第21卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 3
1995 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1995

研究简报

参数型不确定系统的鲁棒严正实镇定

郭 磊　赵克友
（青岛大学理工学院　青岛　266071）

关键词： 不确定系统，鲁棒性，严正实性.

1 引言

考虑区间对象族

$$\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=\frac{\mathscr{N}(s,\boldsymbol{q})}{\mathscr{D}(s,\boldsymbol{r})},\tag{1}$$

其中 $\mathscr{N}(s,\boldsymbol{q})=\sum_{i=0}^{m}q_is^i,\ q_i\in[q_i^-,q_i^+]$，　$\mathscr{D}(s,\boldsymbol{r})=s^n+\sum_{i=0}^{n-1}r_is^i,\ r_i\in[r_i^-,r_i^+]$.
设 $\mathscr{N}(s,\boldsymbol{q}),\mathscr{D}(s,\boldsymbol{r})$ 的 Kharitonov 多项式分别为 n_i 与 $d_i(i=1,2,3,4)$，其定义见文[1]. 假定 $q_m>0,n\geqslant m,n_i\in\mathscr{H},d_i\in\mathscr{H}$（$\mathscr{H}$ 表示 Hurwitz 多项式全体）.

关于区间对象族的鲁棒稳定性、鲁棒严正实性以及鲁棒镇定问题都已有了较好的研究结果[1-2]. 设给定控制器为 $c(s)=n_c(s)/d_c(s)$，这里考虑它的鲁棒严正实镇定问题，即寻找 $c(s)$，使闭环传递函数 $n_c\mathscr{N}/(d_c\mathscr{D}+n_c\mathscr{N})$ 为鲁棒严正实的. 最近，文[3]提出了鲁棒严正实镇定问题，并对同时具有结构型和非结构型不确定性的系统给出了分析和综合结果. 但它涉及的一个重要条件就是参数型不确定系统的严正实镇定准则，这就是本文所要解决的问题.

2 问题的分析

设

$$\mathscr{N}_{ij}=\{n(s):n(s)=\lambda n_i(s)+(1-\lambda)n_j(s),\lambda\in[0,1]\}\ (ij=13,23,41,42),\tag{2}$$

则 $\mathscr{N}_{ij}$ 为 $\mathscr{N}(s,\boldsymbol{q})$ 的 4 个 Kharitonov 棱边[1].

引理 1.[2-3] $g(s)=n(s)/d(s)$ 为严正实的充要条件是：i) $g(0)>0$；ii) $n(s)\in\mathscr{H}$；iii) $d(s)+\alpha jn(s)\in\mathscr{H},\forall\alpha\in R$.

定理 1. $c(s)$ 鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 当且仅当 $c(s)$ 严正实镇定 16 个棱边对象族 $\mathscr{N}_{ij}/d_k$，$ij=13,23,41,42,k=1,2,3,4$.

证明. 只证充分性. 记$[n_k,n_l]=\lambda n_k+(1-\lambda)n_l$，$\lambda\in[0,1]$. 由引理 1 知只需证

本文于 1993 年 9 月 28 日收到.

明: $n_c\mathscr{N}\subset\mathscr{H}$; $d_c\mathscr{D}+n_c\mathscr{N}\subset\mathscr{H}$; $d_c\mathscr{D}+(1+\alpha j)n_c\mathscr{N}\subset\mathscr{H}(\alpha\neq 0)$. 由条件已知, $n_c[n_k, n_l]$, $d_cd_i+(1+\alpha j)n_c[n_k, n_l]\subset\mathscr{H}$, 结合 Box 定理[1,4]可知, 只需证明 $d_c[d_k, d_l]+n_c\cdot n_i\subset\mathscr{H}$; $d_c[d_k,d_l]+(1+\alpha j)n_c\cdot n_i\subset\mathscr{H}$. 再利用文[2]引理 5.2 和已知条件可得 $n_cn_i/\{n_cn_i+d_c[d_k, d_l]\}$ 鲁棒严正实.

由定理 1 的证明可见,为了得到顶点类型的结果, 关键在于讨论 $c(s)$ 满足什么条件时下式成立:

$$d_cd_k+(1+\alpha_j)n_c\mathscr{N}_{ij}\subset\mathscr{H}\Longleftrightarrow d_cd_k+(1+\alpha j)n_cn_l\in\mathscr{H}. \tag{3}$$

其中 $k,l=1,2,3,4,ij=13,23,41,42$. 这涉及复系数棱边族的鲁棒稳定性判据.

记 $f(s,\lambda)=f_0(s)+\lambda f_1(s)$, $\lambda\in[0,1]$. 其中 $f_0(s)$, $f_1(s)$ 为复系数多项式, $f(s,\lambda)$ 的次数不变 ($\lambda\in[0,1]$).

引理 2.[1,4] 若 $\mathrm{d}[\arg f_1(jw)]/\mathrm{d}w\leqslant 0$, 则

$$f(s,\lambda)\subset\mathscr{H}\Longleftrightarrow f(s,0),\ f(s,1)\in\mathscr{H}.$$

结合已有的复棱边多项式鲁棒稳定的有关结果, 利用定理 1 可得若干顶点型结果.

定理 2. 设 $c(s)=k/d_c(s)$, $k>0$, 则 $c(s)$ 鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 的充要条件是 $c(s)$ 严正实镇定 16 个顶点对象 $n_k/d_l, k, l=1,2,3,4$.

证明. 类似于文[4]定理 5 的证明. 由以上分析可知只证(3)式成立即可. 注意到 $n_c(s)=k$, 而 $\mathrm{d}[\arg(1+\alpha j)n_c(jw)]/\mathrm{d}w=0$, 根据引理 2 便证得此定理.

3 问题的综合

文[3]提出了鲁棒严正实镇定问题的控制器设计方法, 针对区间对象族利用定理 1—2 可使该法大大简化. 下面讨论正则的控制器的设计. 由文[3]知, 若使设计的控制器是正则的,应有 $n-m=0$ (或 1).

引理 3.[3] 当 $n-m=1$ 时,必存在正则的控制器鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$; 当 $n-m=0$ 时,必存在严正则的控制器鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$.

又由文[3]命题 1 及其证明可知: 当 $n-m=+1$ 时, 可设计常数 $k>0$, 使 $k\mathscr{D}+(1+\alpha j)\mathscr{N}\subset\mathscr{H}$; 当 $n-m=0$ 时, 可设计 $(\varepsilon_1s+\varepsilon_0)$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_0>0$, 使 $(\varepsilon_1s+\varepsilon_0)\mathscr{D}+(1+\alpha j)\mathscr{N}\subset\mathscr{H}$. 联系定理 2 便有以下定理.

定理 3. (i) 当 $n-m=1$ 时, 一个比例控制器 $c(s)=k(k>0)$ 就可鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$, 这可由 $c(s)$ 严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 的 16 个顶点对象来完成; (ii) 当 $n-m=0$ 时, 控制器 $c(s)=\dfrac{1}{\varepsilon_1s+\varepsilon_0}$ ($\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_0>0$) 就可鲁棒严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$, 这也可由 $c(s)$ 严正实镇定 $\mathscr{P}(s,\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ 的 16 个顶点对象来完成.

$n-m=1$ 的情形比较简单, 下面以 $n-m=0$ 的情形为例说明设计方法. 由定理 3,此时满足要求的控制器 $c(s)=1/(\varepsilon_1s+\varepsilon_0)$ 只需满足:

$$(\varepsilon_1s+\varepsilon_0)d_k+n_l\in\mathscr{H}, \tag{4}$$

$$(\varepsilon_1s+\varepsilon_0)d_k+(1+\alpha j)n_l\in\mathscr{H}\quad(\alpha\neq 0). \tag{5}$$

其中 $k,l=1,2,3,4$. 因此可利用实、复多项式稳定性的系数判据——Hurwitz 判据和

Bilharz 判据给出 $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ 的范围。

若 $n_c(s)$ 不取常数，虽然顶点型结果不一定成立，但相应的控制器却可能存在，原则上也可根据定理 1 利用 Hurwitz 和 Bilharz 判据求取控制器参数的范围（或确定固定的 $c(s)$ 是否满足要求），但这涉及参数 $\lambda(\lambda \in [0,1])$ 的变化，将引起计算的复杂性。

4 结束语

综上所述，对控制器鲁棒严正实镇定区间对象族的问题，给出了鲁棒严正实镇定的充要条件，并着重讨论了顶点型结果成立的条件。其中的定理 1 还可推广到一般的多项式多面体[2]的鲁棒 D 域严正实镇定问题。最后针对区间对象族提出了控制器的设计方法：根据定理 3，利用 Hurwitz 和 Bilharz 判据可方便地设计出满足要求的（严）正则控制器。此方法亦可推广到具有非线性环节的区间对象族，使设计的控制器具有鲁棒渐近超稳定性。

参　考　文　献

[1] Barmish B R, Kang H I. A survey of extreme point results for robustness of control system. *Automatica*, 1993, **29**(1): 13—15.

[2] Dasgupta S et al. Frequency domain condition for the robust stability of linear and nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans CAS*, 1991, **38**(4): 389—397.

[3] 贾英民，高为炳，程勉. 不确定系统的鲁棒严格正实镇定问题. 中国科学 A 辑，1992,(8): 867—874.

[4] 郭磊，赵克友. 具有补偿器的菱形对象族的鲁棒稳定性. 控制理论与应用，1994,**11**(4): 472—476.

THE PROBLEM OF ROBUST STRICT POSITIVE REAL STABILIZATION FOR PARAMETRIC UNCERTAIN SYSTEMS

Guo Lei　　Zhao Keyou

(*College of Science* and *Engineering*, *Qingdao University Qingdao* 266071 *China*)

Key words: Uncertain system, robustness, strict positive realness.