短文

不确定时滞系统的基于 Razumikhin 定理的鲁棒 H^{∞} 可靠控制[1)]

王景成　邵惠鹤

（上海交通大学自动化系　上海　200030）

（E-mail：jcwang@mail1.sjtu.edu.cn）

摘　要　主要研究了一类状态时滞不确定线性系统的时滞依赖鲁棒 H^{∞} 可靠控制问题. 系统状态矩阵和时滞状态矩阵中存在着范数有界的时变参数不确定性，故障执行器集合是执行器集合的子集. 采用 Razumikhin 定理，最终将问题归结为通过线性矩阵不等式(Linear Matrix Inequalities, LMIs)的求解得到无记忆状态反馈鲁棒 H^{∞} 可靠控制器综合设计方法.

关键词　可靠控制，H^{∞} 控制，不确定性，执行器故障，时滞

中图分类号　TP202.1

ROBUST AND RELIABLE H^{∞} CONTROL FOR UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS WITH ACTUATOR FAILURES BASED ON RAZUMIKHIN THEOREM

WANG Jing-Cheng　SHAO Hui-He

(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

(E-mail: jcwang@mail1.sjtu.edu.cn)

Abstract　This paper focuses on the synthesis problem of robust and reliable H^{∞} control for linear systems with norm-bounded time-varying parameter uncertainty in the state and delayed-state matrices and with actuator failures among a pre-specified subset of actuators. LMIs (linear matrix inequalities) method is given for the memoryless state feedback synthesis problem to quadratically stabilize the given systems and satisfy the H^{∞}-norm constraint. The results depend on the size of the time-delay via the use of Razumikhin-type theorem.

Key words　Reliable control, H^{∞} control, uncertainty, actuator failure, time-delay

1) 国家自然科学基金(60004001)资助

收稿日期　1999-12-27　　收修改稿日期　2000-10-16

1　引言

时滞系统控制吸引了很多科研人员的研究兴趣. 执行器在将控制器输出信号施加给被控对象时起着至关重要的作用,但有时会出现执行器故障状况. 引发出的问题是如何在执行器故障情形下镇定闭环系统. 近年来鲁棒 H^{∞} 控制的研究得到长足发展[1,2]. 在执行器存在故障情形下的鲁棒 H^{∞} 完整性设计问题越来越引起广泛的研究兴趣[3]. 本文主要研究在执行器存在故障和系统存在不确定情形下不确定时滞系统的鲁棒 H^{∞} 完整性综合问题. 假设系统状态全部可测. 故障执行器输出假设为任意能量有界信号. 设计目标是得到时滞相关的无记忆状态反馈控制律以确保闭环系统在执行器故障情形和 H^{∞} 范数界约束下是二次稳定的.

2　系统描述和定义

考虑如下描述的线性不确定状态滞后系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \overline{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \overline{A}_1(t)\boldsymbol{x}(t-h) + B\boldsymbol{u}(t) + G\boldsymbol{w}(t) = \\ &\quad (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))\boldsymbol{x}(t-h) + B\boldsymbol{u}(t) + G\boldsymbol{w}(t) \end{aligned} \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = E\boldsymbol{x}(t), \quad h \leqslant \tau \tag{1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制输入向量,$\boldsymbol{w}(t)\in R^p$ 是属于 $L_2[0,\infty)$ 的干扰输入向量,$\boldsymbol{z}(t)\in R^q$ 是控制输出向量. 假设系统(1)中的不确定结构满足 $\Delta A(t)=M_1F_1(t)N_1$, $\Delta A_1(t)=M_2F_2(t)N_2, F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I$, $i=1,2$. 考虑采用无记忆状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t) = -K\boldsymbol{x}(t) = -\frac{1}{2\varepsilon}B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

执行器集合中某一子集容易出现故障,用符号 $\Omega\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$ 来表示. 执行器集合中其它子集很难出现故障,用符号 $\overline{\Omega}=\{1,2,\cdots,m\}-\Omega$ 来表示. 不妨假设此集合中执行器不会出现故障. 引入分解 $B=B_{\Omega}+B_{\overline{\Omega}}$,其中 B_{Ω} 和 $B_{\overline{\Omega}}$ 是分别取 B 中对应于集合 Ω 和 $\overline{\Omega}$ 相应的列为零的情况下产生的. 文中假设故障执行器的输出为任意能量有界信号,并可被视为干扰输入信号. 控制的目的是尽量降低原有的干扰信号和故障执行器的输出信号对系统输出的影响. 定义 ω 表示执行器实际故障集合,该集合是 Ω 的子集,即 $\omega\subseteq\Omega$. 引入与前类似的分解 $B=B_{\omega}+B_{\overline{\omega}}$.

记 $\widetilde{\boldsymbol{w}}(t)=[(\boldsymbol{w}(t))^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{u}_{\omega}^{f}(t))^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{u}_{\omega}^{f}(t)\in R^m$ 是故障向量,其中一部分对应于故障执行器 ω 产生的输出,另一部分对应于将正常执行器产生的输出视为零. 其可被视为新的干扰输入向量. 考虑执行器故障实际存在的情形,式(1)和式(2)可分别改写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \overline{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \overline{A}_1(t)\boldsymbol{x}(t-h) + B_{\overline{\omega}}\boldsymbol{u}(t) + [G \quad B_{\omega}]\widetilde{\boldsymbol{w}}(t),\ \boldsymbol{z}(t) = E\boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = -K_{\overline{\omega}}\boldsymbol{x}(t) = -\frac{1}{2\varepsilon}B_{\overline{\omega}}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

记 $\overline{A}_0(t)=\overline{A}(t)-B_{\overline{\omega}}K_{\overline{\omega}}$,引入如下的重要引理和定义.

引理 1[2]. 给定维数适当的矩阵 A,M,N 和满足条件 $F^{\mathrm{T}}F\leqslant I$ 的矩阵 F. 则有

a) 对于任意实标量 $\beta>0$,有 $MFN+N^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\leqslant\beta^{-1}MM^{\mathrm{T}}+\beta N^{\mathrm{T}}N$;

b) 对于满足 $\beta I-NPN^{\mathrm{T}}>0$ 的任意维数适当的矩阵 $P>0$ 和任意实标量 $\beta>0$，有

$$(A+MFN)P(A+MFN)^{\mathrm{T}}\leqslant APA^{\mathrm{T}}+APN^{\mathrm{T}}(\beta I-NPN^{\mathrm{T}})^{-1}NPA^{\mathrm{T}}+\beta MM^{\mathrm{T}};$$

c) 对于满足 $P-\beta MM^{\mathrm{T}}>0$ 的任意维数适当的矩阵 $P>0$ 和任意实标量 $\beta>0$，有

$$(A+MFN)^{\mathrm{T}}P^{-1}(A+MFN)\leqslant A^{\mathrm{T}}(P-\beta MM^{\mathrm{T}})^{-1}A+\beta^{-1}NN^{\mathrm{T}}.$$

定义 1. 如果存在一正定对称矩阵 P 和一正常数 α 使得对于任意容许不确定性和对应于 $\omega\subseteq\Omega$ 的执行器故障情形下，所选取的 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x}(t),t)$ 对于时间 t 的导数满足条件 $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t),t)/\mathrm{d}t\leqslant-\alpha\|\boldsymbol{x}\|^2$，则系统(1)($\boldsymbol{u}(t)=0,\boldsymbol{w}(t)=0$)被称为在执行器故障情形下是二次稳定的. 如果存在反馈控制器使得闭环控制系统在执行器故障情形下二次稳定，则闭环系统(1)和(2)($\boldsymbol{w}(t)=0$)被称为在执行器故障情形下是二次稳定的.

定义 2. 给定正常数 $\gamma>0$. 在任意容许参数不确定情形和属于 $\omega\subseteq\Omega$ 的执行器故障情形下，如果：a)系统在执行器故障情形下是二次稳定的；b)在零初始假设条件下，满足约束条件 $\|\boldsymbol{z}(t)\|_2\leqslant\gamma\|\tilde{\boldsymbol{w}}(t)\|_2$. 系统(1)($\boldsymbol{u}(t)=0$)被称为在执行器故障情形和满足 H^∞ 约束下是二次稳定的. 如果存在反馈控制律使得闭环系统满足条件 a)和 b)，则系统(1)被称为在执行器故障情形和满足 H^∞ 约束下可通过反馈二次镇定化.

3 鲁棒 H^∞ 可靠控制器设计

本节将给出鲁棒 H^∞ 可靠控制器设计方法以确保在执行器故障情形和 H^∞ 约束条件下系统二次稳定. 下面的定理将分别给出闭环系统稳定性和鲁棒 H^∞ 可靠控制结果.

定理 1. 假设干扰输入向量为零. 对属于 $\omega\subseteq\Omega$ 的任意执行器故障状况和正常数 ε,β_i，$i=1,2,\cdots,6$，若存在正定对称矩阵 P,P_1,P_2 满足下述 LMIs

$$\begin{bmatrix} W & H_1 & H_2\\ H_1^{\mathrm{T}} & -J_1 & 0\\ H_2^{\mathrm{T}} & 0 & -J_2\end{bmatrix}<0,\quad \begin{bmatrix} S & SN_2^{\mathrm{T}} & SA_1^{\mathrm{T}}\\ N_2S & \beta_4 I & 0\\ A_1S & 0 & P_2-\beta_4M_2M_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix} S & SN_2^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}SA^{\mathrm{T}} & B_\Omega B_\Omega^{\mathrm{T}}\\ N_2S & \beta_3I & 0 & 0\\ \sqrt{2}AS & 0 & P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm{T}} & 0\\ B_\Omega B_\Omega^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 2\varepsilon^2(P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{5}$$

其中

$$S=P^{-1},\quad H_1=[SN_1^{\mathrm{T}}\quad SN_2^{\mathrm{T}}],\quad J_1=\mathrm{diag}[\beta_5I\quad \beta_6I],$$

$$W=S(A+A_1)^{\mathrm{T}}+(A+A_1)S-\varepsilon^{-1}B_\Omega B_\Omega^{\mathrm{T}}+\beta_5M_1M_1^{\mathrm{T}}+\beta_6M_2M_2^{\mathrm{T}}+$$
$$\tau A_1P_1A_1^{\mathrm{T}}+\tau A_1P_2A_1^{\mathrm{T}}+\tau\beta_1M_2M_2^{\mathrm{T}}+\tau\beta_2M_2M_2^{\mathrm{T}}+2\tau S,$$

$$H_2=[\tau A_1P_1N_2^{\mathrm{T}}\quad \tau A_1P_2N_2^{\mathrm{T}}],\quad J_2=\mathrm{diag}[\tau(\beta_1I-N_2P_1N_2^{\mathrm{T}})\quad \tau(\beta_2I-N_2P_2N_2^{\mathrm{T}})],$$

则闭环系统(1)和(2)在执行器故障情况下是二次稳定的.

证明. 由引理 1b)，若存在 $\beta_1>0$ 和 $\beta_2>0$ 满足

$$\beta_1I-N_2P_1N_2^{\mathrm{T}}>0,\quad \beta_2I-N_2P_2N_2^{\mathrm{T}}>0 \tag{6}$$

则有

$$\bar{A}_1(t)P_1\bar{A}_1^{\mathrm{T}}(t)\leqslant A_1P_1A_1^{\mathrm{T}}+A_1P_1N_2^{\mathrm{T}}(\beta_1I-N_2P_1N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2P_1A_1^{\mathrm{T}}+\beta_1M_2M_2^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{A}_1(t)P_2\bar{A}_1^{\mathrm{T}}(t)\leqslant A_1P_2A_1^{\mathrm{T}}+A_1P_2N_2^{\mathrm{T}}(\beta_2I-N_2P_2N_2^{\mathrm{T}})^{-1}N_2P_2A_1^{\mathrm{T}}+\beta_2M_2M_2^{\mathrm{T}}.$$

若存在 $\beta_3>0$ 和 $\beta_4>0$ 满足下述不等式

$$P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm T}>0,\quad A_0^{\mathrm T}(P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm T})^{-1}A_0+\beta_3^{-1}N_1^{\mathrm T}N_1\leqslant P \tag{7}$$

$$P_2-\beta_4M_2M_2^{\mathrm T}>0,\quad A_1^{\mathrm T}(P_2-\beta_4M_2M_2^{\mathrm T})^{-1}A_1+\beta_4^{-1}N_2^{\mathrm T}N_2\leqslant P \tag{8}$$

则由引理 1c),可得 $\overline{A}_0^{\mathrm T}(t+\theta)P_1^{-1}\overline{A}_0(t+\theta)\leqslant P$, $\overline{A}_1^{\mathrm T}(t+\theta)P_2^{-1}\overline{A}_1(t+\theta)\leqslant P$, $\forall\ t\geqslant 0$.

由 Razumikhin 定理[4],假设存在正常数 $q>1$ 满足约束条件 $V(\boldsymbol{x}(\xi),\xi)<qV(\boldsymbol{x}(t),t)$, $t-2\tau\leqslant\xi\leqslant t$,则有

$$\int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t+\theta)\overline{A}_0^{\mathrm T}(t+\theta)P_1^{-1}\overline{A}_0(t+\theta)\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta+$$

$$\int_{-h}^{0}\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t-h+\theta)\overline{A}_1^{\mathrm T}(t+\theta)P_2^{-1}\overline{A}_1(t+\theta)\boldsymbol{x}(t-h+\theta)\mathrm{d}\theta\leqslant 2\tau q\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)P\boldsymbol{x}(t).$$

考虑引理 1, $B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T}\leqslant B_\omega B_\omega^{\mathrm T}, h\leqslant\tau$,假设 $\beta_i>0$, $i=1,2,\cdots,6$ 以及式(6)~(8)成立,则通过整理所选 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)P\boldsymbol{x}(t)$对于时间 t 的导数推出

$$\begin{aligned}\dot V\leqslant&\boldsymbol{x}^{\mathrm T}P\{W-2\tau S+2\tau qS+\beta_5^{-1}SN_1^{\mathrm T}N_1S+\beta_6^{-1}SN_2^{\mathrm T}N_2S+\\&\tau A_1P_1N_2^{\mathrm T}(\beta_1I-N_2P_1N_2^{\mathrm T})^{-1}N_2P_1A_1^{\mathrm T}+\tau A_1P_2N_2^{\mathrm T}(\beta_2I-N_2P_2N_2^{\mathrm T})^{-1}N_2P_2A_1^{\mathrm T}\}P\boldsymbol{x}\triangleq\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm T}PR_1P\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

在 $q=1$ 时令 $R=R_1$, R_1 对 q 是单调递增的. 若存在正定矩阵 P,P_1,P_2 和正常数 ε,β_i, $i=1,2,\cdots,6$ 满足式(6)~(8)以及 $R<0$,则由连续性,存在充分小的 $q\geqslant 1+\delta$(其中 $\delta>0$)使得 $R_1<0$,进一步必存在正常数 c 使得满足 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\leqslant -c\|\boldsymbol{x}\|^2<0$. 通过 Schur 补分解技巧,由式(5)可推导出式(6)~(8)和 $R<0$.　证毕.

定理 2. 给定正常数 $\varepsilon>0,\gamma>0$,对属于 $\omega\subseteq\Omega$ 的执行器故障情形,如果对于正定对称矩阵 $S,P_i,i=1,2,3,4$ 和正常数 β_i, $i=1,2,\cdots,7$ 满足下述 LMIs,则闭环系统(1)和(2)在执行器故障情形和满足 H^∞ 约束条件下是二次稳定的.

$$\begin{bmatrix}W & H_1 & H_2 & H_3\\ H_1^{\mathrm T} & -J_1 & 0 & 0\\ H_2^{\mathrm T} & 0 & -J_2 & 0\\ H_3^{\mathrm T} & 0 & 0 & -J_3\end{bmatrix}<0,\quad \begin{bmatrix}S & SN_2^{\mathrm T} & SA_1^{\mathrm T}\\ N_2S & \beta_4I & 0\\ A_1S & 0 & P_2-\beta_4M_2M_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\begin{bmatrix}S & SN_2^{\mathrm T} & \sqrt{2}SA^{\mathrm T} & B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T}\\ N_2S & \beta_3I & 0 & 0\\ \sqrt{2}AS & 0 & P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm T} & 0\\ B_\Omega B_\Omega^{\mathrm T} & 0 & 0 & 2\varepsilon^2(P_1-\beta_3M_1M_1^{\mathrm T})\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

$$\tau[G\quad B_\Omega]^{\mathrm T}P_3[G\quad B_\Omega]+[G\quad B_\Omega]^{\mathrm T}P_4[G\quad B_\Omega]-\gamma^2I<0,$$

其中 $H_3=[A_1\quad N_2^{\mathrm T}\quad I\quad SE^{\mathrm T}]$, $J_3=[P_3-\beta_7M_2^{\mathrm T}M_2\quad \beta_7I\quad P_4\quad I]$.

证明. 只需证明满足 H^∞ 约束条件. 考虑性能指标 $J=\int_0^\infty\{\boldsymbol{z}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm T}(t)\widetilde{\boldsymbol{w}}(t)\}\mathrm{d}t$. 选择 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t),t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}P\boldsymbol{x}+\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\widetilde{\boldsymbol{w}}^{\mathrm T}(s)[G\quad B_\omega]^{\mathrm T}P_3[G\quad B_\omega]\widetilde{\boldsymbol{w}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

其中 P_3 是正定对称矩阵. 通过一些冗长的处理可推证出本定理.　证毕.

4 小结

本文重点研究了在执行器故障情形下具有状态时滞的一类时滞不确定连续系统的鲁棒H^∞可靠控制问题，该不确定性是未知但有界的，并且不必满足匹配条件. 基于二次可靠镇定概念，通过 Razumikhin 定理，导出了结构预先给定的无记忆状态反馈控制律来实现系统鲁棒H^∞可靠控制的充分条件，通过 LMIs 的求解得到了无记忆鲁棒H^∞可靠控制器设计算法，该求解过程无需参数调节.

参 考 文 献

1 Wang J, Su H, Chu J. Robust H^∞ controller design for linear uncertain systems with delayed state and control. *J. Franklin Inst.*, 1998, **335B**(3):517～524

2 曹永岩，孙优贤. 不确定状态滞后系统时滞相关鲁棒H^∞控制. 自动化学报，1999，**25**(2):230～235

3 Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, **37**(3):290～304

4 Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer, 1977

王景成 上海交通大学副教授. 主要研究方向为鲁棒过程控制、时滞系统控制等.

邵惠鹤 上海交通大学教授，博士生导师. 主要研究方向为过程控制理论及工程应用.

(上接第 175 页)

中国自动化学会 2002 年一般专题学术活动计划

项目名称	主要内容	时间	地点	联系人
第 21 届中国控制会议	线性系统；最优控制；鲁棒控制；预测控制；随机控制；自适应控制；模型降价；优化方法；电力系统；交通系统；社会经济系统；生物环境系统等	3 季度	杭州	北京中关村中国科学院系统科学研究所 刘智敏 电话:62532161 邮编:100080
全国(第三届)工业炉窑自动控制学术交流会	交流近年来工业炉窑通过自动控制达到节能目的的科研成果和论文，促进工业炉窑的节能工作	2 季度	广西北海	北京西四环南路 72 号国家冶金自动化研究院 张振华 电话:63812255-3382 邮编:100071
全国(第五届)炼钢、连铸和轧钢自动化学术交流会	交流和推广炼钢、连铸和轧钢自动化技术的最新成果、探讨发展趋势	6 月	贵阳	同上
全国(第七届)自动化应用技术学术交流会	交流和推广自动化新技术、新理论及其在工业应用中的科技成果和论文	9 月	新疆	同上
全国(第八届)工业控制系统应用学术交流会	交流各种工业控制系统应用、研制、开发的新成果、新技术、新方法	7 月	山西五台山	山西太原理工大学山西省自动化学会 张忠怀 电话:(0351)6041057 邮编:030024
第十一届全国电气自动化与电控系统学术年会	直流传动技术、交流传动技术、应用电力电子技术的变流器、计算机与 PLC 控制技术、伺服电机步进电机控制系统、控制理论在工程中的应用、工业应用等	3 季度	西安	天津市河东区津塘路 174 号电气自动化专业委员会秘书处 电话:(022)25962354 邮编:300180 E-mail: caaea@public.tpt.tj.cn

(下转第 271)