具有饱和状态反馈离散时滞系统的渐近稳定性

陈东彦[1] 司玉琴[1]

摘 要 本文讨论具有饱和状态反馈的离散时滞线性系统的渐近稳定性问题. 给出了在一定假设下, 判断系统全局渐近稳定和局部渐近稳定的充分条件, 并通过数值算例验证了所给出的条件是有效的.

关键词 离散时滞线性系统, 饱和状态反馈, 全局（局部）渐近稳定, 不变吸引椭球体, 饱和函数

中图分类号 TP27

On Asymptotic Stability Problem for Discrete-time Delay Systems with Saturated State Feedback

CHEN Dong-Yan[1] SI Yu-Qin[1]

Abstract This paper investigates the problem of asymptotic stability for discrete-time delay linear systems with saturated state feedback. The sufficient conditions of global asymptotic stability (GAS) and regional asymptotic stability (RAS) for systems are presented. Finally, the effectiveness of the proposed conditions is demonstrated by a numerical example.

Key words discrete-time delay linear systems, saturated state feedback, global (regional) asymptotic stability, invariant attractive ellipsoid, saturated function

在控制系统的综合与设计理论中, 为简化分析, 通常认为控制输入是没有约束的. 然而,对实际工程系统来说, 控制往往属于容许控制集合, 即控制输入需满足一定的约束条件, 执行器饱和限制是一种最常见的控制约束, 但饱和控制律会使闭环系统由全局渐近稳定(GAS)变成局部渐近稳定(RAS), 这种现象引起了许多学者对这一问题的关注. 2002年, Cao Yong-Yan , Lin Zong-Li and David G.Ward[1]对于带有饱和控制器的连续线性系统给出了抗饱和的方法, 找到了使得系统稳定的最大吸引域. 2003年, S.Tarbouriech, J.M.Gomes, Da Silva Jr and G. Garcia[2]对于带有时滞输出和饱和输入的连续线性系统, 通过设计抗饱和增益, 使用Lure Lyapunov-Krasovskii方程及凸优化方法, 从中找到使得系统稳定的最大吸引域. 2005年, Zhao Ke You, WEI Ai-Rong [3]对于带有饱和状态反馈的离散线性系统的渐近稳定性问题给出了一些结论. 2006年, Wang Yong-Qiang, Cao Yong-Yan and Sun You-Xian[4]对于带有控制约束的离散线性系统, 引进新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 设计出一种直接计算抗饱和补偿增益的方法, 从而大大减少了系统稳定性分析的保守性. 2007年, 巫宇霞, 陈东彦[5]将控制输入约束引入到时滞线性系统中, 利用Lyapunov方法给出了具有饱和状态反馈的时滞连续线性系统全局渐近稳定(GAS)和局部渐近稳定(RAS)的充分条件.

收稿日期 2007-11-12 收修改稿日期 2008-01-20
Received November 12, 2007; in revised form January 20, 2008
国家自然科学基金(10771047, 10471031)资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (10771047, 10471031)
1. 哈尔滨理工大学应用数学系 哈尔滨 150080
1. Department of Applied Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.xxxxx

本文针对具有饱和状态反馈的离散时滞线性系统的稳定性问题进行讨论, 研究其全局或局部渐近稳定性, 给出了判断系统全局渐近稳定的充分条件及系统为局部渐近稳定不变吸引椭球的计算方法.

考虑离散时滞线性系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A_0\boldsymbol{x}(k) + A_1\boldsymbol{x}(k-h) + Bu(k) \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{x}_\tau, -h \le \tau \le 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbf{R}^n$是状态向量, $u(k) \in \mathbf{R}$ 是控制变量, $A_0 \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbf{R}^{n\times n}$和$B \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ 皆为已知的常值矩阵, h是时滞常数, 且$u(k)$满足约束条件$u(k) \in \Omega = [-\Delta, \Delta]$, $\Delta > 0$是常值.

假设 1. 设系统(1)的无记忆饱和状态反馈控制律为

$$u(k) = sat_\Delta(F\boldsymbol{x}(k)) = sign(F\boldsymbol{x}(k)) \min\{\Delta, |F\boldsymbol{x}|\} \tag{2}$$

其中, $F \in \mathbf{R}^{1\times n}$为反馈增益矩阵, $F \neq 0$, 且$A_0 + BF$ 是渐近稳定的, 即$A_0 + BF$的所有特征值均在复平面中单位圆的内部.

由假设1知, 对给定的对称正定矩阵P_1, 如下Lyapunov方程(3)必存在对称正定矩阵解P_0

$$(A_0 + BF)^{\mathrm{T}} P_0 (A_0 + BF) - P_0 = -I - 2P_1 \tag{3}$$

用方程(3)的解P_0和任意正数r定义一个开椭球体[3]

$$\Omega(P_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} P_0 \boldsymbol{x} < r\}$$

令

$$L(F) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : |F\boldsymbol{x}| \le \Delta\}$$

显然, 对任意$\boldsymbol{x} \in L(F)$, 有$sat_\Delta(F\boldsymbol{x}) = F\boldsymbol{x}$. 我们称$L(F)$ 为反馈控制的非饱和域, 或饱和反馈控制的线性域[3].

定义1[3]**.** 设从初始状态$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$出发的系统(1)的解记为$\psi(k, \boldsymbol{x}_0)$. 若对任意$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k, \boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{4}$$

则称系统(1)是全局渐近稳定的; 如果(4)式仅对初始状态$\boldsymbol{x}_0$在$\mathbf{R}^n$中的某个有限区域$D \subset \mathbf{R}^n$内时才成立, 则称系统(1)是局部渐近稳定的; 若(4)式对初始状态$\boldsymbol{x}_0$ 在某个椭球体(比如$\Omega(P_0, r)$) 内时成立, 则称该椭球体为系统(1)的吸引椭球体.

定义2[3]**.** 若对任意$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega(P_0, r)$ 和任意$k > 0$, 有$\psi(k, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega(P_0, r)$, 则称$\Omega(P_0, r)$是系统(1)的不变椭球体. 若$\Omega(P_0, r)$ 既是吸引的又是不变的,则称其为不变吸引椭球.

问题: 在假设1下, 如何判断系统(1)的饱和反馈闭环系统的稳定性? 在系统(1) 是局部渐近稳定情况下, 如何计算其不变吸引椭球体?

1 主要结果

定义饱和水平函数[3] $\mu(\cdot) : R^n \to [0, 1)$

$$\mu(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} \in L(F) \\ 1 - \dfrac{\Delta}{|F\boldsymbol{x}|}, & \boldsymbol{x} \notin L(F) \end{cases} \tag{5}$$

在不引起混淆的情况下用μ简记$\mu(\cdot)$. 从(5)式可以看到, 对所有的$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, 有

$$sat_{\Delta}(F\boldsymbol{x})=(1-\mu)F\boldsymbol{x}$$

于是系统(1)在控制律(2)作用下的闭环系统为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=[A+(1-\mu)BF]\boldsymbol{x}(k)+A_1\boldsymbol{x}(k-h) \quad (6)$$

由文[3]中的相关说明, 对任意正数r和方程(3)式的矩阵解P_0, 有

$$\sup\{|F\boldsymbol{x}|:\boldsymbol{x}\in\Omega(P_0,r)\}=\sqrt{r\cdot FP_0^{-1}F^{\rm T}}$$

且上确界在$\boldsymbol{x}_0\in\Omega(P_0,r)$的边界点可达.于是

$$\begin{aligned}\mu^+ &= \sup\{\mu(\boldsymbol{x}):\boldsymbol{x}\in\Omega(P_0,r)\}\\ &= \begin{cases}0 & \Omega(P_0,r)\subset L(F)\\ 1-\dfrac{\Delta}{\sqrt{r\cdot FP_0^{-1}F^{\rm T}}} & \Omega(P_0,r)\not\subset L(F)\end{cases}\end{aligned}$$

反之, 若$\mu^+\in[0,1)$是预先已知的, 则

$$r=\frac{\Delta^2}{(FP_0^{-1}F^{\rm T})(1-\mu^+)^2} \quad (7)$$

用正数r和方程(3)式的解P_0可以唯一地确定椭球体$\Omega(P_0,r)$.

引理1[3]**.** 1)若$\mu^+=0$, 则$\Omega(P_0,r)\subset L(F)$, 并对任意$\boldsymbol{x}\in\Omega(P_0,r)$都有$\mu(\boldsymbol{x})\equiv 0$; 2)若$\mu^+>0$, 则$\Omega(P_0,r)\not\subset L(F)$, 并对任意$\boldsymbol{x}\in\Omega(P_0,r)$都有$\mu(\boldsymbol{x})<\mu^+$.

如何确定μ^+是十分重要的. 为此, 令

$$\mu^+:=\sup\{\mu\in[0,1):I+\mu E_1>0, I+\mu E_2>0\} \quad (8)$$

其中

$$E_1:=\begin{bmatrix}0 & P_0^{1/2}BF\\ F^{\rm T}B^{\rm T}P_0^{1/2} & G_1+G_1^{\rm T}\end{bmatrix} \quad (9a)$$

$$G_1=F^{\rm T}B^{\rm T}P_0(A_0+BF) \quad (9b)$$

$$E_2:=\begin{bmatrix}0 & P^{1/2}BF\\ F^{\rm T}B^{\rm T}P^{1/2} & G_2+G_2^{\rm T}\end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$G_2=F^{\rm T}B^{\rm T}P(A_0+BF) \quad (10b)$$

$$P=P_0A_1A_1^{\rm T}P_0$$

从(8)式很容易得到μ^+(见本页面底端的(11)式), 并且, 对任意$\mu\in[0,\mu^+)$, 有$I+\mu E_1>0$且$I+\mu E_2>0$.

综合文[2]中引理2, 可以不加证明地给出本文的引理2.

引理2. 1) 对于某个$\nu\in R$

$$I+\nu(G_1+G_1^{\rm T})-\nu^2F^{\rm T}B^{\rm T}P_0BF>0$$

成立当且仅当对同一个ν, 有$I+\nu E_1>0$. 其中, G_1和E_1由式(9)定义. 2) 对于某个$\nu\in R$

$$I+\nu(G_2+G_2^{\rm T})-\nu^2F^{\rm T}B^{\rm T}PBF>0$$

成立当且仅当对同一个ν, 有$I+\nu E_2>0$. 其中, G_2和E_2由式(10)定义.

引理3[6]**.** 设M_1, M_2, M_3是适当维数的矩阵, $\begin{bmatrix}M_1 & M_2^{\rm T}\\ M_2 & M_3\end{bmatrix}<0$当且仅当存在小参数$\delta_1>0$, $\delta_2>0$, 使得$\begin{cases}M_1+\delta_1 I<0\\ M_3+\delta_2 I<0\\ M_2^{\rm T}M_2<\delta_1\delta_2 I\end{cases}$ 成立.

下面给出本文的主要结果.

定理1. 设系统(1)满足假设1, 若存在$\delta_1>0,\delta_2>0$, 使得下面的线性矩阵不等式组(LMIs)成立

$$\begin{bmatrix}P_1-\delta_2 I & A_1^{\rm T}P_0\\ P_0A_1 & P_0\end{bmatrix}>0 \quad (12a)$$

$$\begin{bmatrix}\delta_1\delta_2 I & P_0A_1\\ A_1^{\rm T}P_0 & I\end{bmatrix}>0 \quad (12b)$$

$$-P_1+\delta_1 I<0 \quad (12c)$$

$$(A_0+BF)^{\rm T}P_0A_1A_1^{\rm T}P_0(A_0+BF)-P_0A_1A_1^{\rm T}P_0<-I \quad (12d)$$

则当$\lambda_{\min}(E_1)\geq -1$, $\lambda_{\min}(E_2)\geq -1$时, 闭环系统(6)是全局渐近稳定的; 否则, 闭环系统(6)是局部渐近稳定的, 且$\Omega(P_0,r)$是闭环系统(6)的不变吸引椭球体.

证明.

考虑闭环系统(6), 选取Lyapunov函数

$$V(\boldsymbol{x}(k))=\boldsymbol{x}^{\rm T}(k)P_0\boldsymbol{x}(k)+\sum_{s=k-h}^{k-1}\boldsymbol{x}^{\rm T}(s)P_1\boldsymbol{x}(s)$$

其中, P_0, P_1满足Lyapunov方程(3). 沿着闭环系统(6)式, $V(\boldsymbol{x}(k))$的全差分为

$$\begin{aligned}\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) &= V(\boldsymbol{x}(k+1))-V(\boldsymbol{x}(k))\\ &= \boldsymbol{x}^{\rm T}(k+1)P_0\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}^{\rm T}(k)P_0\boldsymbol{x}(k)\\ &+ \boldsymbol{x}^{\rm T}(k)P_1\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}^{\rm T}(k-h)P_1\boldsymbol{x}(k-h)\\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\ \boldsymbol{x}(k-h)\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}W_1 & W_2\\ W_2^{\rm T} & W_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(k)\\ \boldsymbol{x}(k-h)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中, $W_1=[A_0+(1-\mu)BF]^{\rm T}P_0[A_0+(1-\mu)BF]-P_0+P_1$, $W_2=[A_0+(1-\mu)BF]^{\rm T}P_0A_1$, $W_3=A_1^{\rm T}P_0A_1-P_1$.

$$\mu^+=\begin{cases}1, & \text{当}\lambda_{\min}(E_1)\geq -1,\lambda_{\min}(E_2)\geq -1\\ -\dfrac{1}{\lambda_{\min}(E_2)}, & \text{当}\lambda_{\min}(E_1)\geq -1,\lambda_{\min}(E_2)< -1\\ -\dfrac{1}{\lambda_{\min}(E_1)}, & \text{当}\lambda_{\min}(E_1)< -1,\lambda_{\min}(E_2)\geq -1\\ -\dfrac{1}{\max\{\lambda_{\min}(E_1),\lambda_{\min}(E_2)\}}, & \text{当}\lambda_{\min}(E_1)< -1,\lambda_{\min}(E_2)< -1\end{cases} \quad (11)$$

根据引理3, $\begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^{\mathrm{T}} & W_3 \end{bmatrix} < 0$成立当且仅当存在小参数$\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, 使得

$$\left\{ \begin{array}{l} W_1 + \delta_1 I < 0 \\ W_3 + \delta_2 I < 0 \\ W_2 W_2^{\mathrm{T}} < \delta_1 \delta_2 I \end{array} \right. \tag{13}$$

即

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi^{\mathrm{T}} P_0 \Xi - P_0 + P_1 + \delta_1 I < 0 \\ A_1^{\mathrm{T}} P_0 A_1 - P_1 + \delta_2 I < 0 \\ \Xi^{\mathrm{T}} P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 \Xi < \delta_1 \delta_2 I \end{array} \right. \tag{14a, b, c}$$

其中, $\Xi = [A_0 + (1-\mu)BF]$.

把(3)式代入(14a)和(14c)式,并整理得

$$-I - \mu(G_1 + G_1^{\mathrm{T}}) + \mu^2 F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 BF - P_1 + \delta_1 I < 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &(A_0 + BF)^{\mathrm{T}} P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 (A_0 + BF) - \mu(G_2 + G_2^{\mathrm{T}}) \\ &\quad + \mu^2 F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 BF < \delta_1 \delta_2 I \end{aligned} \tag{16}$$

下面分情况讨论.

a) 当$\lambda_{\min}(E_1) \geq -1$, $\lambda_{\min}(E_2) \geq -1$时, 对任意$\mu \in [0,1)$, 有$1 + \mu\lambda_{\min}(E_1) > 0$, $1 + \mu\lambda_{\min}(E_2) > 0$. 进而对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \mathbf{R}^n$, 有$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_1 > 0$, $I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_2 > 0$. 于是由引理2知, 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \mathrm{R}^n$, 有

$$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))(G_1 + G_1^{\mathrm{T}}) - \mu^2(\boldsymbol{x}(k)) F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 BF > 0 \tag{17}$$

$$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))(G_2 + G_2^{\mathrm{T}}) - \mu^2(\boldsymbol{x}(k)) F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} PBF > 0 \tag{18}$$

由定理中条件(12b)和(12c)知, 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \mathrm{R}^n$, 有

$$-I - \mu(\boldsymbol{x}(k))(G_1 + G_1^{\mathrm{T}}) + \mu^2(\boldsymbol{x}(k)) F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 BF - P_1 + \delta_1 I < -P_1 + \delta_1 I < 0$$

即(15)式成立.还有

$$(A_0 + BF)^{\mathrm{T}} P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 (A_0 + BF) - \mu(\boldsymbol{x}(k))(G_2 + G_2^{\mathrm{T}}) + \mu^2(\boldsymbol{x}(k)) F^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 BF < P_0 A_1 A_1^{\mathrm{T}} P_0 < \delta_1 \delta_2 I$$

即(16)式成立. 而条件(12a)式保证(14b)式成立. 所以对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \mathrm{R}^n$, 有$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) < 0$, 即闭环系统(6)是全局渐近稳定的.

b) 当E_1, E_2的最小特征值不同时大于等于-1时, 再分三种情况讨论.

1) $\lambda_{\min}(E_1) < -1$, $\lambda_{\min}(E_2) < -1$, 此时$\mu^+ = -\dfrac{1}{\min\{\lambda_{\min}(E_1), \lambda_{\min}(E_2)\}}$. 不妨设$\mu^+ = -\dfrac{1}{\lambda_{\min}(E_1)} < 1$, 那么$1 + \mu^+\lambda_{\min}(E_1) > 0$, $I + \mu^+ E_1 > 0$, 也有$1 + \mu^+\lambda_{\min}(E_2) > 0$, $I + \mu^+ E_2 > 0$. 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \Omega(P_0, r)$, 有$\mu(\boldsymbol{x}(k)) < \mu^+$, 即$\mu^+ < -\dfrac{1}{\min\{\lambda_{\min}(E_1), \lambda_{\min}(E_2)\}}$. 因此, 对任意$\mu \in [0, \mu^+)$, 有$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_1 > 0$和$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_2 > 0$.

2) $\lambda_{\min}(E_1) \geq -1$, $\lambda_{\min}(E_2) < -1$. 由$\mu^+ = -\dfrac{1}{\lambda_{\min}(E_2)} < 1$, 有$1 + \mu^+\lambda_{\min}(E_2) > 0$, 因此$I + \mu^+ E_2 > 0$, 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \Omega(P_0, r)$, $I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_2 > 0$. 再由$\lambda_{\min}(E_1) \geq -1$, $1 + \mu^+\lambda_{\min}(E_1) > 0$, $I + \mu^+ E_1 > 0$, 因此对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \Omega(P_0, r)$, 也有$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_1 > 0$.

3) $\lambda_{\min}(E_1) < -1$, $\lambda_{\min}(E_2) \geq -1$. 证明过程与2) 类似, 略去.

综合1)、2)、3)得, 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \Omega(P_0, r)$, 有$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_1 > 0$和$I + \mu(\boldsymbol{x}(k))E_2 > 0$. 对任意$\boldsymbol{x}(k) \in \Omega(P_0, r)$, 有$\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) < 0$, 故饱和系统是局部渐近稳定的, 同时$\Omega(P_0, r)$是不变吸引椭球体. □

2 判别算法和数值算例

判别算法:

i) 选择$F \neq 0$使得$A_0 + BF$是渐近稳定的;

ii) 对于给定的对称正定矩阵P_1, 解Lyapunov方程(3), 求得其对称正定矩阵解P_0;

iii) 验证不等式(12d)是否成立, 若成立转到iv), 否则转到ii);

iv) 寻找$\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, 使得LMIs(12a)(12b)(12c)成立;

v) 计算矩阵G_1, G_2, E_1, E_2及最小特征值$\lambda_{\min}(E_1)$和$\lambda_{\min}(E_2)$;

vi) 判断:当$\lambda_{\min}(E_1) \geq -1$, $\lambda_{\min}(E_2) \geq -1$ 时, 系统(1)是全局渐近稳定的, 否则系统(1)是局部渐近稳定的, 并转到vii);

vii) 计算μ^+, r及不变椭球体$\Omega(P_0, r)$.

数值算例:

考虑离散时滞线性系统(1), 其中的矩阵参数为$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5876 & -0.4555 \\ 0.5555 & 1.5542 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -0.1124 \\ 0.5555 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}$, $\Delta = 3$.

i) 选择$F = \begin{bmatrix} 0.7651 & -2.0299 \end{bmatrix}$使$A_0 + BF$渐近稳定.

ii) 给定矩阵$P_1 = \begin{bmatrix} 5.0127 & -0.6475 \\ -0.6475 & 4.2135 \end{bmatrix}$, 解Lyapunov方程(3), 得$P_0 = \begin{bmatrix} 19.1177 & -4.6510 \\ -4.6510 & 13.8348 \end{bmatrix}$.

iii) 经验证(12d)式成立.

iv) 存在$\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 3.6$, 使得定理1中的LMIs(12a)(12b)(12c)均成立.

v) 计算E_1, E_2及最小特征值$\lambda_{\min}(E_1)$和$\lambda_{\min}(E_2)$

$$\text{得}E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.6195 & 1.6437 \\ 0 & 0 & -1.6114 & -4.2752 \\ 0.6195 & -1.6114 & 3.2390 & 0.7946 \\ 1.6437 & -4.2752 & 0.7946 & -18.5831 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5431 & 1.4410 \\ 0 & 0 & -0.9420 & -2.4992 \\ 0.5431 & -0.9420 & 2.3745 & 1.6509 \\ 1.4410 & -2.4992 & 1.6509 & -7.9542 \end{bmatrix}$$

及$\lambda_{\min}(E_1) = -19.6571 < -1$, $\lambda_{\min}(E_2) = -9.02169 < -1$

vi) 由定理1知此系统是局部渐近稳定的.

vii) 算得$\mu^+ = 0.0509$, $r = 19.4326$, 因此系统的不变吸引椭球体是$\Omega(P_0, r) = \{\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2 : 19.1177\boldsymbol{x}_1^2 - 9.302\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + 13.8348\boldsymbol{x}_2^2 < 19.4326\}$

3 结论

本文对一类具有饱和控制的离散时滞线性系统的稳定性进行了分析. 首先, 将饱和状态反馈描述成线性状态反馈形式, 并利用饱和函数上确界刻画椭球体与非饱和域的关系; 然后, 在一定的假设下, 给出了判断系统全局渐近稳定和局部渐近稳定的充分条件, 该条件由一组线性矩阵不等式(LMI)和矩阵的最小特征值描述, 并依据所得充分条件设计了相应的判断算法; 最后用数值算例验证了所得条件的可行性. 然而, 本文仅对控制变量是一维的情况进行分析, 当控制变量是多维时还没有讨论, 这是今后要进行深入考虑的.

References

1 Cao Yong-Yan, Lin Zong-Li, David G.Ward. An antiwindup approach enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2002, **47**(1): 140−145

2 S.Tarbouriech, J.M.Gomes, Da Silva Jr, G. Garcia. Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2004, **14**: 665−682

3 ZHAO Ke-You, WEI Ai-Rong. On asymptotic stabilization of linear discrete-time systems with saturated state feedback. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(3): 301−304

4 Wang Yong-Qiang, Cao Yong-Yan, Sun You-Xian. Anti-windup compensator gain design for time-delay systems. *Acta Automatica Sinica*, 2006, **32**(1): 1−8

5 Wu Yu-Xia, Chen Dong-Yan, Zhang Jun-an. On asymptotic stability of continuous linear system with control constrain. *Harbin University of Science and Technology*, 2007, **12**(4): 113−116
(巫宇霞, 陈东彦, 张军安. 具有控制约束的连续线性系统的渐近稳定性. 哈尔滨理工大学学报，2007, **12**(4): 113−116)

6 Li Yan, Wang JianLiang and Yang GuangHong. Sub-optimal linear quadratic control for singularly perturbed systems. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control Orlando, Florida, USA, 2001. 3698−3703

陈东彦 哈尔滨理工大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为时滞系统鲁棒控制, 系统分析与优化.
E-mail: dychen_2004@yahoo.com.cn
(**CHEN Dong-Yan** Ph. D and professor at Harbin University of Science and Technology. Her research interest covers robust control of time-delay systems, analysis and optimization of systems.)

司玉琴 哈尔滨理工大学硕士研究生. 主要研究方向为时滞系统鲁棒控制. E-mail: syq-04190911@163.com
(**SI Yu-Qin** Master candidate at Harbin University of Science and Technology. Her research interest covers robust control of time-delay systems.)