



# 不确定离散时间系统鲁棒稳定控制<sup>1)</sup>

杨保民 孙翔

(南京理工大学自控系 南京 210014)

## 摘 要

根据 Lyapunov 稳定性定理,针对不确定离散时间系统鲁棒稳定状态反馈控制问题,提出一种方法,即通过不确定矩阵秩 1 分解,计算加权矩阵,沿用线性最优调节器问题的 Riccati 代数方程,设计鲁棒稳定调节器,并讨论了控制矩阵的不确定程度与鲁棒稳定调节器的存在性关系问题。

**关键词:** 不确定系统,鲁棒稳定,Riccati 方程。

## 1 问题的提出与描述

不确定系统的鲁棒稳定控制问题具有重要的实际意义,近年来受到人们的重视<sup>[1-3]</sup>。作者认为,在把系统阵分解成标称阵和不确定阵时,应使不确定阵元素所在的区域对原点对称,从而不确定阵的范数最小为宜,这样设计的结果保守性较少。这时标称阵可能不稳定,而 Riccati 代数方程方法也适用于这种情况。本文由不确定阵计算 Riccati 代数方程的加权阵,便于分析系统稳定性与其不确定性的关系,容易调整稳定裕度。

设满足匹配条件的离散时间控制系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = (A + B\Delta A)\mathbf{x}(k) + (B + B\Delta B)\mathbf{u}(k), \quad (1)$$

其标称系统为

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad (2)$$

式中  $\mathbf{x}(k) \in R^n, \mathbf{u}(k) \in R^m, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}, \Delta A \in R^{n \times n}, \Delta B \in R^{n \times m}$ 。A 可以是非 Hurwitz 阵。

设  $\Delta A$  的元素  $\Delta a_{ij}(\cdot)$  是有界函数,可写成  $\Delta a_{ij}(k) = \Delta \bar{a}_{ij} s_{ij}(k)$ ,  $\Delta \bar{a}_{ij} \geq 0$  为确定性量,  $s_{ij}(k)$  为不确定量,  $|s_{ij}(k)|_{\max} = \bar{s}$ , 有

$$\Delta A = (\Delta a_{ij}(k))_{m \times n} = (\Delta \bar{a}_{ij} s_{ij}(k))_{m \times n}, \quad (3)$$

将  $\Delta A$  分解成秩 1 阵之和<sup>[4]</sup>,得

$$\Delta A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \Delta A_{ij} s_{ij}(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} e_{ij}^T s_{ij}(k), \quad (4)$$

1) 本文获江苏省自然科学基金资助。  
本文于 1992 年 8 月 18 日收到

其中  $\mathbf{d}_{ij} \in R^m, \mathbf{e}_{ij} \in R^n, s_{ij}(k) \in R, \mathbf{d}_{ij}, \mathbf{e}_{ij}$  为单元素向量, 其元素可取为  $\sqrt{\Delta a_{ij}}$ . 令

$$T = \bar{s} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}_{ij}^T, U = \bar{s} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^T, \quad (5), (6)$$

则  $T \in R^{m \times m}, U \in R^{n \times n}, T, U$  为半正定对角阵.

设  $\delta A = B \Delta A$ , 其元素为  $\delta a_{ij}(\cdot)$  是有界函数, 可写成  $\delta a_{ij}(k) = \delta \bar{a}_{ij} r_{ij}(k), \delta \bar{a}_{ij} \geq 0, |r_{ij}(k)|_{\max} = \bar{r}$ , 有

$$\delta A = (\delta a_{ij}(k))_{n \times n} = (\delta \bar{a}_{ij} r_{ij}(k))_{n \times n}. \quad (7)$$

又令  $\delta \bar{A} = (\delta \bar{a}_{ij} \bar{r})_{n \times n}$ , 则不难证明  $\|\delta A\| \leq \|\delta \bar{A}\|, \|\cdot\|$  为 Euclidean 范数.

设  $\Delta B$  的元素  $\Delta b_{ij}(\cdot)$  是有界函数, 可写成

$$\Delta b_{ij}(k) = \Delta \bar{b}_{ij} l_{ij}(k), \Delta \bar{b}_{ij} \geq 0, |l_{ij}(k)|_{\max} = \bar{l},$$

有

$$\Delta B = (\Delta \bar{b}_{ij} l_{ij}(k))_{m \times m} = (\Delta b_{ij}(k))_{m \times m}, \quad (8)$$

把  $\Delta B$  分解为秩 1 阵之和, 有

$$\Delta B = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Delta B_{ij} l_{ij}(k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{ij} \mathbf{g}_{ij}^T l_{ij}(k). \quad (9)$$

其中  $\mathbf{f}_{ij}, \mathbf{g}_{ij} \in R^m, l_{ij}(k) \in R$ , 单元素向量  $\mathbf{f}_{ij}, \mathbf{g}_{ij}$  的元素可取  $\sqrt{\Delta \bar{b}_{ij}}$  令

$$N = \bar{l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{ij} \mathbf{f}_{ij}^T, W = \bar{l} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_{ij} \mathbf{g}_{ij}^T, \quad (10), (11)$$

$N, W$  为半正定对角阵. 若  $\Delta B$  的某行或列的元素全为零, 则以适当小的正数代替  $N, W$  中相应的零元素,  $N, W$  可视为正定对角阵.

由于设  $\Delta \bar{B} = (\Delta \bar{b}_{ij} \bar{l})_{m \times m}$ , 则  $\Delta \bar{B}^T \Delta \bar{B} = (\Delta \hat{b}_{ij} \bar{l}^2)_{m \times m}$ . 用秩 1 分解法,  $\Delta B^T \Delta B = (\Delta \hat{b}_{ij} \bar{l}^2)_{m \times m}$ , 有

$$N_2 = \bar{l}^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{f}_{ij_2} \mathbf{f}_{ij_2}^T, W_2 = \bar{l}^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_{ij_2} \mathbf{g}_{ij_2}^T \quad (12), (13)$$

其中单元素向量  $\mathbf{f}_{ij_2}, \mathbf{g}_{ij_2}$  的元素为  $(\Delta \hat{b}_{ij})^{1/2}$ .

## 2 鲁棒稳定状态调节器

**定义 1.**  $\Delta B$  的不确定度为  $(NW)^{1/2}$  的最大特征值, 用  $\eta$  表示, 有  $\eta = \lambda_{\max}(NW)^{1/2}$ .

**定理 1.** 设标称系统的  $(A, B)$  为能稳对,  $\text{rank}(B) = m, \mathbf{u}(k) = K\mathbf{x}(k)$ , 则系统 (1) 鲁棒稳定的充分条件为, 具有正数  $\sigma, h_a, h_b$  使 Riccati 代数方程 (14) 存在正定解矩阵  $P$  且满足不等式 (15), (16).

$$(A + BK)^T P (A + BK) + (A + BK)^T P B (\sigma T + N) B^T P (A + BK) + \frac{1}{\sigma} U + K^T [W + h_b(N_2 + W_2)] K - (1 - h_a^2) P \leq 0, \quad (14)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{h_a} \|\delta \bar{A}\| < \left( \frac{\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

$$h_b \geq \lambda_{\max}(B^T P B). \quad (16)$$

证明. 取 Lyapunov 函数为  $V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)$ ,  $P \in R^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $V[\mathbf{x}(k)]$  为正定函数. 按方程(1)向前一步求  $V[\mathbf{x}(k)]$  的差分, 并由  $\mathbf{u}(k) = K\mathbf{x}(k)$ , 有

$$\begin{aligned} \Delta V[\mathbf{x}(k)] = & \mathbf{x}^T(k)[(A+BK)^T P(A+BK) + (A+BK)^T P B \Delta A \\ & + \Delta A^T B^T P(A+BK) + \Delta A^T B^T P B \Delta A + (A \\ & + BK)^T P B \Delta BK + K^T \Delta B^T B^T P(A+BK) \\ & + K^T \Delta B^T B^T P B \Delta BK + K^T \Delta B^T B^T P B \Delta A \\ & + \Delta A^T B^T P B \Delta BK - P]\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (17)$$

利用(4)–(6)式, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(k)(A+BK)^T P B \Delta A \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k) \Delta A^T B^T P(A+BK)\mathbf{x}(k) \\ & \leq \mathbf{x}^T(k) \left[ (A+BK)^T P B (\sigma T) B^T P(A+BK) + \frac{1}{\sigma} U \right] \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (18)$$

同样, 将(9)–(11)式代入, 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^T(k)[(A+BK)^T P B \Delta BK + K^T \Delta B^T B^T P(A+BK)]\mathbf{x}(k) \\ & \leq \mathbf{x}^T(k)[(A+BK)^T P B N B^T P(A+BK) + K^T W K]\mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (19)$$

又  $\mathbf{x}^T(k)[\Delta A^T B^T P B \Delta BK + K^T \Delta B^T B^T P B \Delta BK + K^T \Delta B^T B^T P B \Delta A]\mathbf{x}(k)$

$$\leq \mathbf{x}^T(k)[K^T(\lambda_{\max}(B^T P B))(N_2 + W_2)K + \Delta A^T B^T P B \Delta A]\mathbf{x}(k). \quad (20)$$

由文献[1]的引理, 不等式(15)成立时, 有

$$h_a^2 P - 2\Delta A^T B^T P B \Delta A > 0. \quad (21)$$

把(18)–(21)式代入(17)式, 考虑到不等式(16), 有

$$\begin{aligned} \Delta V[\mathbf{x}(k)] < & \mathbf{x}^T(k)[(A+BK)^T P(A+BK) + (A+BK)P B (\sigma T \\ & + N)B^T P(A+BK) + \frac{1}{\sigma} U + K^T(W + h_b(N_2 + W_2))K \\ & - (1 - h_a^2)P]\mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

故当 Riccati 代数方程(14)有满足不等式(15), (16)的正定解矩阵  $P$  时, 得到

$$\Delta V[\mathbf{x}(k)] < 0.$$

根据 Lyapunov 稳定性定理, 系统(1)鲁棒渐近稳定.

**定理 2.** 设标称系统  $(A, B)$  能稳定,  $\text{rank}(B) = m$ ,

令

$$K = -[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1} B^T P A, \quad (22)$$

即

$$\mathbf{u}(k) = -[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1} B^T P A \mathbf{x}(k). \quad (23)$$

若  $P$  为 Riccati 代数方程(24)的正定解矩阵, 且满足不等式(15), (25), 则(23)式为系统(1)的鲁棒稳定调节器.

$$\begin{aligned} & A^T P A - (1 - h_a^2)P + \frac{1}{\sigma} U - A^T P B [(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1} B^T P A \\ & = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$W[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{-\frac{1}{2}} - 2] \geq \lambda_{\max}(B^T P B)(N_2 + W_2). \quad (25)$$

证明. 将(22)式代入(14)式左端,有

$$\begin{aligned} & \{A - B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}B^T P A\}^T P \{A - B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]B^T P A\} + \{A - B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P A\}^T P B(\sigma T + N)B^T P \{A - B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P A\} + A^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}(W + h_b(N_2 \\ & + W_2))[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}B^T P A + \frac{1}{\sigma} U - (1 - h_a^2)P. \end{aligned} \quad (26)$$

将上式展开,考虑到

$$\begin{aligned} & A^T P B(\sigma T + N)B^T P A - A^T P B(\sigma T + N)B^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P A - \{A^T P B[(\sigma T + N)^{\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P B(\sigma T + N)B^T P A - A^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P B(\sigma T + N)B^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P A\} \\ & = A^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}W[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} \\ & + B^T P B]^{-1}B^T P A, \end{aligned}$$

(26)式可写成

$$\begin{aligned} & A^T P A - (1 - h_a^2)P + \frac{1}{\sigma} U - A^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}B^T P A \\ & - A^T P B[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}[(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} - 2W \\ & - h_b(N_2 + W_2)] \cdot [(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}}W^{\frac{1}{2}} + B^T P B]^{-1}B^T P A. \end{aligned} \quad (27)$$

由于  $P$  为代数方程(24)的正定解,且满足不等式(15), (25), 所以(27)式小于等于零,  $\Delta V[\mathbf{x}(k)] < 0$ , 从而(23)式为系统(1)的鲁棒稳定调节器. 证毕.

由(25)式不难得出下面推论:

**推论 1.** 系统(1)的鲁棒稳定调节器(23)存在的必要条件是  $\eta < \frac{1}{2}$ .

### 3 鲁棒稳定调节器的存在性问题

设有连续不确定系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A_t + B_t \Delta A) \mathbf{x}(t) + B_t (I + \Delta B) \mathbf{u}(t), \quad (28)$$

其标称系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_t \mathbf{x}(t) + B_t \mathbf{u}(t). \quad (29)$$

该系统相应线性二次型最优调节器问题的 Riccati 代数方程为

$$A_t^T P_t + P_t A_t - P_t B_t R_t^{-1} B_t^T P_t + Q_t = 0. \quad (30)$$

该方程有唯一对称正定解矩阵  $P_t$  [5].

将式(1), (2), (24)看成是相应的离散化不确定系统、标称系统及 Riccati 方程, 则  $A = I + A_t \Delta t$ ,  $B = B_t \Delta t$ ,  $\delta A = B \Delta A = B_t \Delta t \Delta A$ ,  $B^T P B = B_t^T P_t B_t \Delta t^2$ ,

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sigma} U = Q_t, \quad \frac{1}{\Delta t} (\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} = R_t.$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\|\delta A\| \rightarrow 0, \lambda_{\max}(B^T P B) \rightarrow 0, P \rightarrow P_0$ . 于是不难得到下面定理:

**定理 3.** 对于满足匹配条件的不确定连续系统, 当  $\eta < \frac{1}{2}$  时, 若该系统离散化的采

样时间间隔足够小, 则满足不等式(15),(25)的 Riccati 方程(24)的对称正定解矩阵唯一存在, 鲁棒稳定调节器(23)存在.

证略.

## 4 算例

设离散时间系统的状态方程为

$$x(k+1) = (A + B\Delta A)x(k) + (B + B\Delta B)u(k),$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.15 & 0.1 \\ 0 & 1.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1.05 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

$$B\Delta A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0.1 \\ 0.15 & 0.055 & 0.005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00275 & 0 & 0.005 \\ 0.00275 & 0 & 0.005 \\ 0.0075 & 0.00275 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B\Delta B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.015 & 0 \\ 0.015 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}.$$

试求鲁棒稳定调节器.

解. 由  $\Delta B$  分解计算  $N, W$ . 令

$$\begin{aligned} f_{11} &= [\sqrt{0.3}, 0]^T, f_{12} = [0, 0]^T, f_{21} = [0, 0]^T, f_{22} = [0, \sqrt{0.2}]^T, \\ g_{11} &= [\sqrt{0.3}, 0]^T, g_{12} = [0, 0]^T, g_{21} = [0, 0]^T, g_{22} = [0, \sqrt{0.2}]^T, \end{aligned}$$

故 
$$N = W = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

类似地, 由  $\Delta A$  分解得到

$$T = \begin{bmatrix} 0.155 & 0 \\ 0 & 0.21 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0.205 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055 & 0.105 \end{bmatrix}.$$

由  $\eta = \lambda_{\max}(NW)^{1/2} = 0.3 < \frac{1}{2}$ , 故满足定理 2 的推论. 取  $h_a^2 = 0.03, \sigma = 0.5$ ,

$$(\sigma T + N)^{-\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix},$$

由(24)式得

$$P = \begin{bmatrix} 46.8823 & -18.4621 & 2.2924 \\ -18.4621 & 79.2600 & 36.9097 \\ 2.2924 & 36.9097 & 66.5312 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1(P) = 25.7581, \lambda_2(P) = 54.0509, \lambda_3(P) = 112.8644,$$

$$\lambda_1(B^T P B) = 0.093, \lambda_2(B^T P B) = 0.297, \text{ 即有 } \lambda_{\max}(B^T P B) = 0.297,$$

$$\lambda_{\max}(P) = 112.8644, \lambda_{\min}(P) = 25.7581, \Delta B^T \Delta B = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} = N_2 = W_2,$$

$h_a = 0.173, \|B\Delta\bar{A}\| = 0.0125$ , 不难验证不等式(15),(25)成立. 于是

$$u(k) = -\left(\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} + B^T P B\right)^{-1} B^T P A x(k)$$

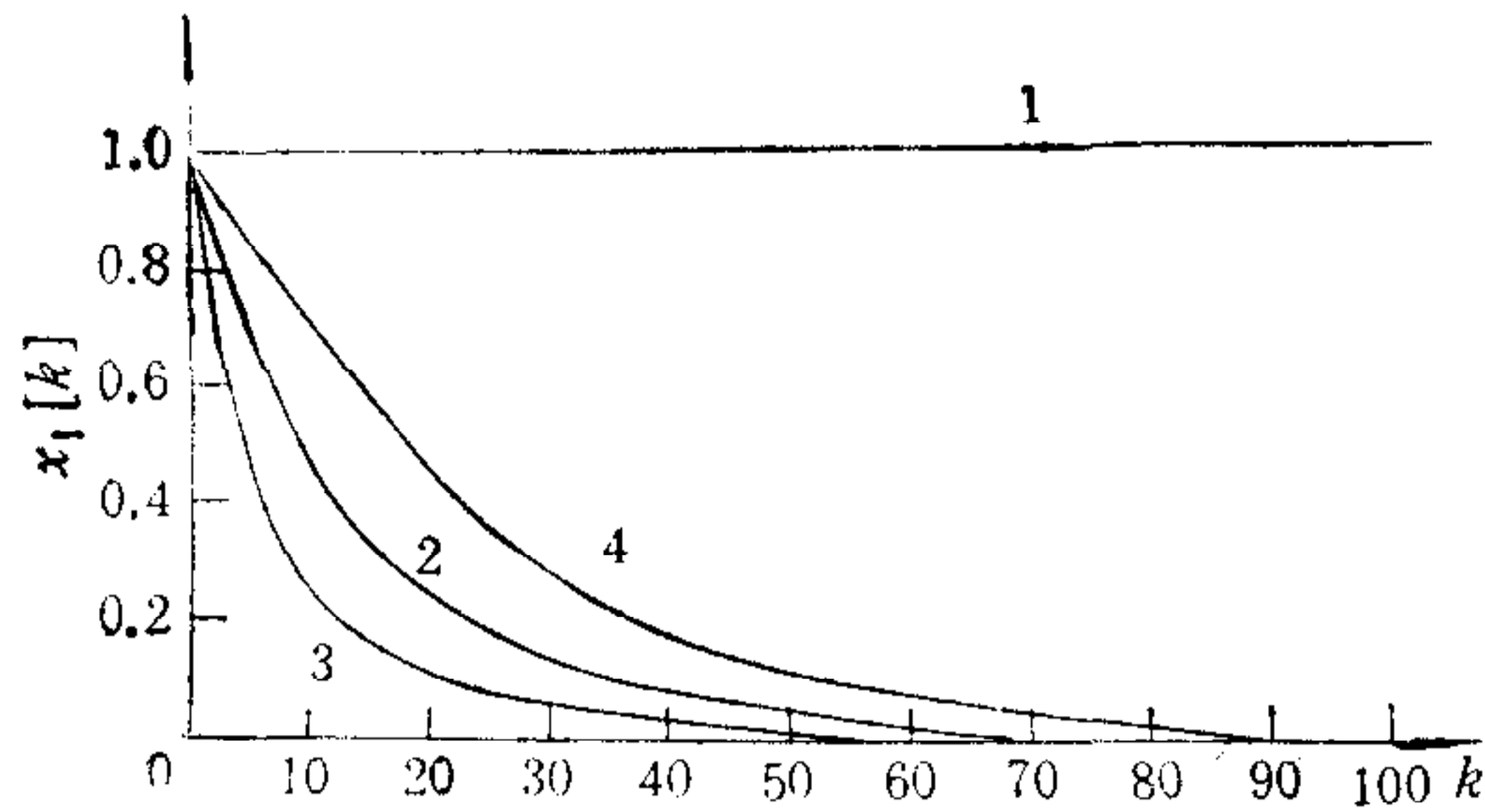


图 1

为鲁棒稳定的状态反馈控制。

设  $x(0) = [1, 0, 0]^T$ , 对于开环系统、不确定量为零、最大正、负值的鲁棒控制时,  $x_1(k)$  的响应如图 1 中曲线 1—4 所示. 可见原来不稳定的不确定系统, 经状态反馈控制成为稳定系统。

本文设计方法的条件约束并不苛刻, 适用面较广. 具体设计步骤是选取  $h_a$  与  $\sigma$ , 求解 Riccati 方程(24), 检验

不等式(15),(25)是否成立, 是一个反复过程. 期望所选  $h_a$  较小,  $\sigma$  较大, 这样所得调节器的稳定裕度不致过于保守。

### 参 考 文 献

- [1] 顾兴源, 俞向罡. 一类不确定离散时间系统的鲁棒控制. 自动化学报. 1992, 18(1): 102—106.
- [2] Yang W C and Tomizuka M, Discrete-time robust control via state feedback for single input systems, *IEEE Trans. Auto Contr.* 1990, AC-35:590--598.
- [3] 刘晓平, 张嗣瀛. 大规模不确定离散动态系统的分散控制. 自动化学报, 1992, 18(1): 120—123.
- [4] Ian R Petersen and C V Hollot. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear system. *Automatica.* 1986, 22, July.
- [5] B D O 安德森 JB 莫尔. 线性最优控制. 尤云程译. 科学出版社. 1982.
- [6] 毛剑琴等. 控制系统的计算机辅助设计. 北京航空学院出版社, 1988.

## ROBUST STABILIZING CONTROL FOR DISCRETE-TIME UNCERTAIN SYSTEMS

YANG BAOMIN      SUN XIANG

(Dept. of Automatic Control, Nanjing Univ. of Sci. & Tech. 210014)

### ABSTRACT

Based on the Lyapunov stability criterion, in this paper we present a method to study the robust stabilizing feedback control law for uncertain discrete-time systems. This method can be used to calculating the weighted matrix in terms of the solution of a matrix whose uncertainty is of "rank-1" type, and then designing the robust stabilizing controller according to the Riccati equation about the linear optimal controller. Meanwhile, we also discuss the uncertainty of the control matrix and the existence of robust stabilizing controller.

**Key words:** Uncertain system, robust stabilization, Riccati equation.