(\|x\|),\gamma(0)=0$使对$t\geq t_0$和$x\neq 0$成立

$$\dot{V}_t(x,t)\leq -\gamma(\|x\|)<0$$

（4）当$\|x\|\to\infty$时，有α（$\|x\|)\to\infty$,即 （4-18）

$$V(x,t)\to\infty$$

则称系统原点平衡状态为大范围一致渐近稳定。

证明：

(1) 第一步证明原点平衡状态 $x_c=0$ 是一致稳定的。

首先，

$$V(x(t;x_0,t_0),t)-V(x_0,t_0)=\int_{t_0}^{t}\dot{V}_t(x(\tau;x_0,t_0),\tau)d\tau\le 0 \qquad (4\text{-}19)$$

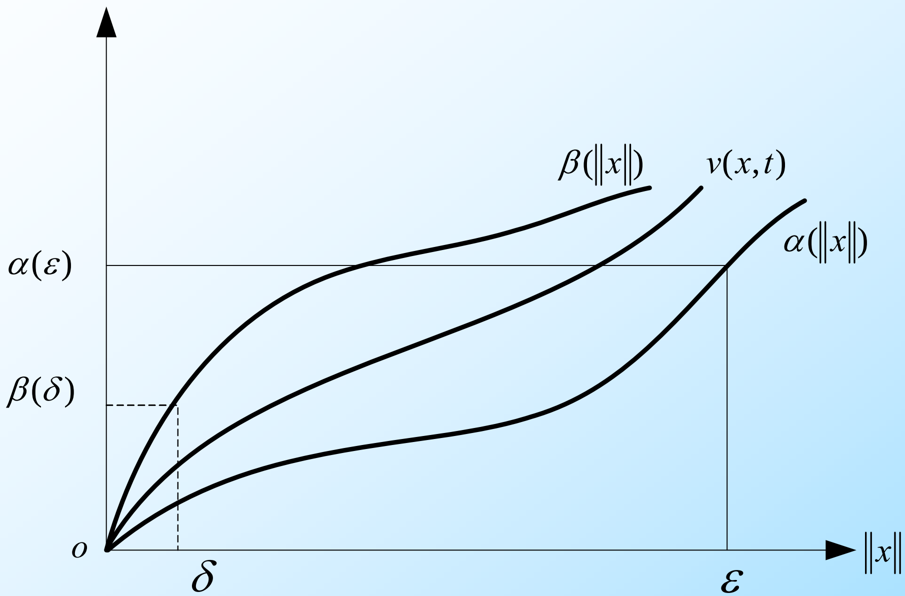


图4-5 定理条件(1)和(2)的几何描述

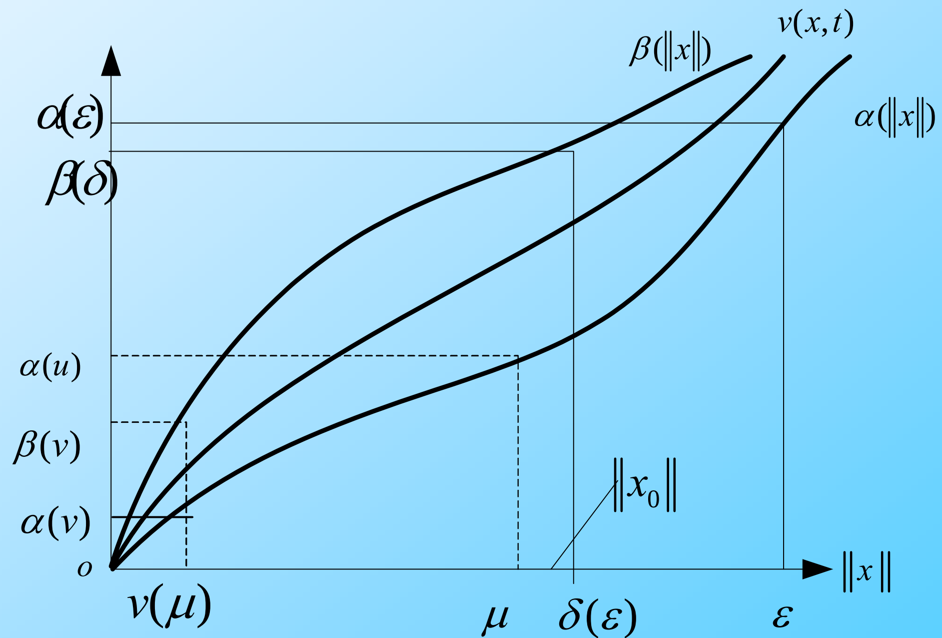


图4-6 对选取的$T(\mu,\delta)$几何解释

$$\forall\varepsilon,\ \exists\delta, \Rightarrow \beta(\delta)\le\alpha(\varepsilon).$$

所以，对 $\|x_0\| \le \delta(\varepsilon)$ 有

$$\alpha\left(\|x(t;x_0,t_0)\|\right) \le V(x(t;x_0,t_0),t) \le V(x_0,t_0) \\ \le \beta(\delta) \le \alpha(\varepsilon) \qquad (4\text{-}20)$$

即 $\left(\|x(t;x_0,t_0)\|\right) \le \varepsilon$

$$\therefore \quad \|x_0\| \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \| x(t;x_0,t_0) \| \le \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0 \qquad (4\text{-}21)$$

（2）第二步证明是一致**渐进稳定**

令$\rho(\upsilon$，μ，$\delta)$为$\gamma(\|x\|)$在$0 \le \|x\| \le \mu$区间上的最小值

先取 $T_1(\mu,\delta)=\dfrac{\beta(\delta)-\alpha(\mu)}{\rho(\upsilon,\mu,\delta)}$

对于 $t=t_0+T_1(\mu,\delta)$ 必有

$$
\begin{aligned}
\alpha\left(\|x(t,x_0,t_0)\|\right) &\le V(x(t,x_0,t_0)) \le V(x_0,t_0)-(t-t_0)\rho(v,\mu,\delta) \\
&< \beta(\delta)-T_1(\mu,\delta)\rho(v,\mu,\delta) \\
&= \beta(\delta)-\left[\beta(\delta)-\alpha(\mu)\right]=\alpha(\mu)
\end{aligned}
$$

于是得经过 $T_1(\mu,\delta),\rightarrow \|x(t,x_0,t_0)\| \le \mu$

再取 $T_2(\upsilon,\delta) > T_1(\mu,\delta)$ 有 $T_2(\upsilon,\delta) = \dfrac{\beta(\delta)-\alpha(\upsilon)}{\rho(\upsilon,\mu,\delta)}$

对于 $t = t_0 + T_2(\upsilon,\delta)$ 必有

$$\begin{aligned}\alpha\left(\left\|x(t,x_0,t_0)\right\|\right) &\le V(x(t,x_0,t_0)) \le V(x_0,t_0) - (t-t_0)\rho(v,\mu,\delta)\\ &< \beta(\delta) - T_2(\upsilon,\delta)\rho(v,\mu,\delta)\\ &= \beta(\delta) - \left[\beta(\delta)-\alpha(\upsilon)\right] = \alpha(\upsilon)\end{aligned}$$

于是经过$T_2(\upsilon,\delta)$,时刻$T_2 > T_1$,有

$$\left\|x(t,x_0,t_0)\right\| \le \upsilon$$

当 $\upsilon \to 0, T \to \infty, x(t,x_0,t_0) \to 0$

（3）第三步证明原点平衡状态的一致渐近稳定是大范围的。

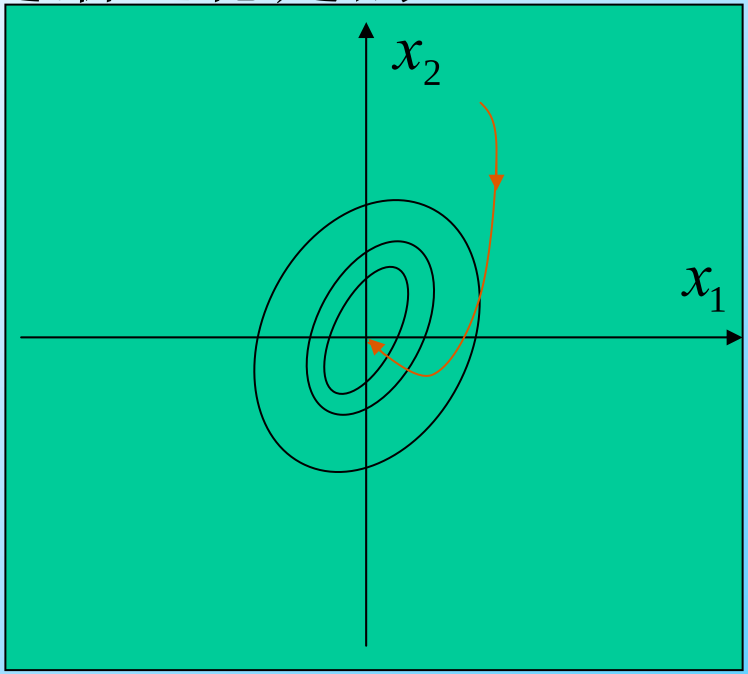
$$\alpha\left(\left\|x(t;x_0,t_0)\right\|\right) \le V\left(x(t;x_0,t_0),t\right) \le V\left(x_0,t_0\right) < \beta(\delta) < \alpha(\varepsilon) \tag{4-26}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\|x(t;x_0,t_0)\right\| < \varepsilon$$

说明：此定理仅是充分条件。

几何解释： 由于$v(x)$正定，$v(x)=C$是一个闭的曲面族，层层相套、随C趋向于零而向原点退缩。而dv/dt负定则说明：在任一点x处，$v(x)$的值都是减小的，从而在任一点x处，运动的轨线都从$v(x)=C$的外部穿越$v(x)=C$走向内部。这表明，$\lim_{t\to 0}x(t)=0$，即原点（零解）是渐近稳定的。



物理解释： $v(x)$是“能量”函数。

定理 4-2: （定常系统大范围渐近稳定的定理）

（1） $V(x), \dot{V}(x)$连续；

（2） $V(x) \geqslant 0$, 等号仅在$x = 0$时成立；

（3） $\dot{V}(x) < 0, x \neq 0;$

(4) 当 $\|x\| \to \infty$时, $V(x) \to \infty$。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

例4-2： $$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0$ 是系统的唯一的平衡状态。

取 $V(x) = x_1^2 + x_2^2$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix} = -2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

定理4-3：（定常系统大范围渐进稳定的定理）

（1） $V(x), \dot{V}(x)$连续；

（2） $V(x) \geqslant 0$, 等号仅在$x = 0$时成立；

（3） $\dot{V}(x) \leq 0$;

(4) 对任意 $x_0 \in \Re$, $\dot{V}(x(t;x_0,0))! \equiv 0$

(5) 当 $\| x \| \to \infty$时, 有$V(x) \to \infty$。

则系统的原点平衡状态是大范围渐近稳定的。

例4-3：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1+x_2)^2 x_2 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0$ 是系统的唯一的平衡状态。

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - (1+x_2)^2 x_2 \end{bmatrix} = -2x_2^2 (1+x_2)^2$$

$\dot{V}(x)=0$ 的两种情况：

(a) x_1任意, x_2= 0 ； (b) x_1任意, x_2= -1

对于情况(a),

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ 0 = \dot{x}_2 = -x_1 - (1+x_2)^2 x_2 = -x_1 \end{cases}$$

对于情况(b),

$\tilde{x}(t;x_0,0)=[x_1(t),-1]^T$ 由 $x_2(t)=-1$ 导出

$\dot{x}_2(t)=0$ 代入系统方程得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = -1 \\ 0 = \dot{x}_2 = -x_1 - (1+x_2)^2 x_2 = -x_1 \end{cases}$$

矛盾!

也就是说 $\tilde{x}(t;x_0,0)=[x_1(t),-1]^T$ 不是原系统的解。

定理4-4：（时变系统李雅普诺夫意义下稳定的定理）

若系统在Ω域内满足：

$$(1)\ V(x,t) > 0 \text{且有界；}$$

$$(2)\ \dot{V}(x,t) \le 0 \text{且有界；}$$

则系统的原点平衡状态为Ω域内一致稳定。

定理4-5：（定常系统李雅普诺夫意义下稳定的定理）

若系统在 Ω 域内满足：

$$(1)\ V(x) > 0;$$

$$(2)\ \dot{V}(x) \le 0;$$

则系统原点平衡状态为 Ω 域内稳定。

定理4-6：**(不稳定的判别定理)**

如果存在一个直到一阶偏导的标量函数$V(x,t)$使得$V(0,t)=0$，且存在区域Ω，使得：

(1)$V(x,t)>0$且有界,或$V(x,t)>0$

(2)$\dot{V}(x,t)>0$且有界,或$\dot{V}(x,t)>0$

则系统平衡状态为**不稳定**。

关于李雅普诺夫函数

1. 不通过求解微分方程而能对系统的稳定性作出结论的标量函数称作系统的一个李雅普诺夫函数；
2. 如何构造v函数是一个复杂的问题。即使满足某系统的v函数理论上存在，要找到其解析的表达式仍非易事。寻求构造v函数的一般方法的企图是不现实的；
3. 应当特别注意定理4-1～4-5均为充分条件。这意味，即便我们不能构造出满足系统稳定的v函数，也不能因此断言系统不稳定。要证明系统不稳定，须找出满足不稳定定理的v函数。

第四章线性系统的稳定性

第一节、 稳定性的基本概念和定理

第二节、 线性时变系统的稳定性判据

第三节、 线性定常系统的稳定性判据

第四节、 线性系统的BIBO稳定性和BIBS稳定性

第二节 线性时变系统的稳定性判据

一 线性时变系统稳定的特点

二 线性时变系统稳定性的两个定理

三 线性时变系统的李雅普诺夫函数

一、线性时变系统稳定的特点

$$\dot{x} = A(t)x, x(t_0) = x_0, t \geq t_0 \tag{4-29}$$

例如 $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$

$\det(sI - A) = (s+1)^2$， $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$。

$$\Phi(t,0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

系统不稳定。所以，线性时变系统一般不能用特征值来讨论系统的稳定性。

定理： 对于方程(4-29) 所表示的线性系统，若有一个运动稳定，则其所有运动稳定。

因此，对线性系统而言，今后可笼统地说“系统是稳定的”，而一般的非线性系统并不具备这一特性。

二、 线性时变系统稳定性的两个定理

定理4-7：（1） 稳定的充要条件：存在$k(t_0)$， 有

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le k(t_0) \tag{4-30}$$

（2） 一致稳定的充要条件：

$k(t_0)$与t_0无关

（3） 渐近稳定的充要条件：

$$\lim_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\| = 0 \tag{4-31}$$

（4） 一致渐近稳定的充要条件：

存在$N>0, c>0$， 有

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le Ne^{-c(t-t_0)} \tag{4-32}$$

定理4-7表明：

1. 李氏稳定等价于状态转移矩阵范数的有界性；
2. 一致稳定等价于状态转移矩阵范‖$\Phi(t,t_0)$ ‖的一致有界性；
3. 渐近稳定等价于状态转移矩阵范‖$\Phi(t,t_0)$ ‖趋向于零；
4. 一致渐近稳定等价于状态转移矩阵按指数规律稳定。

证明:（1） 充分性。由于

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t,t_0)x(t_0)\| \le \|\Phi(t,t_0)\| \cdot \|x(t_0)\| \le k(t_0) \cdot \|x(t_0)\|,$$

取 $\delta(t_0) = \dfrac{\varepsilon}{k(t_0)}$, 当 $\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$ 时必有

$$\|x(t)\| \le \|\Phi(t,t_0)\| \cdot \|x(t_0)\| < k(t_0) \cdot \frac{\varepsilon}{k(t_0)} = \varepsilon, \qquad t \ge t_0$$

成立。

必要性。反证法。

设 $$\left|\phi_{ij}(t_1,t_0)\right| > M > 0$$

现取 $x(t_0)=[0\ldots0\ \underset{j}{\delta}\ 0\ldots0]^T$，则有

$$x(t_1)=\Phi(t_1,t_0)x(t_0)=\phi_j(t_1,t_0)\delta$$

取 $M=\varepsilon/\delta$，有

$$\left\|x(t_1)\right\| = \left\|\phi_j(t_1,t_0)\delta\right\| > \left|\phi_{ij}(t_1,t_0)\delta\right| > (\varepsilon/\delta)\cdot\delta = \varepsilon$$ 。

所以 $\left\|x(t_1)\right\| > \varepsilon$， $t_1 \ge t_0$

与 $x=0$稳定矛盾。 必要性成立。

(2) 的充要条件的证明与(1)类似。

(3) 的证明较为简单, 与(1)类似。

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\Phi(t,t_0)\right\| = 0 \to \left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le k$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\|x(t)\right\| \le \lim_{t\to\infty}\left\|\Phi(t,t_0)\right\|\cdot\left\|x(t_0)\right\| = 0\text{。}$$

(4) 充分性。

因为 $\|\Phi(t,t_0)\| \le N$ 所以系统一致稳定。

又因为 $\|x(t)\| \le \|\Phi(t,t_0)\| \cdot \|x(t_0)\|$

$$\le Ne^{-c(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

任取$u>0$，$\delta_0>0$，当 $\|x(t_0)\| < \delta_0$，存在T

$$T = -\frac{1}{c} ln \frac{\mu}{N\delta_0}$$ （与t_0无关）

当$t \geqslant t_0+T$时有

$$\|x(t)\| \le Ne^{-cT}\|x(t_0)\| < N \cdot \frac{\mu}{N\delta_0} \cdot \delta_0 = \mu$$

必要性:

因为系统一致稳定，所以$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| < k$

又因为一致渐进稳定，所以存在$\delta > 0, \mu > 0,$和$T > 0$

对任意t_0，当$t \geq t_0 + T$且$\left\|x(t_0)\right\| < \delta$时，均有

$$\left\|x(t)\right\| \leq \left\|\Phi(t,t_0)x(t_0)\right\| \leq \mu$$

设$\left\|x(t_0)\right\| = \delta, \mu = \delta / 2,$经过时间$T$有

$$\left\|x(t)\right\| = \left\|\Phi(t_0+T,t_0)x(t_0)\right\| \leq \left\|\Phi(t_0+T,t_0)\right\| \cdot \left\|x(t_0)\right\|$$

$$= \left\|\Phi(t_0+T,t_0)\right\| \cdot \delta \leq \frac{\delta}{2}$$

由此,有 $\left\| \Phi(t_0+T,t_0) \right\| \le \dfrac{1}{2}$

由此又可得

$$\begin{aligned} \left\| \Phi(t,t_0) \right\| &= \left\| \Phi(t,t_0+T) \cdot \Phi(t_0+T,t_0) \right\| \\ &\le \left\| \Phi(t,t_0+T) \right\| \cdot \left\| \Phi(t_0+T,t_0) \right\| \\ &\le \frac{k}{2} \qquad \forall t \in \left[t_0+T, t_0+2T \right] \end{aligned}$$

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le \|\Phi(t,t_0+2T)\| \cdot \|\Phi(t_0+2T,t_0+T)\| \cdot \|\Phi(t_0+T,t_0)\|$$

$$\le \frac{k}{2^2} \qquad \forall t \in [t_0+2T, t_0+3T]$$

$$\vdots$$

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le \frac{k}{2^n}, \forall t \in [t_0+nT, t_0+(n+1)T]$$

现构造包络线来包含 $\|\Phi(t,t_0)\|$：

选取c使得 $$e^{-cT} = \frac{1}{2^c}$$

令$N=2k$, 便得到

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le Ne^{-c(t-t_0)}, \forall t_0, t \ge t_0$$

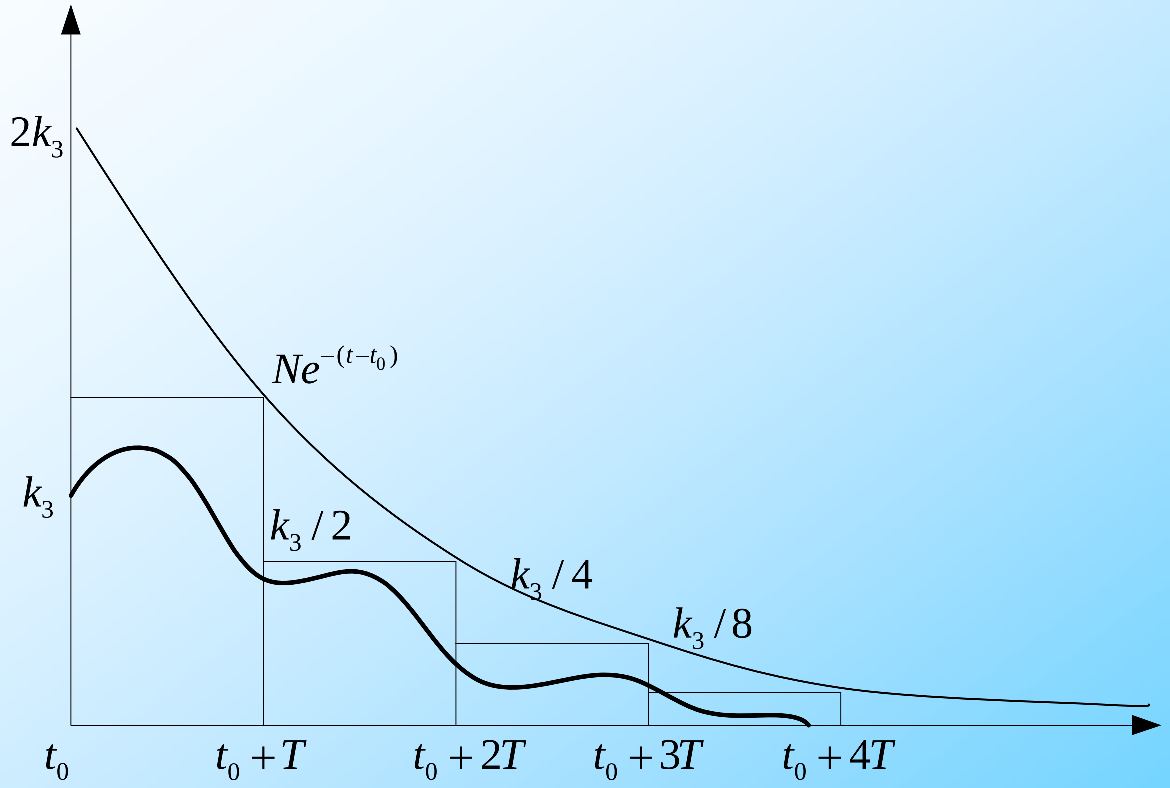


图4-7　$\|\Phi(t,t_0)\|$ 按指数规律收敛

讨论：

1）定理4-7所给出了线性系统的重要性质。此性质完全是由

$$x(t,x_0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0$$

中，$x(t,x_0,t_0)$对x_0的线性关系所致。状态转移阵$\Phi(t,t_0)$决定了解的一切性质。一般地，对于非线性系统，定理4-7的结论均不成立。

2）线性系统的稳定性具有全局性质。

定理4-8：

若$A(t)$ 有界，则

$\dot{x} = A(t)x$的平衡状态按指数稳定等价：

(1) $\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t,t_0)\|^2 dt \le k_1, \qquad \forall t_1 \ge t_0$

(2) $\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t,t_0)\| dt \le k_2, \qquad \forall t_1 \ge t_0$

(3) $\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t_1,\tau)\|^2 d\tau \le k_3, \qquad \forall t_1 \ge t_0$

(4) $\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t_1,\tau)\| d\tau \le k_4, \qquad \forall t_1 \ge t_0$

证明：　正命题很显然。若系统指数渐近稳定，根据定理4-7，得到(4-32)式，代入上面4个表达式，很容易证明。

现证明它的逆命题。

（1）　$\because \left\|\dot{\Phi}(t,t_0)\right\| = \left\|A(t)\Phi(t,t_0)\right\| \le \alpha \cdot \left\|\Phi(t,t_0)\right\|$

再由

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[\Phi^T(t,t_0)\Phi(t,t_0)\right]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\Phi}^T(t,t_0)\Phi(t,t_0) + \Phi^T(t,t_0)\dot{\Phi}(t,t_0)]dt$$

$$= \Phi^T(t,t_0)\Phi(t,t_0)\ \Big|_{t_0}^{t_1} = \Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0) - I$$

由此, 可得

$$\left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)-I\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1}[\dot{\Phi}^T(t,t_0)\Phi(t,t_0)+\Phi^T(t,t_0)\dot{\Phi}(t,t_0)]dt\right\|$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1}(\left\|\dot{\Phi}^T(t,t_0)\right\|\cdot\left\|\Phi(t,t_0)\right\|+\left\|\Phi^T(t,t_0)\right\|\cdot\left\|\dot{\Phi}(t,t_0)\right\|dt$$

$$\le 2\alpha\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Phi(t,t_0)\right\|^2 dt \le 2\alpha k_1, \qquad \forall t_1 \ge t_0$$

由三角不等式得

$$\left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)\right\| = \left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)-I+I\right\|$$

$$\le \left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)-I\right\|+\left\|I\right\| \le 2\alpha k_1+1, \qquad \forall t_1 \ge t_0$$

这表明, 对任意的$t_1 \geqslant t_0$, 有

$\|\Phi(t_1,t_0)\|^2 \le 2\alpha k_1 + 1 = N_1$, 所以$\|\Phi(t_1,t_0)\|^2$有界。

下面证明系统是指数稳定。

首先，我们将对 $\|\Phi(t_1,t_0)\|$作更精确的估算。

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t_1,t_0)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t_1,\tau)\Phi(\tau,t_0)\|^2 d\tau$$

$$\le \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(t_1,\tau)\|^2 \|\Phi(\tau,t_0)\|^2 d\tau$$

$$\le N_1 \int_{t_0}^{t_1} \|\Phi(\tau,t_0)\|^2 d\tau \le N_1 k_1, \qquad \forall t_1 \ge t_0$$

可得

$$(t_1 - t_0)\|\Phi(t_1, t_0)\|^2 \le N_1 k_1, \quad \forall t_1 \ge t_0$$

取T=t_1−t_0＝$4N_1k_1$, 可得

$$4N_1k_1\|\Phi(t_1+T, t_0)\|^2 \le N_1k_1$$

$$\therefore \|\Phi(t_1+T, t_0)\| \le \frac{1}{2}$$

类似地,可证得

$$\|\Phi(t_0+nT, t_0)\| \le (\frac{1}{2})^n$$

与定理(4-7)的构造方法类似,可知系统是指数稳定。

（2）的证明与(1)类似。首先有

$$\left\|\dot{\Phi}(t,t_0)\right\| \le \alpha \left\|\Phi(t,t_0)\right\|$$

显然 $\left\|\Phi(t_1,t_0) - I\right\| = \left\|\int_{t_0}^{t_1} \dot{\Phi}(t,t_0)dt\right\| \le \int_{t_0}^{t_1} \left\|\dot{\Phi}(t,t_0)\right\| dt$

$$\le \alpha \int_{t_0}^{t_1} \left\|\Phi(t,t_0)\right\| dt \le \alpha k_2, \qquad t_1 \ge t_0$$

再利用三角不等式得

$$\left\|\Phi(t_1,t_0)\right\| = \left\|\Phi(t_1,t_0) - I + I\right\| \le 1 + \alpha k_2, \quad t_1 \ge t_0$$

$$\therefore \int_{t_0}^{t_1} \left\|\Phi(t,t_0)\right\|^2 dt \le (1+\alpha k_2)\int_{t_0}^{t_1} \left\|\Phi(t,t_0)\right\| dt \le (1+\alpha k_2)k_2$$

由结论(1)知，系统指数渐进稳定。

(3) 对(1)的证明略加修改可证明(3)。

因为 $\| A(t) \| \leqslant \alpha$, 由

$$\frac{d\Phi(t,\tau)}{d\tau} = -\Phi(t,\tau)A(\tau)$$

可得

$$\left\| \frac{d\Phi(t,\tau)}{d\tau} \right\| \le \alpha \left\| \Phi(t,\tau) \right\|$$

但是另一方面有

$$\left\|I-\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)\right\|=\left\|\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\tau}[\Phi^T(t_1,\tau)\Phi(t_1,\tau)]d\tau\right\|$$

$$=\left\|\int_{t_0}^{t_1}[\dot{\Phi}^T(t_1,\tau)\Phi(t_1,\tau)+\Phi^T(t_1,\tau)\dot{\Phi}(t_1,\tau)]d\tau\right\|$$

$$\le\int_{t_0}^{t_1}(\left\|\dot{\Phi}^T(t_1,\tau)\right\|\cdot\left\|\Phi(t_1,\tau)\right\|+\left\|\Phi^T(t_1,\tau)\right\|\cdot\left\|\dot{\Phi}(t_1,\tau)\right\|)d\tau$$

$$\le 2\alpha\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Phi(t_1,\tau)\right\|^2 d\tau\le 2\alpha k_3$$

利用三角不等式, 由上式得

$$\left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)\right\|\le\left\|\Phi^T(t_1,t_0)\Phi(t_1,t_0)-I\right\|+\left\|I\right\|\le 1+2\alpha k_3=N_3$$

完全类似(1)的证明，可得

$$\left\| \Phi(t_0 + nT, t_0) \right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

所以系统指数渐进稳定。

(4)　类似(3)的证明可证得：

$$\left\|\Phi(t_1,t_0)-I\right\|\le\alpha k_4,\quad t_1\ge t_0$$

于是利用三角不等式得

$$\left\|\Phi(t_1,t_0)\right\|=\left\|\Phi(t_1,t_0)-I+I\right\|\le 1+\alpha k_4,\quad t_1\ge t_0$$

由此,可得

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Phi(t_1,\tau)\right\|^2 d\tau\le(1+\alpha k_4)\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Phi(t_1,\tau)\right\|d\tau\le(1+\alpha k_4)k_4=N_4$$

由结论(3)知，系统指数渐进稳定。

定理证毕。

三 、线性时变系统的李雅普诺夫函数

定理 4-9： 系统 $\dot{x}=A(t)x$, $\|A\|<k$ 且一致渐进稳定，若$Q(t)$为任意正定对称，且满足

$$0<C_2 I\le Q(t)\le C_1 I \tag{4-34}$$

则积分 $$P(t)=\int_t^{\infty}\Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t)d\sigma \tag{4-35}$$

对一切实数 t 收敛。

且 $$V(x,t)=x^T P(x)x$$

是满足定理4-1的一个李雅普诺夫函数。

证明： 由定理4-7知，存在正数N和k, 使

$$\left\|\Phi(\sigma,\ t)\right\| \le N e^{-k(\sigma-t)}, \sigma \ge t \qquad (4\text{-}36)$$

再由式(4-34)可得

$$P(t) \le \int_t^{\infty} C_1 N^2 e^{-2k(\sigma-t)} I d\sigma = \frac{C_1 N^2}{2k} I$$

这表明 $V(x,t) = x^T P(t) x \le \frac{C_1 N^2}{2k} x^T x$ 有界。

对系统(4-29)有

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t,\sigma)x(\sigma)\| \le \|\Phi(t,\sigma)\| \cdot \|x(\sigma)\|$$

考虑到式(4-36)，由上式得

$$\|x(t)\| \le \|x(\sigma)\| N e^{k(\sigma-t)}$$

也即 $$\|x(\sigma)\| \ge \frac{1}{N} e^{-k(\sigma-t)} \|x(t)\|$$

$$\|\Phi(\sigma,t)x(t)\| \ge \frac{1}{N} e^{-k(\sigma-t)} \|x(t)\|$$

将上式代入$x^T P(t) x$的表达式中，可得

$$\begin{aligned} V(x,t) &= x^T P(t) x = \int_0^\infty x^T \Phi^T(\sigma,t) Q(\sigma) \Phi(\sigma,t) x d\sigma \\ &\ge \int_t^\infty \frac{C_2}{N^2} e^{-2k(\sigma-t)} \|x\|^2 d\sigma = \frac{C_2}{2kN^2} \|x\|^2 > 0 \end{aligned} \tag{4-37}$$

其次, 由$V(x, t)$的表达式, 有

$$\dot{V}(x,t) = x^T(A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t))x$$

$$= x^T\{\int_t^\infty [A^T(t)\Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t) + \Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t)A(t)]d\sigma$$

$$+\frac{d}{dt}\int_t^\infty \Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t)d\sigma\}x$$

$$= x^T\{-\int_t^\infty \frac{d}{dt}[\Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t)]d\sigma - \Phi^T(t,t)Q(t)\Phi(t,t)$$

$$+\int_t^\infty \frac{d}{dt}[\Phi^T(\sigma,t)Q(\sigma)\Phi(\sigma,t)]d\sigma\}x$$

$$= -x^TQ(t)x \le -C_2\|x\|^2 < 0$$

所以，$V(x,t)$是一个李雅普诺夫函数。

推论4-1：

系统(4−29)一致渐进稳定的充要条件是：对于任意给定的正定对称阵$Q(t)$, 方程(4−39)

$$\dot{P}(t)+A^T(t)P(t)+P(t)A(t)+Q(t)=0 \qquad (4-39)$$

存在有界正定对称解$P(t)$。

证：令$V(x,t)=x^TP(t)x$,由(4-39)可知$\dot{V}(x)<0$。

可证明，(4-35)所定义的$P(t)$满足(4-39)，由定理4−9知，系统一致渐进稳定。

补充：　运动的稳定性

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u \qquad (\mathbf{A}.1)$$

在任意输入 u 作用下任一实际运动的稳定性，等价于讨论其所对应的齐次方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x \qquad (\mathbf{A}.2)$$

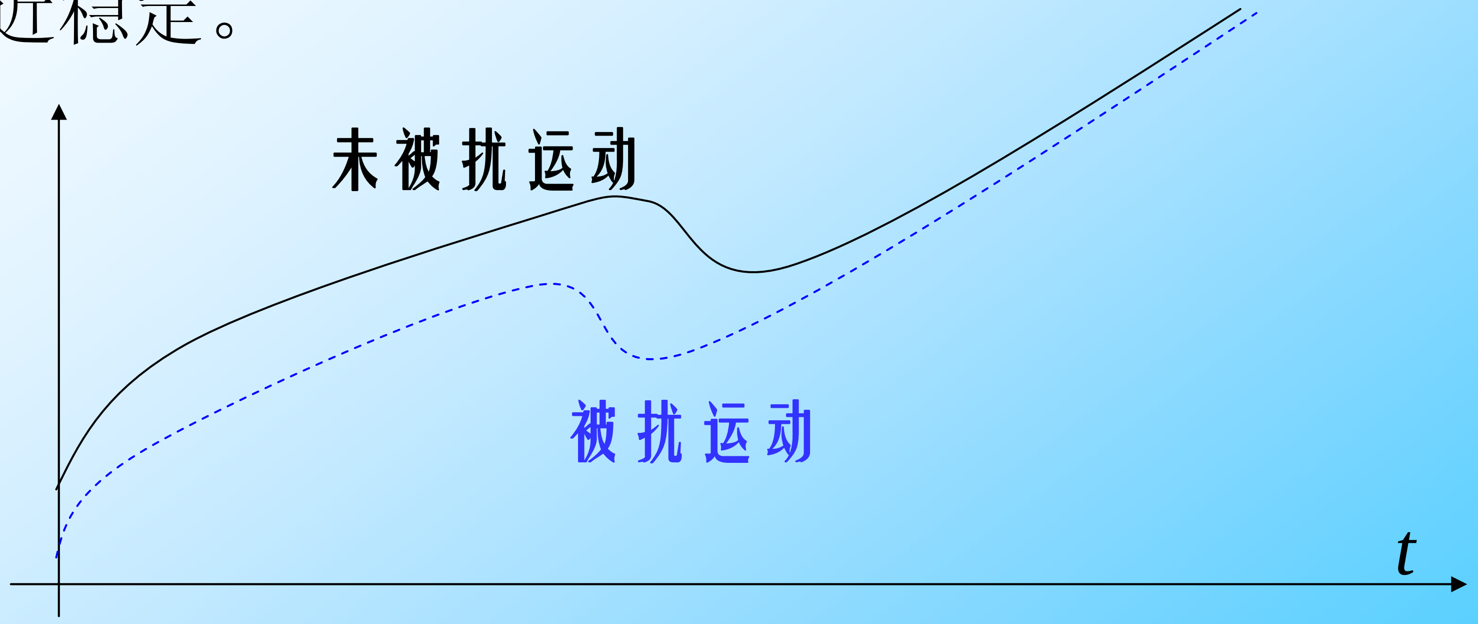
关于零解的稳定性且

(A.1)具有什么性质的稳定性等价于(A.2)具有同一种性质的稳定性。

例： 讨论如下系统的稳定性：

$$\dot{x} = -5x + t, \quad t \geq 0, x(0) := x_0$$

根据上面的结论，只需要讨论所对应的齐次方程的零解稳定性即可。现齐次方程渐近稳定，故原系统渐近稳定。



注意，在这个例子中，系统的响应是无界的。这是由于输入信号是无界的。这和系统的稳定性不是同一个概念。

第四章线性系统的稳定性

第一节、 稳定性的基本概念和定理

第二节、 线性时变系统的稳定性判据

第三节、 线性定常系统的稳定性判据

第四节、 线性系统的BIBO稳定性和BIBS稳定性

第三节 线性定常系统的稳定性判据

一、 基本定理

二、 线性定常系统的李雅普诺夫函数

四 、李雅普诺夫第二法在系统综合方面的应用

一、基本定理

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \qquad t \geq 0 \tag{4-40}$$

特征多项式为

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \tag{4-41}$$

系统(4-40)的稳定性完全可由特征方程式(4－41)的根及其相应的模式来决定。

运动模式及其收敛、发散、有界的条件

(4-40) 式中**A**阵的特征值称为**模态**，n_i 重特征值 λ 对应的运动形式可能有$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{n_i-1}e^{\lambda t}$，均称为系统的运动模式。但这些模式并非全部都出现，究竟出现多少项取决于λ 的几何结构。例如下面不同的若当形结构对应有不同的运动模式：

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} l & & \\ & l & \\ & & l \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\Lambda_1 t} = \begin{bmatrix} e^{l\,t} & & \\ & e^{l\,t} & \\ & & e^{l\,t} \end{bmatrix}$$

$$A = T^{-1}\Lambda T, \rightarrow e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} l & 1 & \\ & l & \\ & & l \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\Lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{lt} & te^{lt} & \\ & e^{lt} & \\ & & e^{lt} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} l & 1 & \\ & l & 1 \\ & & l \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\Lambda_3 t} = \begin{bmatrix} e^{lt} & te^{lt} & \frac{1}{2}t^2 e^{lt} \\ & e^{lt} & te^{lt} \\ & & e^{lt} \end{bmatrix}$$

尽管三者均具有相同的特征值且代数重数相等，但却有不同的几何重数：他们分别为3、2、1。

定理4-10:

系统 $\dot{x} = Ax$

(1) 稳定的充要条件是$\Delta(s)=0$的实部为零的根对应的初等因子是一次，而其余根均具有负实部。

(2) 渐近稳定的充要条件是$\Delta(s)=0$的所有根均有负实部。

(3) 不稳定的充要条件是$\Delta(s)=0$有正实部的根，或实部为零的根所对应的初等因子不是一次。

- 设**A**的互异特征值分别是λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_m；
- 将$e^{\mathbf{A}t}$写成 $\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}$，这里

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{J}_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{J}_m\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{J}_i=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{i1} & & & \\ & \mathbf{J}_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_{ir_{(i)}}\end{bmatrix}}_{\lambda_i}\Rightarrow \mathbf{J}_{ij}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\mathbf{J}_{ij}t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \cdots & \dfrac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!}e^{\lambda_i t} \\ & \ddots & te^{\lambda_i t} & & \\ & & e^{\lambda_i t} & \ddots & \\ & & & \ddots & te^{\lambda_i t} \\ & & & & e^{\lambda_i t}\end{bmatrix}$$

显然，只要讨论$e^{\mathbf{J}t}$的有界性和收敛性即可，而这等价于讨论$e^{\mathbf{J}t}$的每个元素的有界性和收敛性。

以下几种提法是等价的（参看矩阵论）。

对特征值λ_i

(a) λ_i 是最小多项式的单根；

(b) λ_i 的初等因子都是一次的；

(c) 对应的 $\boldsymbol{J}_i$ 是对角形；

(d) 对应的若当块的个数等于代数重数；

(e) 几何重数等于代数重数。

由以上讨论可以得出的结论是：

1) Re $\lambda < 0$， λ 对应的所有运动模式收敛，即随着时间趋于无穷而趋于零。

2) Re $\lambda > 0$, λ 对应的所有运动模式发散，即随着时间趋于无穷而趋于无穷，并且是按指数规律发散.。

3) Re $\lambda = 0$, 分两种情况：

- 若 λ 对应的若当块全是一阶子块，这时 λ 的代数重数与几何重数一致，不会发生发散现象，运动模式也不收敛，运动模式是有界的；

- 当λ的几何重数小于代数重数，λ对应的若当块一定有二阶或二阶以上的出现，这时运动模式发散，但发散是按时间的幂函数的规律。因此当零实部重根出现时，一定要研究它的几何重数后，才可对运动模式的形态作出结论。

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad e^{A_1t}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

例4-4:若系统 $\dot{x} = Ax$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{A_1 t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\left\| e^{A_1 t} \right\|$ 因含有 t而无界

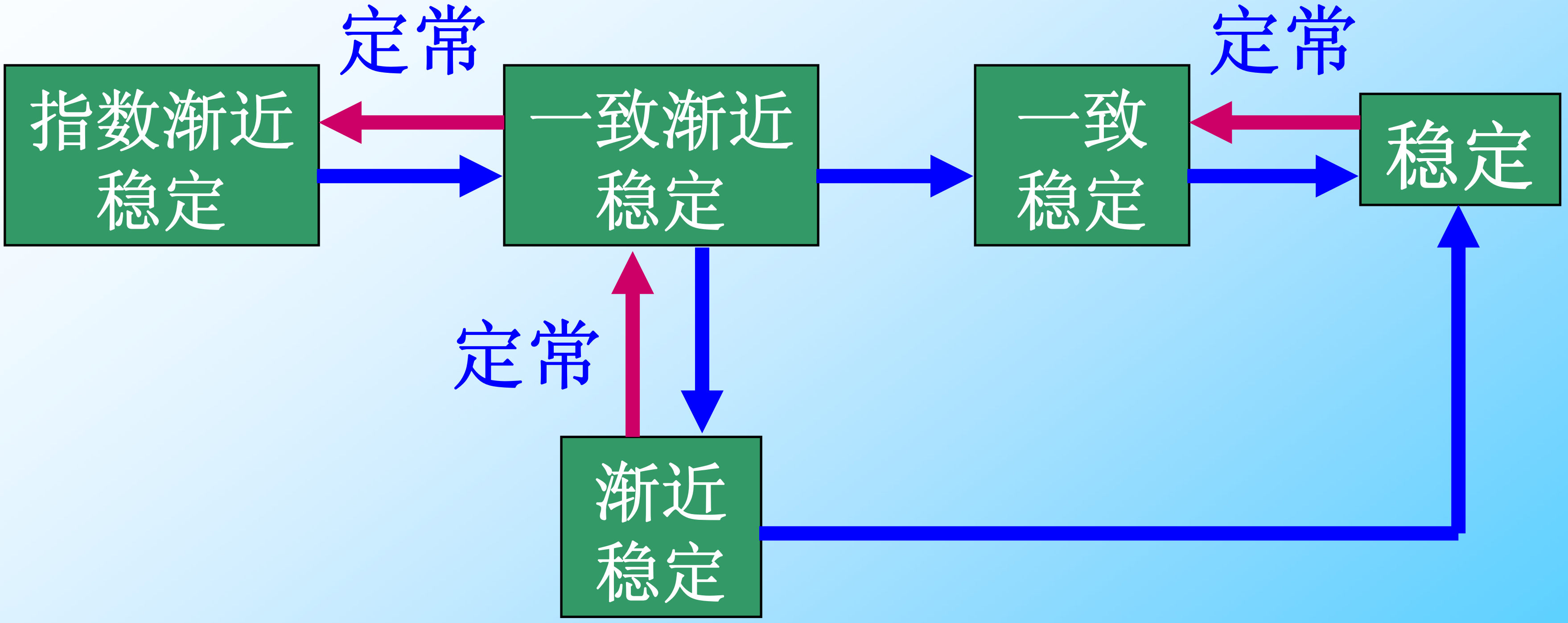
$\longrightarrow$ 故A_1对应的系统不稳定

$\left\| e^{A_2 t} \right\|$ 有界

$\longrightarrow$ A_2对应的系统是稳定的。

A_2的特征值不具有负实部

$\longrightarrow$ 不是渐近稳定的



对于时不变系统，通常只说“系统渐近稳定”。

二、 线性定常系统的李雅普诺夫函数

定理4-11: 系统$\dot{x} = Ax$为渐进稳定的充要条件：

正定对称阵Q, 存在唯一的对称正定阵P, 使得

$$A^T P + PA = -Q \tag{4-42}$$

证明: 充分性。令 $V(x)=x^T Px$ 有

$$V(x)=x^T Px \geq 0\ (等于0仅在x=0成立)$$

其次有

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T Px + x^T P\dot{x} = x^T A^T Px + x^T PAx \\ &= x^T (A^T P + PA)x = -x^T Qx < 0\end{aligned}$$

显然系统$\dot{x}=Ax$渐近稳定。

必要性。

现在系统渐进稳定。考虑矩阵方程:

$$\dot{X} = A^T X + XA, \qquad X(0) = Q \tag{4-43}$$

解为 $X = e^{A^T t} Q e^{At}$

因为 $X(\infty) - X(0) = A^T (\int_0^\infty X dt) + (\int_0^\infty X dt) A$

得 $A^T (\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt) + (\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt) A = -Q$

所以，可取 $P=\int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$

则：$P=P^T$

$$A^T P + PA = -Q$$

$$x^T Px = \int_0^{\infty} (e^{A^T t} x)^T Q (e^{At} x) dt \geq 0$$

以下证P是唯一的。

设有解P_1和P_2, 则有

$$A^T (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) A = 0$$

将上式左乘$e^{A^T t}$, 右乘e^{At}

则 $$\frac{d}{dt}[e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}] = 0$$

$\therefore \ e^{A^T t}(P_1 - P_2)e^{At}$是常数=$C$

$$\lim_{t\to\infty} e^{\mathbf{A}^T t}(P_1 - P_2)e^{\mathbf{A}t} = 0 = C$$

根据 t 的任意性可得： $P_1＝P_2$

例4-5：

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x$$

解：由 $A^T P + PA = -Q$

令Q=I，得等式

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & 2a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_1$$

$$\det A_1 = 4(a_{11}+a_{22})(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$$
$$= 4(a_{11}+a_{22})\det A$$

若$detA_1 \neq 0$， 则可解得P为

$$P = \frac{-2}{\det A_1}\begin{bmatrix} \det A + a_{21}^2 + a_{22}^2 & -(a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}) \\ -(a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}) & \det A + a_{11}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

由P 正定的条件可得

$$P_{11} = \frac{\det A + a_{21}^2 + a_{22}^2}{-2(a_{11}+a_{22})\det A} > 0$$

$$\det P = \frac{(a_{11}+a_{22})^2 + (a_{12}-a_{21})^2}{4(a_{11}+a_{22})^2 \det A} > 0$$

因此, 系统渐近稳定的参数条件为

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

$$(a_{11}+a_{22}) < 0$$

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x$$

注意：定理4-11并不意味着：“A渐进稳定，P正定，则由方程(4-42)所得的Q一定正定。

例：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},$$

由方程$A^TP+PA=-Q$得Q为

$$Q=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & 26\end{bmatrix}<0$$

定理4-12：取$Q = Q^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，

且 $x^T Qx$ 沿任意非零解不恒为零，

$$A^T P + PA = -Q \tag{4-44}$$

有正定对称解的充要条件是：

系统$\dot{x} = Ax$渐近稳定。

证明： 充分性

因为系统渐进稳定，所以

$$x_0^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \, x_0$$

收敛，且 $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$

是矩阵李雅普诺夫方程正定对称解。即P满足方程(4-44)。

$$A^T P + PA = \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} dt + \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} A dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A^T t} Q e^{At}) dt = e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_0^\infty = -Q$$

必要性。

$$V(x) = x^T P x > 0$$

$$\dot{V}(x) = (x^T P x)' = x^T A^T P x + x^T A P x$$
$$= x^T (A^T P + x^T A P) x = -x^T Q x \leq 0, \quad t \in [0, \infty)$$

所以$V(x)$是t的单调非增函数。

还需证明$V(x)$的极限是0，以保证渐进稳定。

若$t\to\infty$时，$V(x)\to\alpha$且$\alpha\neq 0$，即$V(x)\geq\alpha>0$。

由连续性可知：

$$\|x(t)\|>\delta>0,\quad \forall t\in[0,\infty),\ \exists\varepsilon>0$$

$$\dot{V}(x(t))=-x^T(t)Qx(t)<-\varepsilon,\quad \forall t\in[0,\infty)$$

积分这个不等式得

$$V(x(t))=x^T(t)Px(t)<x_0^TPx_0-\varepsilon t$$

$t\to\infty$时，上式右端$\to-\infty$。与$V(x)>0$矛盾。

所以，α＝0。

由$\lim\limits_{t\to\infty}V(x)=0$得$\lim\limits_{t\to\infty}x=0$,

所以系统$\dot{x}=Ax$渐进稳定。

例4-6：　设系统的特征方程为

$$\Delta(s) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

许瓦兹*Schwartz*矩阵

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \quad (a_0 > 0)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \end{bmatrix}$$

令　$b_1 = a_1, b_2 = (a_1 a_2 - a_3)/a_1, b_3 = a_3/a_1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \longrightarrow \left| s\mathrm{I} - \mathrm{A} \right| = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

取 $$Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2b_1^2\end{bmatrix}$$

显然，对任一非零解，x^TQx不恒为零。

解方程 $A^TP+PA=-Q$

得 $$P=\begin{bmatrix}b_1b_2b_3 & 0 & 0\\ 0 & b_1b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_1\end{bmatrix}$$

P为正定对称的充要条件：

$$b_1>0,\qquad b_2>0,\qquad b_3>0$$

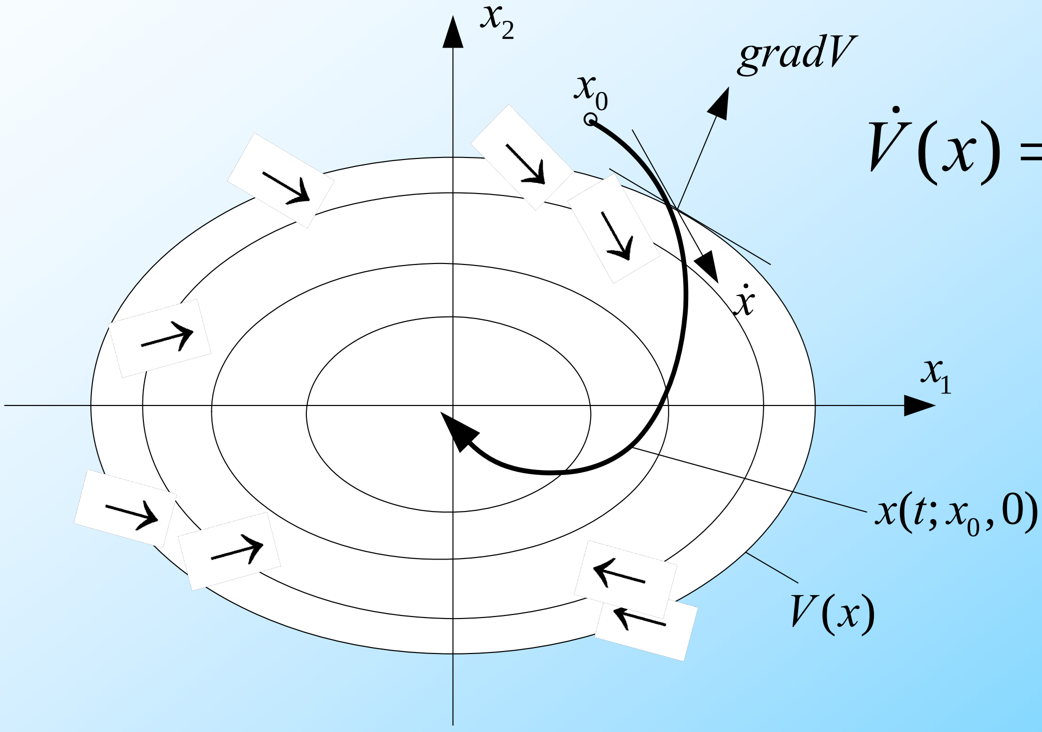
四、李雅普诺夫第二法在系统综合方面的应用

1、自由运动的衰减性能。

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \qquad t \geq 0 \tag{4-59}$$

设原点为唯一的平衡状态，且系统渐近稳定。

$\dot{x} = Ax$ 是非零解 $x(t; x_0, 0)$ 的导数。



$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \cdot \frac{dx}{dt} = -x^T Q x < 0$$

图4-8 能量衰减的几何说明

定义正实数 $\eta = \left|\frac{\dot{V}(x)}{V(x)}\right|$ 为衰减系数。

取从$t=0$到t的积分, 得

$$-\int_0^t \eta dt = \int_0^t \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} dt = \int_0^t \frac{1}{V(x)} dV(x)$$

$$= \ln V(x) - \ln V(x_0) = \ln \frac{V(x)}{V(x_0)}$$

于是, 由此得

$$V(x) = V(x_0) e^{-\int_0^t \eta dt}$$

考虑到 $V(x) = x^T Px$ 和 $\dot{V}(x) = -x^{\mathrm{T}} Qx$

取

$$\eta_{\min} = \min\left\{\frac{x^T Qx}{x^T Px}\right\}$$

则有

$$V(x) \le V(x_0) e^{-\int_0^t \eta_{\min} dt} = V(x_0) e^{-\eta_{\min} t}, \quad t \ge 0 \qquad (4\text{-}62)$$

取

$$\eta_{\max} = \max\left\{\frac{x^T Qx}{x^T Px}\right\}$$

有

$$V(x) \ge V(x_0) e^{-\eta_{\max} t}, \quad t \ge 0 \qquad (4\text{-}63)$$

李雅普诺夫方程

$$A^T P + PA = -Q \tag{4-64}$$

有唯一对称正定解P。且

$$V(x) = x^T Px > 0, \quad \dot{V}(x) = -x^T Qx < 0$$

$$\eta_{\min} = \min_x \left\{ \frac{x^T Qx}{x^T Px} \right\} = \min_x \left\{ x^T Qx, x^T Px = 1 \right\} \tag{4-65}$$

定理4−16：$$\eta_{\min} = \lambda_{\min}(QP^{-1}) \tag{4−66}$$

证明：　将式(4-65)转化为无条件极值问题

$$\min_x[x^T Qx + \mu(1 - x^T Px)] = \min_x[x^T(Q - \mu P)x + \mu]$$

$$\left\{\frac{dx^T}{dx}(Q - \mu P)x + \left[x^T(Q - \mu P)\frac{dx}{dx^T}\right]^T\right\}_{x=x_{\min}} = 0$$

$\because \quad \dfrac{dx^T}{dx} = \dfrac{dx}{dx^T} = I$ ，所以上式可表示为

$$2(Q - \mu P)x_{\min} = 0$$

由$x_{\min}$的任意性可得：

$$\det(Q-\mu P)=0$$

因此，$\det(\mu I-QP^{-1})=0$

从而知 $\mu=\lambda(QP^{-1})$

$$\eta_{\min}=\min_{x}\{x^T Qx, x^T Px=1\}=\min_{x}\{x^T \mu Px, x^T Px=1\}=\min[\mu]$$

$$\eta_{\max}=\max[\mu]$$

所以，$V(x_0)e^{-\mu_{\max}t}\le V(x)\le V(x_0)e^{-\mu_{\min}t}$， $t\ge 0$

2. 用李雅普诺夫第二法配置系统的极点

$$\dot{x} = (A + BK)x = A_c x$$

矩阵方程 $(A + BK)^T P + P(A + BK) = -Q$

其中A, B, Q已知，K, P未知

解$P(K)$即P是K的函数

代入构造 $V(x) = x^T Px$，令 $\dfrac{\partial V(x)}{\partial K} = 0$

求极值从而求得K

例4-10：考虑完全可控系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}u$$

此系统的特征方程为：$s^2-2s-2=0$。

所以特征根为：$s_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i$。

取$u = Kx$为 $$u=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}x$$

则可直接得

$$A_c = A+BK =\begin{bmatrix}k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22}\\ 2-k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22}\end{bmatrix}$$

取$P = Q = I$, 写出矩阵李雅普诺夫方程为

$$\begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 2-2k_{11}+k_{21} \\ 1+k_{12}+k_{22} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix} \cdot I + I \cdot \begin{bmatrix} k_{11}+k_{21} & 1+k_{12}+k_{22} \\ 2-2k_{11}+k_{21} & 2-2k_{12}+k_{22} \end{bmatrix} = -I$$

如此, 可有方程组

$$\begin{cases} 2k_{11}+2k_{21} = -1 \\ -2k_{11}+k_{12}+k_{21}+k_{22} = -3 \\ -4k_{12}+2k_{22} = -5 \end{cases}$$

取$k_{11}=1$，解得

$k_{12}=1$， $k_{21}=-3/2$， $k_{22}=-1/2$

从而有

$$K=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A_c=A+BK=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

在此K之下，

$$\det(sI-A_c)=s^2+s+\frac{5}{2}, \qquad s_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{3}{2}$$

对于此例，若$P = 0.1Q$，$k_{11} = 1$，

可得

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_c = A + BK = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^2 + 10s + 61, \quad s_{1.2} = -5 \pm j6$$

若要系统闭环特征值实部均小于$-\sigma$（$\sigma>0$），可令A_c满足

$$2\sigma P+A_c^T P+PA_c=-Q$$

这里Q, P均为对称正定阵，

$$(A_c+\sigma I)^T P+P(A_c+\sigma I)=-Q \tag{4-67a}$$

$$\operatorname{Re}\lambda(A_c+\sigma I)<0$$

也即

$$\operatorname{Re}\lambda(A_c)<-\sigma \tag{4-67b}$$

3. 李雅普诺夫第二法用于系统二次性能指标的综合

性能指标

$$
\begin{cases}
\dot{x} = Ax + Bu \\
u = Kx \\
J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt
\end{cases}
\tag{4-68a}
$$

引入状态反馈 $u=Kx$

$$\dot{x}=(A+BK)x=A_c x$$

$$J=\int_0^\infty x^T(Q+K^T RK)xdt$$

$$\frac{d}{dt}x^T Px=\dot{x}^T Px+x^T P\dot{x}=x^T(A_c{}^T P+PA_c)x=-x^T(Q+K^T RK)x$$

取$x^T(Q+K^T RK)x=-\dfrac{d}{dt}(x^T Px)$，则有

$$J=\int_0^\infty -\frac{d}{dt}(x^T Px)dt=x^T(0)Px(0)-x^T(\infty)Px(\infty)$$

于是可以得到方程

$$(A+BK)^T P+P(A+BK)=-(Q+K^T RK) \qquad (4\text{-}68b)$$

$$J=x^T(0)Px(0) \qquad (4\text{-}68c)$$

例 4-11：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\quad u=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}x$$

$$J=\int_0^{\infty}(x^Tx+u^Tu)dt$$

将 $u=[k_1 \quad k_2]x$代入系统方程, 得闭环系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}x=A_cx$$

李雅普诺夫方程为

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ 1 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1+k_1^2 & k_1k_2 \\ k_1k_2 & 1+k_2^2 \end{bmatrix}$$

解得作为k_1, k_2函数的P阵和$J=J(k_1, k_2)$。

然后取$\dfrac{\partial J}{\partial k_1}=0, \dfrac{\partial J}{\partial k_2}=0$, 使$J$对任意$x_1(0), x_2(0)$取极小，

从而解得 $k_1=-1, \qquad k_2=-\sqrt{3}$

性能指标J为

$$J=\sqrt{3}x_1^2(0)+2x_1(0)x_2(0)+\sqrt{3}x_2^2(0)$$

第四章 线性系统的稳定性

第一节、 稳定性的基本概念和定理

第二节、 线性时变系统的稳定性判据

第三节、 线性定常系统的稳定性判据

第四节、 线性系统的*BIBO*稳定性和*BIBS*稳定性

第四节 线性系统的BIBO稳定性和BIBS稳定性

一、线性时变系统的BIBO稳定性

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau,\ \ t \ge t_0 \qquad (4\text{-}69)$$

初始松弛

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (4\text{-}70)$$

定义在$[t_0,\infty]$上的函数向量$u(t)$,若存在常数$k<\infty$,使得对于$[t_0,\infty]$上一切t均有

$\|u(t)\|<k$, $\|u\|$一般取欧氏范数。

则称$u(t)$为有界。

定义4-6：对有界输入 $\|u(t)\|<k, \quad \forall t\in[t_0,\infty)$

若存在常数$C(t_0,u)<\infty$ 使得

$$\|y(t)\|\le C(t_0,u), \quad \forall t\ge t_0 \qquad (4\text{-}72)$$

称系统是BIBO稳定的。

若C与t_0无关，则称系统是BIBO一致稳定的。

定理4-17：线性时变系统(4-70)$BIBO$一致稳定的充要条件是存在常数K，使得对于任何t，均有

$$\int_{-\infty}^{t} \|G(t,\tau)d\tau\| \le K \tag{4-73}$$

证明： 充分性. 由式(4—73)可得

$$\|y(t)\| = \left\|\int_{-\infty}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau\right\|$$

$$\le \int_{-\infty}^{t} \|G(t,\tau)\| \cdot \|u(\tau)\| d\tau \le u_m \int_{-\infty}^{t} \|G(t,\tau)\| d\tau \le u_m K$$

引理4-2：

$$\|x\| = \max_{\|y\|=1} y^T x \qquad (2-74)$$

$$\|A\| = \max_{\|y\|=1} \max_{\|x\|=1} y^T Ax \qquad (2-75)$$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial y_i}[\sum_{j=1}^{n} y_j x_j - \mu(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - 1)] = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

得$y_i = \dfrac{x_i}{2\mu}$，代入约束方程$\| y \|=1$得$\mu = \dfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$，所以

$$\max_{\|y\|=1} y^T x = \max_{\|y\|=1} \sum_{j=1}^{n} y_j \ x_j = \frac{1}{2\mu} \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{1/2} = \|x\|$$

再利用式(4-74)证式(4-75)。事实上

$$\max_{\|y\|=1} \max_{\|x\|=1} y^T Ax = \max_{\|x\|=1} [\max_{\|y\|=1} y^T (Ax)] = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$$

上式最后一步用到诱导范数的性质：

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

反证法证明必要性。

设对任意的 K 总有 t_k 存在，使得

$$\int_{-\infty}^{t_k} \|G(t_k,\tau)\| d\tau > K$$

则有 $\|y(t_k)\| = \max_{\|v\|=1} v^T y(t_k) = \int_{-\infty}^{t_k} \max_{\|v\|=1} v^T G(t_k,\tau) u(\tau) d\tau$

记 $\left\| y^*(t_k) \right\| = \max\limits_{\|u(t)\|=1} \left\| y(t_k) \right\|$

$$\left\| y^*(t_k) \right\| = \int_{-\infty}^{t_k} \max_{\|u\|=1} \max_{\|v\|=1} v^T G(t_k,\tau) u(\tau) d\tau$$

由式 (4-75) 可知

$$\left\| G(t_k,\tau) \right\| = \max_{\|u\|=1} \max_{\|v\|=1} v^T G(t_k,\tau) u(\tau)$$

$$\therefore \left\| y^*(t_k) \right\| = \int_{-\infty}^{t_k} \left\| G(t_k,\tau) \right\| d\tau > K$$

即在有界输入 $\| u(t) \| = 1$时，输出$y^*(t_k)$无界。矛盾。

定理4-18：

线性时变系统（4-70）$BIBO$一致稳定的充要条件是存在常数K，使得对任何t均有：

$$\int_{-\infty}^{t}\left|g_{ij}(t,\tau)\right|d\tau \le K,(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots p)$$

（4-76）

二 线性定常系统的*BIBO*稳定性

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}G(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{4-77}$$

系统在t=0时松驰,

$$y(t)=\int_{0}^{t}G(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{4-78}$$

定理4-18：
线性时不变系统(4-77)*BIBO*一致稳定的充要条件是存在常数*K*，使得对任何*t*均有：

$$\int_0^{\infty}\left|g_{ij}(t-\tau)\right|d\tau \le K,(i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,p)$$

证明：充分性

$$\left|y_i(t)\right|=\left|\int_0^t \sum_{j=1}^{p} g_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau\right| \le \sum_{j=1}^{p}\int_0^t \left|g_{ij}(t-\tau)\right|\cdot\left|u_j(\tau)\right|d\tau$$

$$\le \sum_{j=1}^{p} k_j\int_0^t \left|g_{ij}(t-\tau)\right|d\tau < \sum_{j=1}^{p} k_j\int_0^{\infty} \left|g_{ij}(t-\tau)\right|d\tau \le pk_jK$$

从而知，系统(4-78)的输出有界。

必要性　　反证法。

$$\int_0^{t_1}\left|g_{ij}(t_1-\tau)\right|d\tau > K$$

有界输入为

$$u_j(\tau)=sign[g_{ij}(t-\tau)];\quad u_i(\tau)=0,\quad i\neq j$$

这样就有

$$y_i(t_1)=\int_0^{t_1}\sum_{j=1}^{p}g_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau=\int_0^{t_1}g_{ij}(t-\tau)u_j(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^{t_1}|g_{ij}(t-\tau)|d\tau > K$$

定理4-20：系统(4-80)$BIBO$稳定的充要条件。

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad (4\text{-}80)$$

$G(s)$的每一个元素的极点均有负实部。

证明：

因为$g_{ij}(s)$的极点有负实部，因此$g_{ij}(s)$的拉氏反变换是由有限个$t^{k-1}e^{\lambda_i t}$和有限个$\delta(t)$和的形式，所以有

$$\int_0^{t_1} |g_{ij}(t-\tau)| d\tau \le K < \infty, \quad (i = 1, 2, \cdots, q; j = 1, 2, \cdots, p)$$

由定理4—19可知此定理成立。

对单输入单输出系统，

$$y(t)=\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \qquad (4\text{-}81)$$

$BIBO$稳定的判据为

$$\int_0^\infty \left|g(\tau)\right|d\tau \le k \qquad (4\text{-}82)$$

或

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty \left|g(\tau)\right|d\tau = 0 \qquad (4\text{-}83)$$

三 线性系统的*BIBS*稳定性

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x \end{cases} \qquad (4\text{-}85)$$

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \qquad (4\text{-}86)$$

定义4-7：任意非零状态 $x(t_0)$,有界输入$\|u(t)\| < U_m$

若 $\|x(t)\| \le C(t_0, x_0, u_m) < \infty$ (4-87)

则系统(4-85) *BIBS*稳定。

若常数C（u，x_0）与t_0无关，则称系统为*BIBS*一致稳定。

定理 4-22：系统(4-85)*BIBS*稳定的充要条件是存在常数$K_1(t_0)$和$K_2(t_0)$，有

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le K_1(t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)B(\tau)\| d\tau \le K_2(t_0) \qquad (4\text{-}88)$$

若常数$K_1(t_0)$和$K_2(t_0)$与t_0无关

$\Updownarrow$

系统*BIBS*一致稳定的充要条件。

证明：充分性。取 $\|u(t)\| < u_m$ 有

$$\|x(t)\| = \left\|\Phi(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau\right\|$$

$$\le \|\Phi(t,t_0)\| \cdot \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,\tau)B(\tau)\| \cdot \|u(\tau)\| d\tau$$

$$\le K_1(t_0)\|x(t_0)\| + K_2(t_0)u_m$$

设任意初态 $x(t_0)$ 有界，则有

$$\|x(t)\| \le K(t_0, x_0, u_m) < \infty$$

必要性。反证法，

如下两式中任何一个成立。

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| > K_1(t_0), \quad \int_{t_0}^{t}\left\|\Phi(t,\tau)B(\tau)\right\|d\tau > K_2(t_0)$$

则必导致 $\|x(t)\|$ 无界，于系统 $BIBS$ 稳定矛盾。

- 系统***BIBS*** 全稳定 $\Leftrightarrow$ 系统全体可控模式收敛、全体不可控模式不发散。

- 从频域上的判别：从表达式(A-3)可知，***BIBS***稳定的条件就是：$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ 的极点均具负实部。这是因为不可控模态均已消去，故只要对可控模态提出要求即可。

定义4-8：$\|u(t)\| < u_m$，存在常数 $C_1(t_0, x_0, u_m)$ 和 $C_2(t_0, x_0, u_m)$ 使有

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\le C_1(t_0, x_0, u_m) \\ \|y(t)\| &\le C_2(t_0, x_0, u_m) \end{aligned} \tag{4-89}$$

则称系统(4-85)是总体稳定的。

常数$C_1(x_0, u_m)$和$C_2(x_0, u_m)$与t_0无关，总体一致稳定的。

系统的状态响应和输出响应分别为

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (4\text{-}90)$$

$$y(t)=Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (4\text{-}91)$$

稳定性之间的关系

容易验证以下命题成立：

1. 若（A， C）可观，则有

$\boldsymbol{BIBO}$ 稳定$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{BIBS}$ 稳定

2. 若（A，B）可控，则有

$\boldsymbol{BIBS}$ 稳定$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{A})<0,\ i=1,2,\ldots,n$

3. 若（A，B， C）可观、可控，则

$\boldsymbol{BIBO}$ 稳定$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\ \lambda_i(\boldsymbol{A})<0,\ i=1,2,\ldots,n$

定理 4-23：若线性定常系统(A,B,C)完全可控、完全可观测，则下列提法等价。

(1) 系统(A, B, C)总体稳定

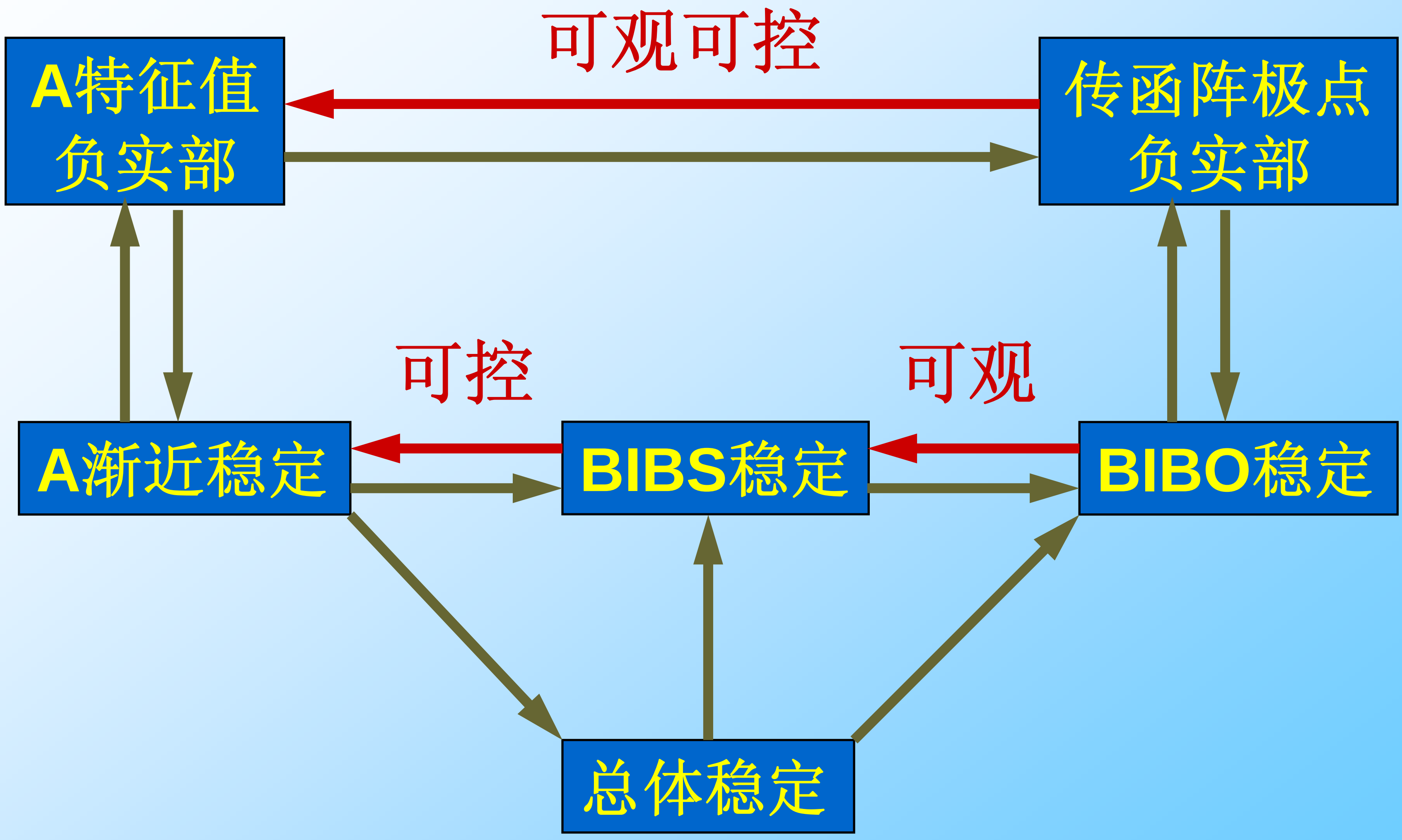
(2) 系统(A, B, C) $BIBO$稳定

(3) 系统(A, B, C) $BIBS$稳定

（4）系统$\dot{x} = Ax$渐近稳定

（5）$\operatorname{Re}\lambda(A) < 0, \forall \lambda \in (A)$

(6)系统$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$所有极点均具有负实部


可观可控
A特征值
负实部
传函阵极点
负实部
可控
可观
A渐近稳定
BIBS稳定
BIBO稳定
总体稳定

时不变系统判断各种意义下的稳定性，一般要求出$\boldsymbol{A}$的特征值，再对这些特征值的可控、可观性进行研究，再根据定理作判断。因为系统的可控性、可观性与传函阵零、极点对消（或约去模态）有联系，因此可以不去判别各特征值的可控、可观性，直接计算：

$\boldsymbol{BIBS}$ 稳定： $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ (所有极点在左半面）

$\boldsymbol{BIBO}$ 稳定： $\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$ (所有极点在左半面）

例：考虑系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

讨论其***BIBS***、***BIBO***稳定。

解：可以从复数域（传递函数）的角度来讨论：

BIBS:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}b=\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

BIBO:

$$g(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

第四章　小　结

第四章线性系统的稳定性

第一节、 稳定性的基本概念和定理

第二节、 线性时变系统的稳定性判据

第三节、 线性定常系统的稳定性判据

第四节、 线性系统的$BIBO$稳定性和$BIBS$稳定性

一、稳定性的基本概念

- 李雅普诺夫稳定

- 李雅普诺夫稳定

$$\varepsilon > 0, \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \ \|x_0 - x_c\| \leq \delta(t_0, \varepsilon)$$

满足 $\|x(t; x_0, t_0) - x_c\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$

称平衡状态x_c是李雅普诺夫稳定。

- 李雅普诺夫意义下一致稳定

$$\varepsilon > 0, \delta(\varepsilon) > 0,$$

$$\|x_0 - x_c\| \le \delta(\varepsilon)$$

满足 $\|x(t; x_0, t_0) - x_c\| \le \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0$

称平衡状态x_c是李雅普诺夫意义下一致稳定。

- 渐近稳定
  - 稳定
  - $\delta(\varepsilon, t_0) > 0, \mu > 0, \exists T(\mu, \delta, t_0) > 0$

当 $t \geq t_0 + T(\mu, \delta, t_0)$ 有

$$\left\| x(t; x_0, t_0) - x_c \right\| \leq \mu$$

则称平衡状态x_c是渐近稳定的

有 $\mu \to 0, T \to \infty$, 成立

$$\lim_{t \to \infty} x(t; x_0, t_0) = 0, \quad \forall x_0 \in S(\delta)$$

- 指数渐近稳定

$$\upsilon > 0, \varepsilon > 0, \delta(\varepsilon) > 0$$

$$\left\| x_0 - x_c \right\| < \delta(\varepsilon)$$

$$\left\| x(t; x_0, t_0) - x_c \right\| < \varepsilon e^{-\upsilon(t-t_0)}$$

称平衡状态x_c是按指数渐近稳定的

- 大范围渐近稳定

对任一有限非零初始状态x_0,均有

$$x(t;x_0,t_0)\text{有界，}$$

$$\text{且}\lim_{t\to\infty}x(t;x_0,t_0)=0$$

称平衡状态x_c是大范围渐近稳定的。

2、 V函数的基本特点

（1）$V(x,t)$是x,t任意连续函数

（2）$V(x,t) \geq 0$（$=0$在$x=0$时成立）

（3）$V(x,t)$中$x(t)$是$\dot{x}=f(x,t)$的解

（4）$V(x,t)$有界，单调递增（相对$\|x\|$）

（5）$\dot{V}_t(x,t) \leq 0,$连续函数不恒为0

3、基本定理

时变与时不变均成立的大范围渐稳定理

满足$V(x,t)$上述五大特点，系统渐近稳定(一致)，最主要的有二点

(1) $V(x,t) \geq 0$ ($= 0$仅在$x = 0$成立)连续函数

（2）$\dot{V}(x,t) < 0$

4、构造 $V(x,t)$

一般情形

（1） $\dot{x}=A(t)x$　$x_0, t \geq t_0$ 任意给，使正定对称

$$Q(t)=Q^T(t)>0$$

$$\dot{P}(t)+A^T(t)P+P(t)A(t)+Q(t)=0$$

有对称正定解 $P(t)$，则 $\dot{x}=A(t)x$ 渐稳

（2） $\|A(t)\| \le k$ 给定 $0 < C_2 I \le Q(t) \le C_1 I$ 若积分

$P(t) = \int_t^{\infty} \Phi^T(\sigma,t) Q(\sigma) \Phi(\sigma,t) d\sigma$ 收敛， 则

$V(x,t) = x^T P(t) x$ 是系统大范围渐稳的李氏函数

定常情形：$\dot{x} = Ax$ 任给 $Q = Q^T > 0$

$A^T P + PA = -Q$ 若 $P = P^T > 0$ 系统渐稳

若$Q = Q^T \ge 0$，且$x^T Qx$沿任意非零解不恒为零，

又$A^T P + PA = -Q$，若$P = P^T > 0$ 则系统渐稳。

线性系统的稳定性

线性系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u$$

在任意输入 u 作用下任一实际运动的稳定性，等价于讨论其所对应的齐次方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$$

关于零解的稳定性， 且两者的稳定性类型相同。

二、系统稳定的判据

1. 时变系统稳定判据　$\dot{x} = A(t)x$，　$x_0, t \geq t_0$

（1）　$A(t)$ 连续，分段连续

$\|\Phi(t,t_0)\| \leq k(t_0)$　　稳定;

$\|\Phi(t,t_0)\| \leq k$　　一致稳定;

$A(t)$ 连续，分段连续，　$\lim\limits_{t\to\infty}\Phi(t,t_0) = 0$

$\|\Phi(t,t_0)\| \leq Ne^{-c(t-t_0)}$　　渐稳.

（2）$A(t)$在$t \in (-\infty, \infty)$有界

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi(t, t_0) \right\|^2 dt \le k_1, t_1 \ge t_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi(t, t_0) \right\| dt \le k_2, t_1 \ge t_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi(t, \tau) \right\|^2 d\tau \le k_3, t_1 \ge t_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| \Phi(t, \tau) \right\| d\tau \le k_4, t_1 \ge t_0$$

上述任一条件都是系统渐稳充要条件。

（3）利用李雅普诺夫函数判断。

2．时不变 $\dot{x} = Ax$

（1） $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$ ，渐稳

（2） $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) > 0$ ，不稳

（3） $\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) = 0$ 初等因子二次，不稳

$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A) = 0$ 初等因子一次，稳定

三、*BIBO*稳定

1. 时变情形

$$\int_{-\infty}^{t} \left\| G(t,\tau) \right\| d\tau \le k$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left| g_{ij}(t,\tau) \right| d\tau \le k_i$$

2．时不变情形

（1） $\int_0^{\infty} \left| g_{ij}(t-\tau) \right| d\tau \le k$

（2） $y(s) = G(s)u(s)$

$G(s)$所有极点具有负实部.

四、*BIBS*稳定

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

1. $\int_{t_0}^{t_1}\left\|\Phi(t,\tau)B(\tau)\right\|d\tau\le k_e,\left\|\Phi(t,t_0)\right\|\le k_1$

2. *BIBO*稳定与*BIBS*稳定有着密切关系，仅对定常系统说明如下定理

定理 若线性定常系统(A,B,C)完全可控、完全可观测，则下列提法等价。

(1) 系统(A,B,C)总体稳定

(2) 系统(A,B,C) $BIBO$稳定

(3) 系统(A,B,C) $BIBS$稳定

(4) 系统$\dot{x}=Ax$渐近稳定

(5) $\mathrm{Re}\,\lambda(A)<0, \forall\lambda\in(A)$

(6)系统$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$所有极点均具有负实部

五、用李氏稳定性方法进行系统综合

（1） $\dot{x} = Ax + Bu$， 取 $u = kx$ 则有 $\dot{x} = (A + Bk)x = A_c x$

$A_c^T P + P A_c = -Q$ 解出 $P = P^T > 0$ 作出k的函数的P

（2） $\dot{x} = Ax + Bu$， 取 $u = kx$ 则有 $\dot{x} = (A + Bk)x = A_c x$

$Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0$ $\quad J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dx$

$$J=\int_0^\infty x^T(Q+K^TRK)xdx=\int_0^\infty -\frac{d}{dt}x^TPxdt$$

$$=-x^T(\infty)Px(\infty)+x^T(0)(Q+K^TRK)x(0)$$

$$=x^T(0)(Q+K^TRK)x(0)$$

因为 $P=P^T>0$

$$\frac{d}{dt}x^TPx=\dot{x}^TPx+x^TP\dot{x}=x^T(A_c^TP+PA_c)x=-x^T(Q+K^TRK)x$$

$$A_c^TP+PA_c=-(Q+K^TRK)$$

令 $P=P^T>0$，综上相应的k值，解出作为k函数的 $J(K)$