第 32 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 32, No. 5
2006 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　September, 2006

不确定时滞线性离散切换系统的鲁棒 H_∞ 控制[1)]

宋政一　　赵 军
(东北大学信息科学与工程学院控制理论与导航技术研究所　沈阳　110004)
(E-mail: songzhy12@163.com)

摘　要　研究一类具有不确定和时滞的线性离散切换系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 利用多 Lyapunov 函数技术, 在基于状态的切换规则下, 给出了这类系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界的充分条件, 以及切换规则和鲁棒 H_∞ 切换控制器的设计方案. 并将结果应用到一类非切换系统, 提出了切换状态反馈控制策略. 最后的仿真例子进一步表明了本文结论的有效性.

关键词　线性离散切换系统, 鲁棒 H_∞ 混杂控制, 多 Lyapunov 函数, 线性矩阵不等式
中图分类号　TP273

Robust H_∞ Control for Linear Discrete-Time Switched Systems with Norm-Bounded Uncertainties and Time-Delay

SONG Zheng-Yi　　ZHAO Jun
(*School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang*　110004)
(E-mail: songzhy12@163.com)

Abstract　The problem of robust H_∞ control is investigated for a class of linear discrete-time switched systems with norm-bounded uncertainties and time-delay. Based on multiple Lyapunov function techniques, a sufficient condition for the problem to be solvable is derived by using a state-based switching law. The robust H_∞ controllers for each subsystem and switching law are simultaneously designed. As a direct application, a switching state feedback strategy is proposed to solve the robust H_∞ control problem for the linear discrete-time non-switched systems. Finally, a simulation example is given to illustrate the validity of the results.

Key words　Linear discrete-time switched system, robust H_∞ hybrid control, multiple Lyapunov function, linear matrix inequality

1　引言

实际系统在运行中不可避免地要受到来自外界扰动的影响, H_∞ 控制理论基于在一定程度上尽可能地抑制扰动对系统性能的影响应运而生. 许多实际系统本身包含着固有的时滞和不确定, 而这些时滞和不确定经常是造成系统不稳定的主要因素. 因此, 近十年来,

1) 国家自然科学基金 (60274009, 60574013) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60274009, 60574013)
收稿日期 2004-12-31　收修改稿日期 2006-5-30
Received December 31, 2004; in revised form May 30, 2006

人们对不确定离散时滞系统 H_∞ 控制问题进行了广泛的研究[1~4]．另一方面，切换系统作为一类特殊的混杂系统具有广泛的应用背景[5]．因此，切换系统激起了人们极大的研究兴趣[6~15]．其中，很多研究结果都是在寻求一共同 Lyapunov 函数的存在．然而，正如文献 [6] 所指出的那样，大多数切换系统不存在这样的共同 Lyapunov 函数，却仍有可能在某些适当选取的切换律下是渐近稳定的．目前对切换律设计问题的研究，主要采用由 Branicky 提出的多 Lyapunov 函数技术[6,7]．但以上这些研究成果都没有涉及离散切换系统，特别是系统中同时含有不确定和时滞情形下的切换律和控制器设计问题．

本文研究不确定时滞线性离散切换系统的鲁棒 H_∞ 控制问题．在所有子系统都不是鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界的假设下，利用多 Lyapunov 函数方法和基于状态的切换规则，给出了系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界的充分条件，以及切换状态反馈控制器和切换律的设计方案．并将该结果应用到通常的具有不确定和时滞的线性离散系统，若不存在单一的状态反馈控制器使系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界，通过设计切换状态反馈控制器，使系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界．最后，以一个仿真例子表明本文结论的有效性．

2　系统描述

在本文中采用如下记号：$l_2[0,\infty)$ 表示平方可和的向量空间．Z^+ 表示非负整数集．$\mu_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值．记号 $*$ 在矩阵里表示一个对称结构．例如，若 L 和 R 是对称矩阵，那么

$$\begin{bmatrix} L & * \\ N & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & N^{\mathrm{T}} \\ N & R \end{bmatrix}$$

考虑如下一类不确定时滞线性离散切换系统

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{k+1} = \hat{A}_\sigma \boldsymbol{x}_k + \hat{A}_{d\sigma}\boldsymbol{x}_{k-d_1} + \hat{B}_\sigma \boldsymbol{u}_k + \hat{B}_{d\sigma}\boldsymbol{u}_{k-d_2} + \hat{H}_{1\sigma}\boldsymbol{w}_k \\ &\boldsymbol{z}_k = \hat{C}_\sigma \boldsymbol{x}_k + \hat{C}_{d\sigma}\boldsymbol{x}_{k-d_1} + \hat{D}_\sigma \boldsymbol{u}_k + \hat{D}_{d\sigma}\boldsymbol{u}_{k-d_2} + \hat{H}_{2\sigma}\boldsymbol{w}_k \\ &\boldsymbol{x}_k = \phi(k), \quad k = -d_1, -d_1+1, \cdots, -1, 0 \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $k \in Z^+$, $\boldsymbol{x}_k \in R^n$ 是系统的状态，$\boldsymbol{u}_k \in R^l$ 是控制输入，$\boldsymbol{w}_k \in R^q$ 是外部扰动输入且 $\boldsymbol{w}_k \in l_2$, $\boldsymbol{z}_k \in R^p$ 是被调输出，$\phi(\cdot)$ 是初始值，d_1, d_2 为有界常值时滞，且均为非负整数．$\sigma(k)$ 是在 $\bar{M} = \{1, 2, \cdots, m\}$ 中取值的待设计的切换信号，$\sigma(k) = i$ 意味着第 i 个子系统被激活[14]．系统矩阵满足如下条件

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{A}_\sigma & \hat{A}_{d\sigma} & \hat{B}_\sigma & \hat{B}_{d\sigma} & \hat{H}_{1\sigma} \\ \hat{C}_\sigma & \hat{C}_{d\sigma} & \hat{D}_\sigma & \hat{D}_{d\sigma} & \hat{H}_{2\sigma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_\sigma & A_{d\sigma} & B_\sigma & B_{d\sigma} & H_{1\sigma} \\ C_\sigma & C_{d\sigma} & D_\sigma & D_{d\sigma} & H_{2\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{x\sigma} \\ E_{z\sigma} \end{bmatrix} \varGamma_\sigma \begin{bmatrix} F_{x\sigma} & F_{dx\sigma} & F_{u\sigma} & F_{du\sigma} & F_{w\sigma} \end{bmatrix} \\ &\qquad \mu_{\max}(\varGamma_\sigma) \leqslant 1 \end{aligned} \tag{2}$$

其中 A_σ,$A_{d\sigma}$,B_σ,$B_{d\sigma}$,$H_{1\sigma}$,C_σ,$C_{d\sigma}$,D_σ,$D_{d\sigma}$,$H_{2\sigma}$,$E_{x\sigma}$,$E_{z\sigma}$,$F_{x\sigma}$,$F_{dx\sigma}$,$F_{u\sigma}$,$F_{du\sigma}$,$F_{w\sigma}$ 为具有适当维数的已知常数矩阵，$\varGamma_\sigma$ 为未知矩阵函数．

定义．给定常数 $\gamma > 0$. 如果存在一个切换律 $\sigma(k)$, 使得对所有允许的参数不确定性，系统 (1) ($\boldsymbol{u}_k = 0$) 满足以下条件：

a) 当 $\boldsymbol{w}_k = 0$ 时，系统 (1) ($\boldsymbol{u}_k = 0$) 是渐近稳定的；

b) 在零初始条件下，对所有非零的 $\boldsymbol{w}_k \in l_2$, 被调输出 $\boldsymbol{z}_k$ 满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{z}_k\|^2 < \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{w}_k\|^2$$

则称系统 (1) ($\boldsymbol{u}_k=0$) 鲁棒稳定且具有 H_∞ 性能界 γ. 如果存在一个切换律 $\sigma(k)$ 及切换状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}_k=K_{\sigma(k)}\boldsymbol{x}_k$, 使得对所有允许的参数不确定性，系统 (1) 的闭环系统鲁棒稳定且具有 H_∞ 性能界 γ, 则称系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ. 此时，称控制器 $\boldsymbol{u}_k=K_{\sigma(k)}\boldsymbol{x}_k$ 为系统 (1) 的鲁棒 H_∞ 切换控制器.

3 鲁棒 H_∞ 控制

在控制器 $\boldsymbol{u}_k=K_{\sigma(k)}\boldsymbol{x}_k$ 的作用下，系统 (1) 的闭环系统为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_{k+1}=(\hat{A}_{\sigma(k)}+\hat{B}_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})\boldsymbol{x}_k+\hat{A}_{d\sigma(k)}\boldsymbol{x}_{k-d_1}+\hat{B}_{d\sigma(k)}K_{\sigma(k-d_2)}\boldsymbol{x}_{k-d_2}+\hat{H}_{1\sigma(k)}\boldsymbol{w}_k\\
&\boldsymbol{z}_k=(\hat{C}_{\sigma(k)}+\hat{D}_{\sigma(k)}K_{\sigma(k)})\boldsymbol{x}_k+\hat{C}_{d\sigma(k)}\boldsymbol{x}_{k-d_1}+\hat{D}_{d\sigma(k)}K_{\sigma(k-d_2)}\boldsymbol{x}_{k-d_2}+\hat{H}_{2\sigma(k)}\boldsymbol{w}_k\\
&\boldsymbol{x}_k=\phi(k),\quad k=-d_1,-d_1+1,\cdots,-1,0
\end{aligned}\tag{3}$$

引理 1. 给定常数 $\gamma>0$. 如果存在矩阵 $P_i>0$, $i\in\bar{M}$ 和矩阵 $R_1>0$, $R_2>0$, 使得矩阵不等式

$$J_i=\begin{bmatrix}
\tilde{A}_i^{\rm T}P_i\tilde{A}_i-P_i+R_1+K_i^{\rm T}R_2K_i+\gamma^{-1}\tilde{C}_i^{\rm T}\tilde{C}_i+\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_{ij}(P_j-P_i) & * & * & *\\
\hat{A}_{di}^{\rm T}P_i\tilde{A}_i+\gamma^{-1}\hat{C}_{di}^{\rm T}\tilde{C}_i & \hat{A}_{di}^{\rm T}P_i\hat{A}_{di}-R_1+\gamma^{-1}\hat{C}_{di}^{\rm T}\hat{C}_{di} & * & *\\
\hat{B}_{di}^{\rm T}P_i\tilde{A}_i+\gamma^{-1}\hat{D}_{di}^{\rm T}\tilde{C}_i & \hat{B}_{di}^{\rm T}P_i\hat{A}_{di}+\gamma^{-1}\hat{D}_{di}^{\rm T}\hat{C}_{di} & \hat{B}_{di}^{\rm T}P_i\hat{B}_{di}-R_2+\gamma^{-1}\hat{D}_{di}^{\rm T}\hat{D}_{di} & *\\
\hat{H}_{1i}^{\rm T}P_i\tilde{A}_i+\gamma^{-1}\hat{H}_{2i}^{\rm T}\tilde{C}_i & \hat{H}_{1i}^{\rm T}P_i\hat{A}_{di}+\gamma^{-1}\hat{H}_{2i}^{\rm T}\hat{C}_{di} & \hat{H}_{1i}^{\rm T}P_i\hat{B}_{di}+\gamma^{-1}\hat{H}_{2i}^{\rm T}\hat{D}_{di} & \hat{H}_{1i}^{\rm T}P_i\hat{H}_{1i}+\gamma^{-1}\hat{H}_{2i}^{\rm T}\hat{H}_{2i}-\gamma I
\end{bmatrix}<0\tag{4}$$

成立，则系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ. 其中

$$\tilde{A}_i=\hat{A}_i+\hat{B}_iK_i,\quad \tilde{C}_i=\hat{C}_i+\hat{D}_iK_i$$

证明. 选取备选的 Lyapunov 函数为

$$V(k,\boldsymbol{x}_k)=V_{\sigma(k)}(k,\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{x}_k^{\rm T}P_{\sigma(k)}\boldsymbol{x}_k+\sum_{l=k-d_1}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\rm T}R_1\boldsymbol{x}_l+\sum_{l=k-d_2}^{k-1}\boldsymbol{x}_l^{\rm T}K_{\sigma(l)}^{\rm T}R_2K_{\sigma(l)}\boldsymbol{x}_l,\quad i\in\bar{M}\tag{5}$$

设计切换律为

$$\sigma(k)=\arg\min_{i\in\bar{M}}\{\boldsymbol{x}_k^{\rm T}P_i\boldsymbol{x}_k\}\tag{6}$$

为了叙述简便，不妨令

$$\sigma(k)=i,\quad \sigma(k-d_2)=j,\quad \tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\rm T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k^{\rm T} & \boldsymbol{x}_{k-d_1}^{\rm T} & \boldsymbol{x}_{k-d_2}^{\rm T}K_j^{\rm T} & \boldsymbol{w}_k^{\rm T}\end{bmatrix}$$

引入

$$\Delta V_i(k,\boldsymbol{x}_k)=V_i(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1})-V_i(k,\boldsymbol{x}_k),\quad W(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{w}_k)=-\gamma^{-1}\boldsymbol{z}_k^{\rm T}\boldsymbol{z}_k+\gamma\boldsymbol{w}_k^{\rm T}\boldsymbol{w}_k$$

则

$$\Delta V_i(k,\boldsymbol{x}_k)-W(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{w}_k)=\tilde{\boldsymbol{x}}_k^{\rm T}J_i\tilde{\boldsymbol{x}}_k-\sum_{j=1}^{m}\beta_{ij}\boldsymbol{x}_k^{\rm T}(P_j-P_i)\boldsymbol{x}_k$$

由 (4) 和 (6) 可知

$$\Delta V_i(k,\boldsymbol{x}_k)-W(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{w}_k)<0$$

a) 当 $\boldsymbol{w}_k=0$ 时， $\Delta V_i(k,\boldsymbol{x}_k)<W(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{w}_k)=-\gamma^{-1}\boldsymbol{z}_k^{\rm T}\boldsymbol{z}_k<0$, 所以 $V_{\sigma(k)}(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1})<V_{\sigma(k)}(k,\boldsymbol{x}_k)$ 成立. 由 (6) 可知 $V_{\sigma(k+1)}(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1})\leqslant V_{\sigma(k)}(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1})$, 即 $V_{\sigma(k+1)}(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1})<V_{\sigma(k)}(k,\boldsymbol{x}_k)$. 因此系统 (1) 的闭环系统是渐近稳定的.

b) 在零初始条件下，由 (6) 可知 $\Delta V(k,\boldsymbol{x}_k) = V_{\sigma(k+1)}(k+1,\boldsymbol{x}_{k+1}) - V_{\sigma(k)}(k,\boldsymbol{x}_k) \leqslant \Delta V_{\sigma(k)}(k,\boldsymbol{x}_k)$, 所以 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} W(\boldsymbol{z}_k,\boldsymbol{w}_k) > \sum\limits_{k=0}^{\infty}\Delta V(k,\boldsymbol{x}_k) = V(\infty) > 0$, 即 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{z}_k\|^2 < \gamma^2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{w}_k\|^2$. □

注 1. 引理 1 虽然给出了系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ 的充分条件．但引理 1 不能直接应用，因为条件 (4) 中含有不确定项.

引理 2[11]**.** 设 Y,M,N 是给定的适当维数矩阵，对任意满足 $\mu_{\max}(\varGamma) \leqslant 1$ 的 $\varGamma$,

$$Y + M\varGamma N + N^{\mathrm T}\varGamma^{\mathrm T}M^{\mathrm T} < 0$$

的充要条件是存在一个常数 $\lambda > 0$, 使得

$$Y + \lambda MM^{\mathrm T} + \frac{1}{\lambda}N^{\mathrm T}N < 0$$

引理 3. 给定常数 $\gamma > 0$. 以下条件是等价的：

1) 若存在矩阵 $P_i > 0, K_i, R_1 > 0, R_2 > 0$ 和常数 $\beta_{ij} \geqslant 0, \forall(i,j) \in \bar M \times \bar M$ 满足 (4) 式.

2) 若存在矩阵 $Q_i > 0, Y_i, S_1 > 0, S_2 > 0$ 和常数 $\lambda_i > 0, \beta_{ij} \geqslant 0, \forall(i,j) \in \bar M \times \bar M$ 满足

$$\begin{bmatrix}
-Q_i + \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_{ij}(Q_iQ_j^{-1}Q_i - Q_i) & * & * & * & * & * & * \\
0 & -\gamma I & * & * & * & * & * \\
C_iQ_i + D_iY_i & H_{2i} & -\gamma I + \lambda_i E_{zi}E_{zi}^{\mathrm T} + C_{di}S_1C_{di}^{\mathrm T} + D_{di}S_2D_{di}^{\mathrm T} & * & * & * & * \\
A_iQ_i + B_iY_i & H_{1i} & \lambda_i E_{xi}E_{zi}^{\mathrm T} + A_{di}S_1C_{di}^{\mathrm T} + B_{di}S_2D_{di}^{\mathrm T} & -Q_i + \lambda_i E_{xi}E_{xi}^{\mathrm T} + A_{di}S_1A_{di}^{\mathrm T} + B_{di}S_2B_{di}^{\mathrm T} & * & * & * \\
F_{xi}Q_i + F_{ui}Y_i & F_{wi} & F_{dxi}S_1C_{di}^{\mathrm T} + F_{dui}S_2D_{di}^{\mathrm T} & F_{dxi}S_1A_{di}^{\mathrm T} + F_{dui}S_2B_{di}^{\mathrm T} & -\lambda_i I + F_{dxi}S_1F_{dxi}^{\mathrm T} + F_{dui}S_2F_{dui}^{\mathrm T} & * & * \\
Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 & * \\
Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2
\end{bmatrix} < 0 \qquad (7)$$

证明. 令

$$Q_i = P_i^{-1}, Y_i = K_iQ_i, \quad i \in \bar M, \qquad S_j = R_j^{-1}, \quad j = 1,2 \qquad (8)$$

利用矩阵的 Schur 补性质、引理 2 及矩阵变换易证. □

定理 1. 给定常数 $\gamma > 0$. 如果存在矩阵 $Q_i > 0$, Y_i, $S_1 > 0$, $S_2 > 0$ 和常数 $\lambda_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $\forall(i,j) \in \bar M \times \bar M$, 使得不等式组 (7) 成立，则系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ. 同时使系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ 的状态反馈阵由下式给出

$$K_i = Y_iQ_i^{-1}, \quad i \in \bar M \qquad (9)$$

证明. 由引理 3 可知，若 (7) 式成立，则 (4) 式成立．由切换律 (6) 和引理 1 可知，系统 (1) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ. 由 (8) 式可知，相应的状态反馈阵由 (9) 式给出. □

注 2. 对于给定的 $\beta_{ij} \geqslant 0, \forall(i,j) \in \bar M \times \bar M$, 利用矩阵的 Schur 补性质， (7) 式可以转化为易于求解的线性矩阵不等式 (LMI).

4 鲁棒 H_∞ 混杂控制

考虑如下具有不确定和时滞的线性离散系统

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{x}_{k+1} = \hat{A}\boldsymbol{x}_k + \hat{A}_d\boldsymbol{x}_{k-d_1} + \hat{B}\boldsymbol{u}_k + \hat{B}_d\boldsymbol{u}_{k-d_2} + \hat{H}_1\boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{z}_k = \hat{C}\boldsymbol{x}_k + \hat{C}_d\boldsymbol{x}_{k-d_1} + \hat{D}\boldsymbol{u}_k + \hat{D}_d\boldsymbol{u}_{k-d_2} + \hat{H}_2\boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{x}_k = \phi(k), \quad k = -d_1, -d_1+1, \cdots, -1, 0 \end{array} \tag{10}$$

其中，式中的符号所表示的意义同系统 (1).

对于给定的 $\gamma > 0$, 我们研究系统 (10) 的鲁棒 H_∞ 控制问题. 如果不存在单一的状态反馈控制器使系统 (10) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ, 则考虑通过其他形式的控制器来求解系统 (10) 的鲁棒 H_∞ 控制问题. 而切换状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}_k = K_{\sigma(k)}\boldsymbol{x}_k$ 提供了这种可能性，这种控制器也称为混杂状态反馈控制器 [15].

定理 2. 给定常数 $\gamma > 0$. 如果存在矩阵 $Q_i > 0$, Y_i, $S_1 > 0$, $S_2 > 0$ 和常数 $\lambda_i > 0$, $\beta_{ij} \geqslant 0$, $\forall (i,j) \in \bar{M} \times \bar{M}$, 使得不等式

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -Q_i + \sum\limits_{j=1}^{m}\beta_{ij}(Q_iQ_j^{-1}Q_i - Q_i) & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -\gamma I & * & * & * & * & * \\ CQ_i + DY_i & H_2 & -\gamma I + \lambda_i E_z E_z^{\mathrm{T}} + C_d S_1 C_d^{\mathrm{T}} + D_d S_2 D_d^{\mathrm{T}} & * & * & * & * \\ AQ_i + BY_i & H_1 & \lambda_i E_x E_z^{\mathrm{T}} + A_d S_1 C_d^{\mathrm{T}} + B_d S_2 D_d^{\mathrm{T}} & -Q_i + \lambda_i E_x E_x^{\mathrm{T}} + A_d S_1 A_d^{\mathrm{T}} + B_d S_2 B_d^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ F_x Q_i + F_u Y_i & F_w & F_{dx} S_1 C_d^{\mathrm{T}} + F_{du} S_2 D_d^{\mathrm{T}} & F_{dx} S_1 A_d^{\mathrm{T}} + F_{du} S_2 B_d^{\mathrm{T}} & -\lambda_i I + F_{dx} S_1 F_{dx}^{\mathrm{T}} + F_{du} S_2 F_{du}^{\mathrm{T}} & * & * \\ Q_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 & * \\ Y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 \end{array}\right] < 0 \tag{11}$$

成立，则系统 (10) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ. 同时使系统 (10) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ 的状态反馈阵由下式给出

$$K_i = Y_i Q_i^{-1}, \quad i \in \bar{M} \tag{12}$$

这里，被设计的切换律为

$$\sigma(k) = \arg\min_{i\in\bar{M}}\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q_i^{-1}\boldsymbol{x}_k\} \tag{13}$$

证明. 若系统 (1) 中的 m 个子系统的系统矩阵都相同，由定理 1 可知定理 2 成立. □

注 3. 如果存在单一的状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}_k = K\boldsymbol{x}_k$ 使系统 (10) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ, 则不必考虑在各控制器之间的切换问题，而这只是一种平凡的情形. 在这种情形的结果即为 $m=1$ 时的不等式 (11). 因此，定理 2 为文献 [2] 结果的推广.

5　仿真例子

考虑 $m=2$ 时的系统 (1), 其参数如下：

$$A_1=\begin{bmatrix}1.5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix},\ A_{d1}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix},\ A_{d2}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ B_{d1}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},\ B_{d2}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix},\ H_{11}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ H_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ C_1=\begin{bmatrix}0.7 & -0.25\end{bmatrix},$$

$$C_2=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.25\end{bmatrix},\ C_{d1}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\end{bmatrix},\ C_{d2}=\begin{bmatrix}0 & 0.1\end{bmatrix},\ D_1=0.5,\ D_2=0.25,\ D_{d1}=0.02,$$

$$D_{d2}=0.05,\ H_{21}=0.5,\ H_{22}=0.25,\ E_{x1}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix},\ E_{x2}=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix},\ E_{z1}=0.01,\ E_{z2}=0.02,$$

$$\varGamma_1=\sin t,\ \varGamma_2=\cos t,\ F_{x1}=\begin{bmatrix}0.15 & -0.3\end{bmatrix},\ F_{x2}=\begin{bmatrix}-0.3 & 0.2\end{bmatrix},\ F_{dx1}=\begin{bmatrix}0 & 0.05\end{bmatrix},$$

$$F_{dx2}=\begin{bmatrix}0.05 & 0\end{bmatrix},F_{u1}=0.1,F_{u2}=0.2,F_{du1}=0.3,F_{du2}=0.1,F_{w1}=0.5,F_{w2}=0.3 \tag{14}$$

系统 (14) 中的每个子系统都不是鲁棒镇定的，而系统 (14) 满足定理 1 的条件，由定理 1 可得

$$\varOmega_1=\left\{(x_1,x_2)\left|0.0068x_1^2+0.0006x_1x_2-0.0042x_2^2\geqslant 0\right.\right\}$$

$$\varOmega_2=\left\{(x_1,x_2)\left|0.0068x_1^2+0.0006x_1x_2-0.0042x_2^2< 0\right.\right\}$$

显然有 $\varOmega_1\cup\varOmega_2=R^n$. 根据定理 1, 使系统 (14) 鲁棒镇定的切换律设计如下

$$\sigma(k)=\begin{cases}1, & \boldsymbol{x}_k\in\varOmega_1\\ 2, & \boldsymbol{x}_k\in\varOmega_2\end{cases} \tag{15}$$

使系统 (14) 鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界 γ 的反馈增益阵为

$$K_1=\begin{bmatrix}-1.3951 & 0.0556\end{bmatrix},\quad K_2=\begin{bmatrix}-0.0260 & -1.2895\end{bmatrix} \tag{16}$$

系统 (14) 的状态响应曲线和控制曲线分别如图 1, 图 2 所示.

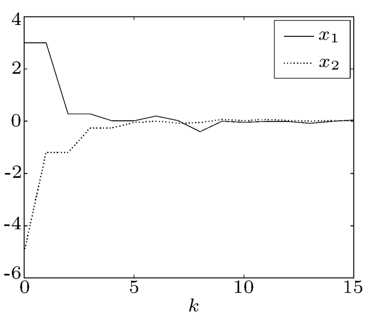

图 1　系统 (14) 的状态响应曲线

Fig. 1　The state response of system (14)

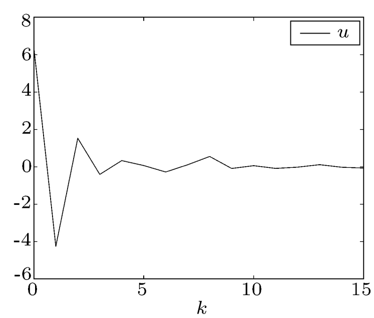

图 2　系统 (14) 控制 u 的曲线

Fig. 2　The response curve of control u

6　结论

本文研究一类具有不确定和时滞的线性离散切换系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 在所有子系统都不是鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界的假设下，利用多 Lyapunov 函数方法和基于状

态的切换规则，用线性矩阵不等式给出了系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界的充分条件，同时还给出了切换状态反馈控制器和切换律的设计. 对于通常的具有不确定和时滞的线性离散系统，若不存在单一的控制器使系统鲁棒镇定且具有 H_∞ 性能界，本文设计了一个切换状态反馈控制器来完成对该系统的鲁棒 H_∞ 控制. 从而可以看出，切换控制策略扩大了控制器增益矩阵的选取范围，为鲁棒 H_∞ 控制问题的求解提供了更多的可能性.

References

1 Song S H, Kim J K. H_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state. *Automatica*, 1998, **34**(1): 137 ∼139

2 Kim J K, Park H B. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system. *Automatica*, 1999, **35**(8): 1443∼1451

3 Xu S Y, Chen T W. Robust H_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delays *via* exponential output feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 2004, **51**(3): 171∼183

4 Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, Park P G. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay. *Automatica*, 2004, **40**(1): 65∼72

5 Savkin A V, Matveev A S. Cyclic linear differential automata: a simple class of hybrid dynamical systems. *Automatica*, 2000, **36**(5): 727∼734

6 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems. *Control Systems Magazine*, 1999, **19**(5): 59∼70

7 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 475∼482

8 Pettersson S, Lennartson B. Stability and robustness for hybrid systems. In: Proceedings of the 35th Conference on Decision & Control. Kobe, Japan: IEEE Press, 1996. 1202∼1207

9 Zhao J, Dimirovski G M. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(4): 574∼578

10 Daafouz J, Riedinger P, Iung C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1883∼1887

11 Xie D M, Wang L, Hao F, Xie G M. Robust stability analysis and control synthesis for discrete-time uncertain switched systems. In: Proceedings of the 42nd Conference on Decision & Control. Hawaii, USA: IEEE Press, 2003. 4812∼4817

12 Cuzzola F A, Morari M. An LMI approach for H_∞ analysis and control of discrete-time piecewise affine systems. *International Journal of Control*, 2002, **75**(16/17): 1293∼1301

13 Nie H, Zhao J. Hybrid state feedback H_∞ robust control for a class of linear systems with time-varying norm-bounded uncertainty. In: Proceedings of the American Control Conference. Denver, USA: IEEE Press, 2003. 3608∼3613

14 Sun Z D, Ge S S. Switched Linear Systems-Control and Design. Berlin: Springer-Berlin Heidelberg, 2004. 101∼110

15 Skafidas E, Evans R J, Savkin A V, Petersen I R. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 1999, **35**(4): 553∼564

宋政一 博士生，研究方向为切换系统和鲁棒控制.

(**SONG Zheng-Yi** Ph. D. candidate at Northeastern University. His research interests include switched systems and robust control.)

赵 军 教授，博士生导师，研究方向为混杂系统，非线性系统，几何控制理论及切换控制.

(**ZHAO Jun** Professor at Northeastern University. His research interests include nonlinear and hybrid systems, geometric control theory, and switching control.)