



H^∞ 状态反馈控制及其最优解的探讨¹⁾

杨富文

(福州大学电气工程系,福州350002)

涂健

(华中理工大学自控系,武汉430074)

摘 要

本文研究了状态完全可得时 H^∞ 状态反馈控制问题,给出了基于一个代数 Riccati 方程的 H^∞ 状态反馈控制问题的次优解,并对一种特殊情况提出了求最优解的解析方法。

关键词: H^∞ 状态反馈,代数 Riccati 方程,最优解。

一、引 言

目前, H^∞ 状态反馈控制问题的研究已取得一些进展^[1,2]。但所得的结果尚有一定局限性,所考虑的系统是一些特殊情况下的。对于一般情况下 H^∞ 状态反馈控制问题,只能给出一种基于不等式代数 Riccati 方程解法^[3]。本文对于一般情况 H^∞ 状态反馈控制问题给出了基于一个等式代数 Riccati 方程解法,且反馈阵的结构仍保持和 LQ 最优设计相同的形式。在以上研究基础上,本文还探讨 H^∞ 状态反馈控制问题的最优解,并对一种特殊情况提出求最优解的解析方法。

二、 H^∞ 状态反馈控制

考虑状态完全可得的线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{w}(t) + B_2\mathbf{u}(t), \quad (1a)$$

$$\mathbf{z}(t) = C_1\mathbf{x}(t) + D_{11}\mathbf{w}(t) + D_{12}\mathbf{u}(t), \quad (1b)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t), \quad (1c)$$

其中 $\mathbf{w}(t) \in R^{m_1}$ 是干扰输入向量; $\mathbf{u}(t) \in R^{m_2}$ 是控制输入向量; $\mathbf{z}(t) \in R^{p_1}$ 是误差向量; $\mathbf{y}(t) \in R^{p_2}$ 是可测向量; $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 是状态向量。

对于系统(1)采用状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = F_\infty\mathbf{x}(t)$, 则闭环系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_{F_\infty}\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{z}(t) = C_{1F_\infty}\mathbf{x}(t) + D_{11}\mathbf{w}(t),$$

式中 $A_{F_\infty} = A + B_2F_\infty$, $C_{1F_\infty} = C_1 + D_{12}F_\infty$ 。

本文于 1991 年 9 月 18 日收到。

1) 国家自然科学基金和福建省自然科学基金资助项目。

定义 1. $\nu_0 = \inf\{\|C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty})^{-1}B_1 + D_{11}\|_\infty : F_\infty \in R^{m_2 \times n}, R_e \lambda(A_{F_\infty}) < 0\}$.

定理 1. 令 $\nu > \nu_0$, 且 $\nu^2 I - D_{11}^T D_{11} > 0$. 假定 (A, B_2) 可稳, 则闭环矩阵 A_{F_∞} 稳定, 且

$$\|C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty})^{-1}B_1 + D_{11}\|_\infty < \nu$$

的充要条件是存在一个非负定阵 $X_\infty \geq 0$ 和实矩阵 F_∞ 满足下列代数 Riccati 方程:

$$A_{F_\infty}^T X_\infty + X_\infty A_{F_\infty} + (X_\infty B_1 + C_{1F_\infty}^T D_{11})(\nu^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1}(X_\infty B_1 + C_{1F_\infty}^T D_{11})^T + C_{1F_\infty}^T C_{1F_\infty} = 0, \quad (2)$$

而且状态反馈由 $u(t) = F_\infty x(t)$ 给出, 其中 $F_\infty = -B_2^T X_\infty$.

证明. 见脚注 1).

三、 H^∞ 状态反馈最优解的探讨

上节研究了 H^∞ 状态反馈存在的充要条件以及次优解的求法. 若要求最优值 ν_0 必须通过迭代才能获得. 但对于某些特殊情况, 可以用解析方法求取最优值 ν_0 及其对应状态反馈.

假设

$$1) D_{11} = 0, \quad 2) \text{rank}[I \otimes D_{12} c_1 C_1] = \text{rank}[I \otimes D_{12}]. \quad (3a), (3b)$$

其中 \otimes 为 Kronecker 积, $c_1 C_1$ 为 C_1 矩阵的列展开, rank 为矩阵的秩. 那么当 $D_{11} = 0$ 时, 式(2)可简写为

$$A_{F_\infty}^T X_\infty + X_\infty A_{F_\infty} + \frac{1}{\nu^2} X_\infty B_1 B_1^T X_\infty + C_{1F_\infty}^T C_{1F_\infty} = 0. \quad (4)$$

实际上, 上节中 F_∞ 是任意的. 不失一般性, 假定

$$F_\infty = F_0 - B_2^T X_\infty, \quad (5)$$

若假设式 (3b) 成立, 则存在一个 F_0 使得 $C_1 + D_{12} F_0 = 0$, 利用式 (5), 那么式(4)可重写为

$$(A + B_2 F_0)^T X_\infty + X_\infty (A + B_2 F_0) + \frac{1}{\nu^2} X_\infty B_1 B_1^T X_\infty - X_\infty B_2 (2I - D_{12}^T D_{12}) B_2^T X_\infty = 0. \quad (6)$$

为了求上述特殊情况的最优值 ν_0 , 引入如下两个引理:

引理 1. 假定 $P > 0$, $Q \geq 0$, 若 $\nu^2 P - Q \geq 0$, 则 $\nu^2 \geq \lambda_{\max}(P^{-1}Q)$. 证明略.

引理 2^[4]. 若代数 Riccati 方程 $A^T X + XA - XBB^T X = 0$ 有使 $A - BB^T X$ 稳定的解存在, 则 X 的秩等于 A 的不稳定特征值个数, 同时存在一个正交阵 $U = [U_1 U_2]$,

使得 $U^T X U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$, $U^T A U = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $X_2 > 0$.

定理 2. 假定式 (3a) 和 (3b) 成立, 且 $2I - D_{12}^T D_{12} > 0$, 则

(1) 若 $A + B_2 F_0$ 稳定, 则最优值 $\nu_0 = 0$.

1) 杨富文, H^∞ 优化设计理论及应用研究(第七章), 华中理工大学博士论文, 1990 年.

(2) 若 $A + B_2F_0$ 完全不稳定, 则最优值 $\nu_0 = [\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$, 其中 P, Q 满足下列 Lyapunov 方程:

$$(A + B_2F_0)P + P(A + B_2F_0)^T = B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T, \quad (7)$$

$$(A + B_2F_0)Q + Q(A + B_2F_0)^T = B_1B_1^T. \quad (8)$$

(3) 若 $A + B_2F_0$ 部分稳定, 则最优值 $\nu_0 = [\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$, 其中 P, Q 满足下列 Lyapunov 方程:

$$A_{22}P + PA_{22}^T = U_2^T B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T U_2, \quad (9)$$

$$A_{22}Q + QA_{22}^T = U_2^T B_1B_1^T U_2, \quad (10)$$

$$U^T(A + B_2F_0)U = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

式中 $U = [U_1 U_2]$ 为正交阵, 它使 $(A + B_2F_0)$ 经正交变换后 A_{11} 完全稳定, A_{22} 完全不稳定.

证明. (1)和(2)的证明略, 下面证明(3). 由引理 2 可知, $(A + B_2F_0)$ 的不稳定特征值个数等于式(6)中 X_∞ 的秩, 且存在一个正交阵 $U = [U_1 U_2]$ 使得 $U^T X_\infty U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$,

$U^T(A + B_2F_0)U = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$. 对式(6)左乘 U^T 、右乘 U 得

$$\begin{aligned} & U^T(A + B_2F_0)^T U U^T X_\infty U + U^T X_\infty U U^T (A + B_2F_0)U \\ & + \frac{1}{\nu^2} U^T X_\infty U U^T B_1 B_1^T U U^T X_\infty U - U^T X_\infty U U^T B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T U U^T X_\infty U \\ & = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

因此有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{\nu^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} B_1 B_1^T [U_1 U_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T [U_1 U_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)展开则得

$$A_{22}^T X_2 + X_2 A_{22} + \frac{1}{\nu^2} X_2 U_2^T B_1 B_1^T U_2 X_2 - X_2 U_2^T B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T U_2 X_2 = 0. \quad (14)$$

由引理 2 有 $X_2 > 0$, 令 $X_1 = X_2^{-1}$, 则式(4)可写为

$$A_{22}X_1 + X_1 A_{22}^T + \frac{1}{\nu^2} U_2^T B_1 B_1^T U_2 - U_2^T B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T U_2 = 0. \quad (15)$$

定义矩阵 P, Q 满足下列方程:

$$A_{22}P + PA_{22}^T = U_2^T B_2(2I - D_{12}^T D_{12})B_2^T U_2, \quad (16)$$

$$A_{22}Q + QA_{22}^T = U_2^T B_1 B_1^T U_2. \quad (17)$$

综合式(15), (16)和(17)有 $X_1 = P - \frac{1}{\nu^2} Q$. 因 $X_1 > 0$, 故 $\nu^2 P - Q > 0$. 因此对于 $A + B_2F_0$ 部分稳定时, 闭环矩阵 A_{F_∞} 稳定, 且 $\|C_{1F_\infty}(sI - A_{F_\infty})^{-1}B_1\|_\infty < \nu$ 的充要条

件是 $\nu^2 P - Q > 0$ 。另外,根据最优值的定义以及引理 1,有

$$\nu_0 = [\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}.$$

上面给出了 $D_{11} = 0$ 和 $\text{rank}[I \otimes D_{12} c s C_1] = \text{rank}[I \otimes D_{12}]$ 情况下最优值 ν_0 的求解方法。有了最优值 ν_0 , 可以直接给出状态反馈的最优解, 下面同样分三种情况讨论:

1) $A + B_2 F_0$ 稳定, 则 $X_{\infty}^* = 0$, 因此最优反馈阵为 $F_{\infty}^* = F_0$ 。

2) $A + B_2 F_0$ 完全不稳定, 则 $X_{\infty}^* = \left(P - \frac{1}{\nu_0^2} Q\right)^{-1}$, 其中 P, Q 由式 (7), (8) 给出, 因此最优反馈阵为 $F_{\infty}^* = F_0 - B_2^T X_{\infty}^*$ 。

3) $A + B_2 F_0$ 部分稳定, 则 $X_{\infty}^* = U_2 \left(P - \frac{1}{\nu_0^2} Q\right)^{-1} U_2^T$, 其中 P, Q 由式 (9), (10) 给出, 因此最优反馈阵为 $F_{\infty}^* = F_0 - B_2^T X_{\infty}^*$ 。

其中, 表达式 X_{∞}^* 需要求逆。因 $\nu_0 = [\lambda_{\max}(P^{-1}Q)]^{\frac{1}{2}}$, 故 $\left(P - \frac{1}{\nu_0^2} Q\right)$ 的逆不存在。

因此在实际计算时选取 $\nu_1 > \nu_0$ 来代替上述表达式中的 ν_0 , 从而求出趋于最优的次优状态反馈阵。

四、设计举例

设系统(1)中的各矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = 0, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

通过求解可得最优值 $\nu_0 = 1.759676$ 。取 $\nu_1 = \nu_0 + 0.01 = 1.769676$, 对应反馈阵为

$$F_{\infty}^* = \begin{bmatrix} 90.64225 & 73.720321 & -174.3812 \\ -97.15875 & -83.61899 & 169.8789 \end{bmatrix},$$

整个系统闭环极点为

$$\lambda_1 = -1.147617, \quad \lambda_2 = -6.737422, \quad \lambda_3 = -152.4728.$$

参 考 文 献

- [1] Petersen, I. R., Disturbance Attenuation and H^{∞} Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-32**(1987), 427—429.
- [2] Scherer, C., H^{∞} -control by State Feedback: An Iterative Algorithm and Characterization of High-gain Occurrence, *Systems Control Lett.*, **12**(1989), 383—391.
- [3] Zhou, K. and Khargonekar, P. P., An Algebraic Riccati Equation Approach to H^{∞} Optimization, *Systems Control Lett.*, **11**(1988), 85—92.
- [4] Postlethwaite, I., Gu, D-W. and O' Young, S. D., Some Computational Results on Size Reduction in H^{∞} Design, *IEEE Trans. Auto. contr.*, **AC-33**(1988), 177—185.

A STUDY OF H^∞ STATE FEEDBACK CONTROL AND ITS OPTIMAL SOLUTION

YANG FUWEN

(Dept. of Electrical Engineering, Fuzhou University)

TU JIAN

(Dept. of Automatic control, University of Science and Technology)

ABSTRACT

H^∞ state feedback control problem is studied in this paper assuming all states are available. The sub-optimal solution to H^∞ state feedback control problem based on one algebraic Riccati equation is given, and an analytic method for the optimal solution is proposed for a special case.

Key words : H^∞ state feedback; algebraic Riccati equation; optimal solution.