第23卷 第2期
1997年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 2
March, 1997

问题讨论

"伯德图中奈奎斯特稳定判据"的最新表达式

潘仲明
(国防科技大学机械电子工程与仪器系 长沙 410073)

关键词 伯德图,奈奎斯特,稳定判据.

1 Bode 图中 Nyquist 稳定判据

设反馈控制系统中的前向和反向传递函数分别为 $G(s)$和 $H(s)$,且无零、极点对消,系统的开环传递函数可表示为

$$G(s)H(s)=\frac{k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^v\prod_{j=1}^{n-v}(s+p_j)},\quad (n\geqslant m), \tag{1}$$

式中 k 为开环传递函数的前置系数,v 为开环传递函数中积分环节的个数,z_i,p_j分别为开环传递函数的零、极点.

根据 Nyquist 稳定判据:闭环系统渐近稳定的充要条件是 $G(j\omega)H(j\omega)$对临界点$(-1,j0)$的连续相角增量(逆时针方向为正)$\Delta\Phi_S$ 为

$$\Delta\Phi_s=p\pi+\nu\pi/2, \tag{2}$$

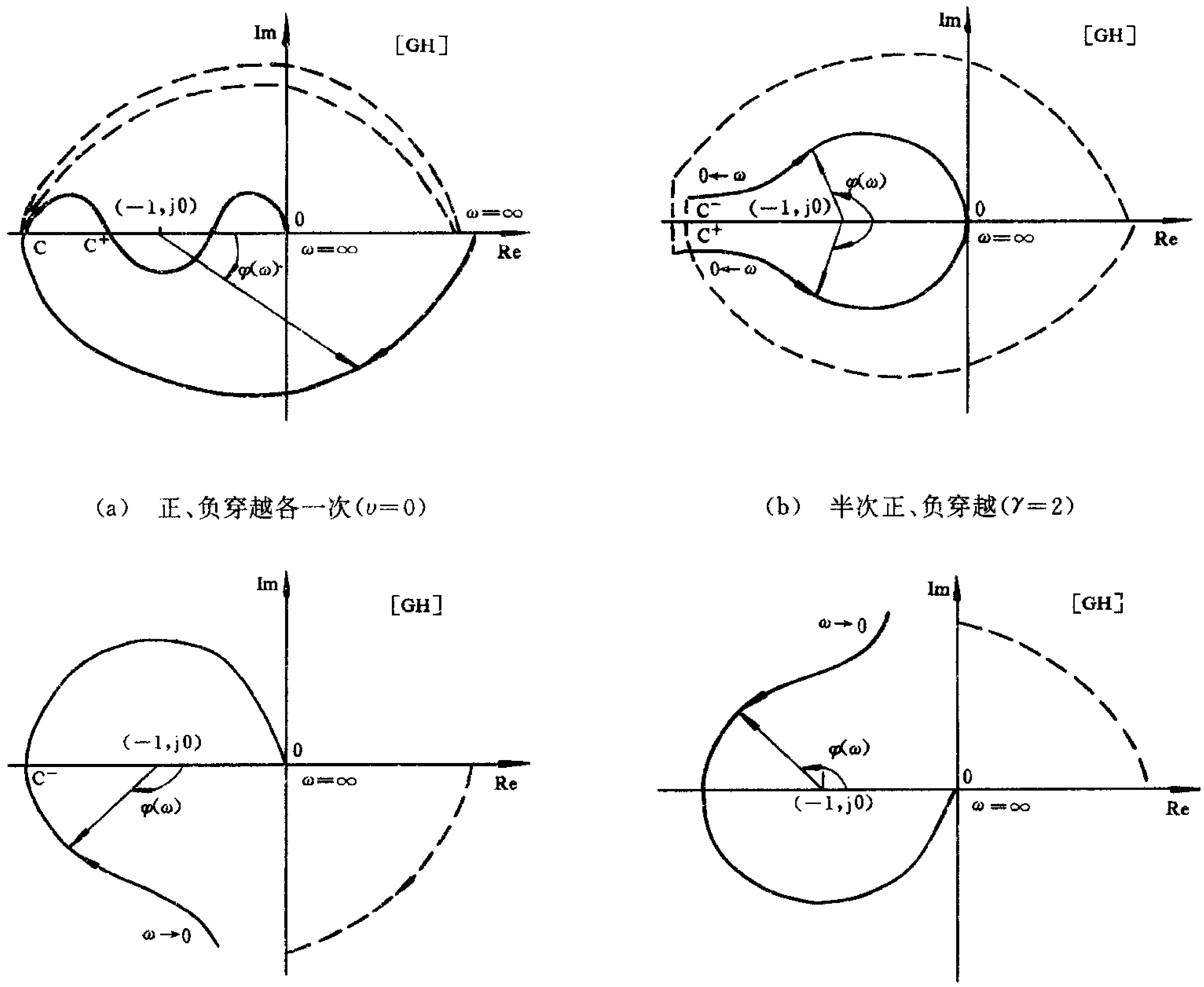
式中
$$\Delta\Phi_s=\operatorname*{Lim}_{\omega\to\infty}\Phi(\omega)-\operatorname*{Lim}_{\omega\to 0}\Phi(\omega),$$

p 为 $G(s)H(s)$在右半 s 平面的极点数,ν 为 $G(s)H(s)$ 中积分环节的个数($\nu\leqslant 3$).

在 Nyquist 图中,沿 ω 的增加方向,Nyquist 曲线自上而下(相位增加)穿过临界点$(-1,j0)$左边的负实轴,称为正穿越;反之,Nyquist 曲线自下而上(相位减少)穿过临界点左边的负实轴,称为负穿越.此外,沿 ω 的增加方向,Nyquist 曲线自临界点左侧的负实轴开始向下(或向上)变化,分别称之为半次正(或负)穿越.如图1所示.现将用正、负穿越概念表达的 Nyquist 稳定判据直接转化为其 Bode 图中的表达形式.

借助于图1(a)的虚线可以看出,当 ω 从0增加到$+\infty$时,正穿越一次对应于 Nyquist 曲线对临界点的连续相角增量 $\Delta\Phi_S$ 为 2π;反之,负穿越一次所对应的连续相角增量 $\Delta\Phi_S$ 为-2π.当 ω 从0 增加到$+\infty$ 时,半次正、负穿越所对应的 $\Delta\Phi_S$ 分别为$\pm\pi$(见图1(b)).

收稿日期:1994-11-29



(a)　正、负穿越各一次($\nu=0$)

(b)　半次正、负穿越($\gamma=2$)

(c)　起始于负虚轴方向($\nu=1,3$)

(d)　起始于正虚轴方向($\nu=1,3$)

图1　Nyquist 曲线正、负穿越数及其极点与相角 $\Phi(\omega)$的关系

由 Nyquist 曲线走向可以看出,$\Delta\Phi_S$ 直接取决于正、负穿越次数的差值. 对于0型系统($\nu=0$)和 Ⅱ 型系统($\nu=2$)来说,Nyquist 曲线对临界点的连续相角增量 $\Delta\Phi_S$ 均可以表示为

$$\Delta\Phi = 2\pi(C^+ - C^-),\quad (\nu = 0,2). \tag{3}$$

对于 Ⅰ 型系统($\nu=1$)及 Ⅲ 型系统($\nu=3$),当 Nyquist 曲线在 $\omega=0$ 时起始于负虚轴方向,式(4)还要增加一个 $\pi/2$(见图1(c));反之若 Nyquist 曲线在 $\omega=0$时起始于正实轴方向,式(3)还要减去一个 $\pi/2$(见图1(d)),即

$$\Delta\Phi_S = \begin{cases} 2\pi(C^+ - C^-) + \pi/2, & \Phi(0) > -\pi, \\ 2\pi(C^+ - C^-) - \pi/2, & \Phi(0) < -\pi, \end{cases} \quad (\nu = 1,3). \tag{4}$$

Nyquist 曲线在临界点左侧的负实轴上的穿越点处的对数幅值 $L(\omega)$始终为正,而 GH 平面上的负实轴相当于 Bode 图上的$-180°$线,所以,Nyquist 曲线上的正、负穿越数,完全对应于前面所述的 Bode 图中的正、负穿越数. 考虑了上述各种情况及开环系统的 Nyquist 曲线起始点与开环系统增益的正、负号的关系后,将式(3),(4)代入式(2),并用 Bode 图中的正、负穿越次数之差 N 来表示 $\Delta\Phi_S$. 由此可导出适合于 Bode 图中的 Nyquist 稳定判据:开环传递函数 $G(s)H(s)$有 p 个极点在右半 s 平面,在 $s=0$处至多可能有三阶

极点($\nu \leqslant 3$)，如果在其对数幅频特性曲线 $L(\omega)$ 为正值的频率范围内，相频特性曲线 $\Phi(\omega)$ 对 $-180°$ 线的正、负穿越次数分别记为 C^+ 和 C^- 次，那么闭环系统渐近稳定的充要条件是正、负穿越次数的差 N 应满足式

$$N = C^+ - C^- = \begin{cases} p/2, & \nu = 0,1, \\ (p+1)/2, & \nu = 2, \\ (p+2)/2, & \nu = 3, \end{cases} \quad (K_\nu > 0), \tag{5a}$$

或者

$$N = C^+ - C^- = \begin{cases} p/2, & \nu = 0 \\ (p+1)/2, & \nu = 1,2,3 \end{cases} \quad (K_\nu < 0), \tag{5b}$$

式中
$$K_\nu = \lim_{s\to\infty} s^\nu G(s)H(s).$$

以上两式还可以推广至高型系统，但因为 III 型以上的系统很难稳定，因此，对于这些情况在此不做深入探讨.

2 结论

以上分析表明，不少国内出版的教科书所叙述的“Bode 图稳定判据”仅在特定情况下($\nu=0,1,K_1>0$)是正确的，而对于其它情况均不成立. 因此，必须借助于 Nyquist 曲线来判定一般系统的稳定性. 根据式(5)，只需画出开环传递函数的 Bode 图，就可以判定经典控制理论领域中可能出现的一切实际系统的稳定及相对稳定性.

THE NEWEST FORM FOR NYQUIST STABILITY CRITERION BODE DIAGRAM

PAN ZHONGMING
(*Department of Mechtronics Engineering* & *Instruments. Naltional University of Defense Technology*, *Changsha* 410073)

Key words Bode, Nyquist, Stability criterion.