第20卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 5
1994 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1994

研究简报

变系数线性模型参数的递推估计

胡 峰
（西安卫星测控中心 710043）

关键词：递推估计，最小二乘法，变系数线性模型.

1 引言

在工程数据的综合处理中，特别是在卫星及运载工具的动态目标跟踪与精密定位时，自从 Brown[1] 提出最佳弹道自校准估计（EMBET）技术以来，变系数线性模型

$$Y_i = A_i X_i + B_i \beta + \varepsilon_i, \tag{1.1}$$

其中 Y_i, ε_i 为 p 维向量，X_i, β 分别为 q、r 维向量，A_i、B_i 分别为 $p\times q$、$p\times r$ 维矩阵. 该模型深受航天测控系统工程技术人员的重视，并被广泛用于多台设备同步跟踪情况下的动态模型分析与最佳弹道综合处理工作中[2].

例如，假定有 m 台经纬仪设备同时跟踪某动态目标 M，并测得 t 时刻目标的方位角 $A_j(t)$ 和俯仰角 $E_j(t)$. 若再预知此时目标的粗轨坐标 $\boldsymbol{p}(t) \triangleq (x(t), y(t), z(t))$，则不难导出 EMBET 模型[3]

$$\begin{bmatrix} A_j(t) - \widetilde{A}_j(\boldsymbol{p}(t)) \\ E_j(t) - \widetilde{E}_j(\boldsymbol{p}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin A_j(t)\operatorname{tg} E_j(t) & \cos A_j(t)\operatorname{tg} E_j(t) & \operatorname{tg} E_j(t) & \sec E_j(t) \\ 0 & 1 & \cos A_j(t) & -\sin A_j(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{j6} \end{bmatrix} + \left.\frac{\partial(\widetilde{A}_j, \widetilde{E}_j)}{\partial(x, y, z)}\right|_{\boldsymbol{p}(t)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta y(t) \\ \Delta z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{A_j}(t) \\ \varepsilon_{E_j}(t) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

式中

$$\widetilde{A}_j(\boldsymbol{p}(t)) \triangleq \operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{x(t) - x_{0j}}{y(t) - y_{0j}}\right\},$$

$$\widetilde{E}_j(\boldsymbol{p}(t)) = \operatorname{tg}^{-1}\left\{\frac{z(t) - z_{0j}}{[(x(t) - x_{0j})^2 + (y(t) - y_{0j})^2]^{1/2}}\right\},$$

$$(j = 1, 2, \cdots, m). \tag{1.3}$$

待估参数包括目标的坐标修正量 $(\Delta x(t), \Delta y(t), \Delta z(t))$ 和设备的轴系偏倚误差系数 $(a_{11}, \cdots, a_{16}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{m6})$.

本文于 1991 年 10 月 21 日收到

显然，EMBET 模型(1.2)可归结到变系数线性模型(1.1)上来，此时 $p=2m, q=3$，$r=6m$。

由式(1.1)可以看出，当 $A_i=0(i=1,2,\cdots)$ 时，变系数线性模型退化为普通的线性回归模型．此时，模型的效应参数 β 的最小二乘估计有现成的递推公式可供采用[3]．但是，对于一般的模型(1.1)由于其待估参数 $\{X_1,\cdots,X_n;\beta\}$ 的总维数 $n\cdot q+r$ 随样本容量 n 的增加而相应地增大.时变参数 X_i 和效应参数 β 的逐点递推最小二乘估计的推导无疑要困难一些．本文将从工程应用的角度给出这个问题的一组实用递推算法。

2 模型系数的递推估计

在变系数线性模型(1.1)中，假定收集到 n 组样本 $\{(Y_i,A_i,B_i),i=1,2,\cdots,n\}$，构造二次指标

$$J \triangleq \sum_{i=1}^{n}\|\varepsilon_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|Y_i-A_iX_i-B_i\beta\|^2. \tag{2.1}$$

求解函数 J 的极小值点，可由

$$\frac{\partial J}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial X_1}=\cdots=\frac{\partial J}{\partial X_n}=0, \tag{2.2}$$

得 $\{X_1,\cdots,X_n;\beta\}$ 的最小二乘估计为

$$\begin{bmatrix}\hat\beta_{(n)}\\ \hat X_{(1|n)}\\ \vdots\\ \hat X_{(n|n)}\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}B_1 & A_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_n & & & A_n\end{bmatrix}^{\tau}\begin{bmatrix}B_1 & A_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_n & & & A_n\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}B_1 & A_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ B_n & & & A_n\end{bmatrix}^{\tau}\begin{bmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

式中，$\hat\beta_{(n)}$ 与 $\hat X_{(i|n)}$ 分别表示基于 n 个采样点的参数向量 β 和 X_i 的最小二乘估计。

当再追加一个样本点 $(Y_{n+1},A_{n+1},B_{n+1})$ 时，基于全部 $n+1$ 个样本点的最小二乘估计 $\hat\beta_{(n+1)}$ 和 $\hat X_{(i|n+1)}$ 与基于 n 个样本点的估计 $\hat\beta_{(n)}$ 和 $\hat X_{(i|n)}$ 之间有如下的递推关系，即

定理 1. 当 $p>q$，$n>\dfrac{r}{p-q}$ 时，令

$$L_{(n)}\triangleq\sum_{i=1}^{n}B_i^{\tau}(I-A_i(A_i^{\tau}A_i)^{-1}A_i)^{\tau}B_i, \tag{2.4}$$

$$R_{n+1}\triangleq I-B_{n+1}(L_{(n)}+B_{n+1}^{\tau}B_{n+1})^{-1}B_{n+1}^{\tau}, \tag{2.5}$$

则有最小二乘估计的递推算法为

$$\begin{cases}\hat\beta_{(n+1)}=\hat\beta_{(n)}+(L_{(n)}+B_{n+1}^{\tau}B_{n+1})^{-1}B_{n+1}^{\tau}(Y_{n+1}-A_{n+1}\hat X_{(n+1|n+1)}-B_{n+1}\hat\beta_{(n)}), & (2.6)\\ \hat X_{(i|n+1)}=\hat X_{(i|n)}+(A_i^{\tau}A_i)^{-1}A_i^{\tau}B_i(\hat\beta_{(n)}-\hat\beta_{(n+1)}),(i=1,2,\cdots,n), & (2.7)\\ \hat X_{(n+1|n+1)}=(A_{n+1}^{\tau}R_{n+1}A_{n+1})^{-1}A_{n+1}^{\tau}R_{n+1}(Y_{n+1}-B_{n+1}\hat\beta_{(n)}). & (2.8)\end{cases}$$

定理 1 的推证过程中主要运用到矩阵运算和分块求逆的有关理论和技巧．限于篇幅，证略。

考虑式(1.1)，取 ε_{n+1} 的估计值

$$\hat\varepsilon_{(n+1)}\triangleq Y_{n+1}-A_{n+1}\hat X_{(n+1|n+1)}-B_{n+1}\hat\beta_{(n)}, \tag{2.9}$$

则式(2.6)—(2.7)可改写为

$$\begin{cases}\hat{\beta}_{(n+1)}=\hat{\beta}_{(n)}+(L_{(n)}+B_{n+1}^{\tau}B_{n+1})^{-1}B_{n+1}^{\tau}\hat{\varepsilon}_{(n+1)}, & (2.6)'\\ \hat{X}_{(i|n+1)}=\hat{X}_{(i|n)}-(A_i^{\tau}A_i)^{-1}A_i^{\tau}B_i(L_{(n)}+B_{n+1}^{\tau}B_{n+1})^{-1}B_{n+1}^{\tau}\hat{\varepsilon}_{(n+1)}. & (2.7)'\end{cases}$$

由上述递推公式可以看出，本文导出的算法有如下优点：

1）$\hat{\beta}_{(n+1)}$ 仅由前一时刻的估计值 $\hat{\beta}_{(n)}$ 和新增信息 $\hat{\varepsilon}_{(n+1)}$ 线性给出。相应地，变系数分量 X_i 的平滑估计 $\hat{X}_{(i|n)}$ 亦有类似的直观分解 $(i=1,2,\cdots,n)$。

2）当 $\{\varepsilon_i\}$ 为平稳白噪声时，$\hat{\beta}_{(n+1)}$ 和 $\hat{X}_{(i|n+1)}$ 均为无偏估计，即

$$E\hat{\beta}_{(n+1)}=\beta,\ E(\hat{X}_{(i|n+1)}-X_i)=0,\ (i=1,\cdots,n+1).$$

3）在基于 $n+1$ 个样本点的线性估计族中，各估计量仍保持最小二乘估计的统计最优性

i）$\hat{\beta}_{(n+1)}$ 为 β 的最优线性无偏估计；

ii）$\hat{X}_{(i|n+1)}$ 为 X_i 的最优线性平滑估计 $(i=1,2,\cdots,n)$；

iii）$\hat{X}_{(n+1|n+1)}$ 为 X_{n+1} 的最优线性滤波估计。

3 仿真计算量分析

变系数线性模型的递推算法(2.6)—(2.8)在航天飞行器外弹道测控系统的综合处理中，特别是在准实时高精度定位中，有着广泛的应用。下面是在 Vax2780 机上对 EMBET 误差模型(1.2)进行的仿真计算分析。

已知某四台构成良好布站几何的光学经纬仪设备同时跟踪一"主动式"飞行目标。取其中两台的测角数据 (A_j,E_j) $(j=1,2)$ 交汇确定目标的粗轨坐标，采用模型(1.2)逐步迭代实现位置坐标的修正和轴系偏倚系数的自校准估计。此时，设备台数 $m=4$，对应于式(1.1)的维数 $p=2m=8, q=3, r=6m=24$。

在实际数据处理时，可先取 $n_0=\left[\frac{r}{p-q}\right]+1=5$ 个样本数据，用式(2.3)算出 $\hat{X}_{(i|n_0)}(i=1,2,\cdots,n_0)$ 及初值 $\hat{\beta}_{(n_0)}$，再按式(2.6)—(2.8)递推估计模型参数。表1是在 Vax2780 机上对 $n=50$ 点采样处理情况。

表 1

处理方式	求逆矩阵的最高阶次	相乘矩阵 $A\cdot B$ 的最高阶次	运行时间	迭代次数门限 $\delta=0.5$m	$\\|\hat{\beta}-\beta_0\\|$
批处理	$3n+6m=174$	A:174×400 B:400×174	37.51分	3	0.057
递　推	$6m=24$	A:24×8 B:8×24	1.83分	3	0.018

上述递推算法能有效地避免批处理时高阶矩阵求逆的困难，大大节省计算机内存，提高运算速度，并有希望用于实时处理。

参　考　文　献

[1] Brown D C. The Error Model Best Estimation of Trajectory, American Defence (AD)-602799, 1964, 1—40.

[2] 胡峰. 飞行器外测系统的随机建模，人造卫星的观测与研究，1992，**11**(1)：17—26.

[3] 陈希孺，王松桂. 近代回归分析—原理方法及应用. 安徽教育出版社，1987，6—100.

RECURSIVE ESTIMATORS FOR PARAMETERS OF THE LINEAR MODEL WITH VARYING COEFFICIENTS

Hu Feng

(*Xian Satellite Control Center* 710043)

Abstract

Key Words: Recursive estimators; least square method; linear model with varying coefficients.