

# 城市交通均衡流分配的多模式模型及算法

陈森发 周晶 朱玉全

(南京东南大学管理学院, 210018)

## 摘 要

本文建立了城市交通均衡流分配的多模式模型。在深入分析 Frank-Wolfe 算法的基础上,提出一种加速收敛的新算法——FVN 法。实例计算表明,其结果令人满意。

**关键词:** 交通分配,多模式,收敛。

## 一、前 言

交通分配是城市交通管理与控制的重要环节。迄今为止,大多数文献论述了交通分配的单模式模型,即道路网中只有一种车的情况;少量文献[1—3]讨论了多模式模型。

文献[1,2]采用折合法,即把所有不同类型的车辆都折合成当量车;本质上仍为单模式模型。这种方法难以做到在各种运行状况下使当量车与被折合的车种完全等同。文献[3]研究了两种车(自行车和一般机动车)的模型和算法,但在路网结构模型、交叉口的费用、算法的收敛速度等方面尚未深入讨论,因而,与实际应用还有一段距离。

本文在文献[3]的基础上,探讨了路网的结构模型、道路交叉口的费用函数, Frank-Wolfe 算法的收敛速度等问题;同时将模型推广到  $m(m \geq 2)$  种车混行的情况,并用于实际路网的分配,获得满意的结果。

## 二、城市路网实用的结构模型

城市路网一般用有向图  $G = [N, A]$  表示,其中  $N$  为节点集,  $A$  为有向弧集。在以往的文献中,节点代表道路交叉口、居民集中区、商业中心等等;有向弧代表路段。交叉口的费用,在交通分配计算时看成常数或干脆不考虑,这对交通管理与控制来说,将引起较大的偏差。

本文提出将交叉口的节点展开的方法:丁字交叉口展开成6个节点(见图1),根据车流的实际运行方向,在这6个节点间引入相应的6条弧。类似地,十字平交路口展开成8个节点(见图2),根据车流的实际运行方向,在这8个节点间引入相应的12条弧。其它类型路口,以此类推。

这样,路网中的路口和路段的费用都以弧的费用体现。

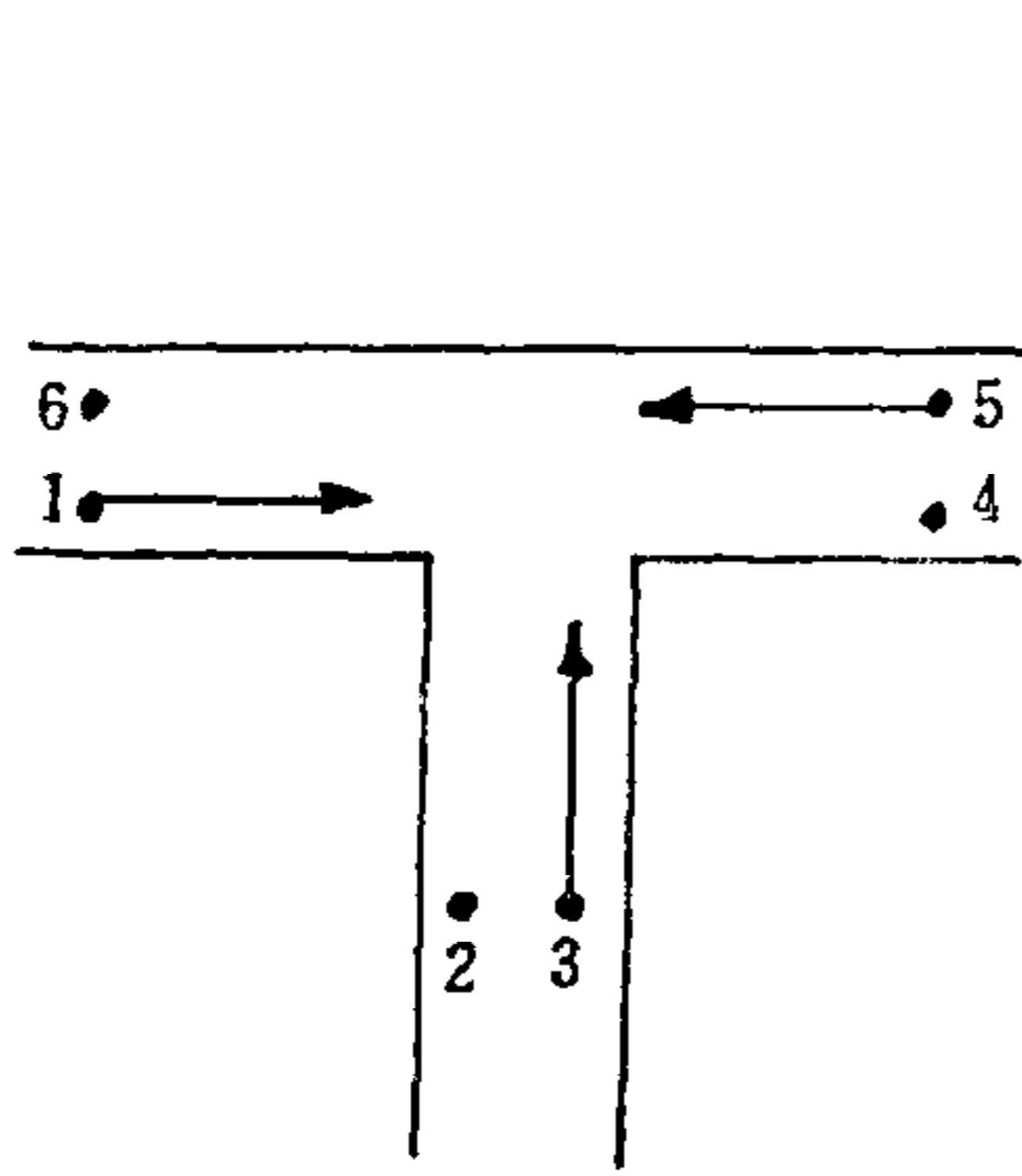


图 1 丁字交叉口的节点

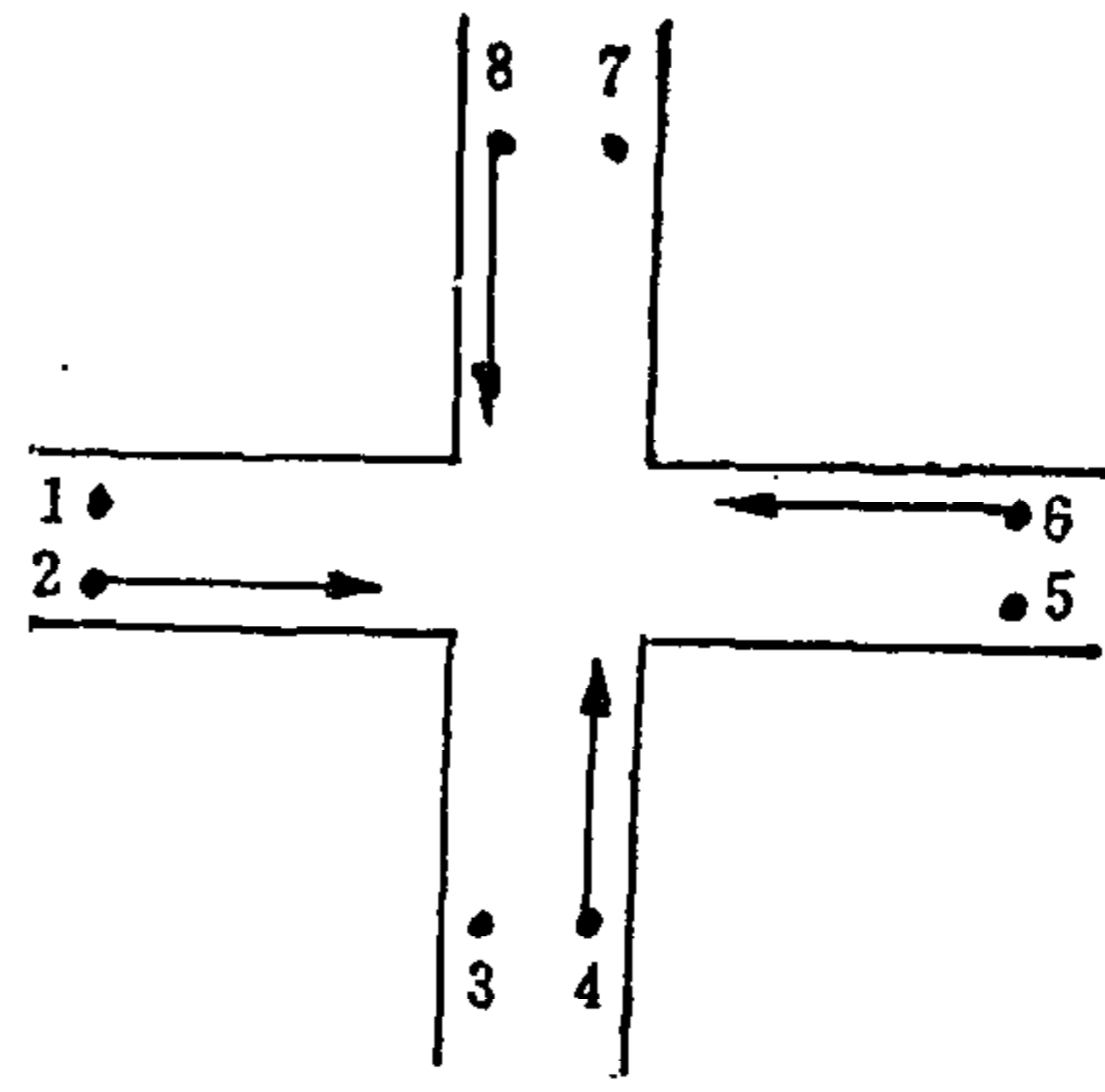


图 2 十字交叉口的节点

假设系统中有  $m(m \geq 1)$  种车, 每种车的路网结构都相同, 即  $G = [N, A]$ . 如果在某路口禁止某种车左转弯, 或者某路段的一个方向上禁止某种车通行, 则将该种车在相应的弧上费用定义为  $\infty$ ; 这样, 只要改变不同车种的路网上弧的费用, 不必改变其路网结构, 使得编程方便, 易于在计算机上实现。

### 三、交通分配的多模式模型

设  $I$  为全部  $OD$  对的集合;  $q_{ij}$  为第  $i$  对  $OD$  对间第  $j$  种车的交通需求量,  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $x_a^j$  为弧  $a$  上第  $j$  种车的流量,  $a \in A$ ;  $A$  为路网中所有弧的集合;  $h_p^j$  为路径  $p$  上第  $j$  种车的流量,  $p \in P_i$ ;  $P_i$  为第  $i$  对  $OD$  对间所有路径的集合,  $i \in I$ ;  $C_p^j$  为路径  $p$  上第  $j$  种车的费用,  $p \in P_i$ ;  $C_a^j$  为弧  $a$  上第  $j$  种车的费用. 由流量守恒定律, 路网中的路径流应满足下面约束:

$$\sum_{p \in P_i} h_p^j = q_{ij}, h_p^j \geq 0. \tag{1}, (2)$$

弧  $a$  上的流量和路径上流量关系为

$$x_a^j = \sum_{i \in I} \sum_{p \in P_i} \delta_{ap} \cdot h_p^j, \tag{3}$$

式中

$$\delta_{ap} = \begin{cases} 1, & \text{当弧 } a \text{ 在路径 } p \text{ 上,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \tag{4}$$

若  $\mu_{ij}$  表示第  $i$  对  $OD$  对间第  $j$  种车的最短出行时间, 即

$$\mu_{ij} = \min\{C_p^j | p \in P_i\}, i \in I, \tag{5}$$

根据 Wardrop 第一原理(用户最优原则), 在均衡状态, 对每一种车, 所有使用了的路径, 其费用相等并且小于任何未使用路径的费用, 即

$$C_p^j - \mu_{ij} \begin{cases} = 0, & \text{当 } h_p^j > 0, \\ \geq 0, & \text{当 } h_p^j = 0. \end{cases} \tag{6}$$

式(6)与下面的关系式等价:

$$\begin{cases} (C_p^j - \mu_{ij})h_p^j = 0, \\ C_p^j - \mu_{ij} \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$p \in P_i, i \in I, j = 1, 2, \dots, m.$$

路径费用  $C_p^j$  和弧的费用  $C_a^j$  有如下关系:

$$C_p^j = \sum_{a \in A} \delta_{ap} \cdot C_a^j. \quad (8)$$

另外,记  $\mu_j = \{\mu_{ij}\}$ ;  $q_j = \{q_{ij}\}$ ;  $h_j = \{h_p^j\}$ ;  $x_j = \{x_a^j\}$ ,那么,在用户最优原则下,多模式交通均衡流的分配问题,就是求一组弧流量  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$ ,以及在相应状态下的最短出行时间  $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_m^*$ ,满足下面六个关系式

$$x_a^{j*} = \sum_{i \in I} \sum_{p \in P_i} \delta_{ap} h_p^{j*}, [C_p^{j*} - \mu_{ij}^*] h_p^{j*} = 0, \quad (9), (10)$$

$$C_p^{j*} - \mu_{ij}^* \geq 0, \sum_{p \in P_i} h_p^{j*} = q_{ij}, \quad (11), (12)$$

$$h_p^{j*} \geq 0, C_p^j \geq 0, \quad (13), (14)$$

这就是交通均衡流分配的非线性互补模型;它们不难转换为所谓变分不等式模型.

#### 四、多模式交通均衡流分配的新算法

众所周知,解决大规模交通分配基本的有效算法是 Frank-Wolfe 算法<sup>[4]</sup> (简称 FW 法). FW 法实质上是最速下降法在有约束条件下的推广,因而,当接近最优解时,会出现所谓锯齿现象. 对此,很多学者提出了改进算法. 这些算法可归为两大类:一类是日本学者 MASAO FUKUSHIMA 提出的改变搜索方向的方法<sup>[5]</sup>;另一类是智利学者 Weintraub 等人提出的改变搜索步长的方法<sup>[6]</sup>. 前者有一定的理论基础,也有严格的收敛性证明;但对搜索步长的确定显得生硬,没有随情况的改变而改变. 后者是一种启发式算法;但其搜索步长是事先确定的. 虽然 Weintraub 等人在随机网络上作了很多试验,并推荐了一些步长取值的策略;但仍摆脱不了试探的局面.

本文提出同时改变搜索方向和搜索步长的方法;因借用了有约束条件下的牛顿法,故称为 FWN 法 (Frank-Wolfe-Newton Method).

设城市交通分配的一般非线性规划模型为

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \text{s.t. } x \in G, \end{cases} \quad (15)$$

其中  $G$  为  $x$  的可行域;  $f(x)$  是  $x$  的连续函数,且有三阶偏导数. 在  $x^k$  处,  $f(x)$  可展开成为

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x^k) + (x - x^k)^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k) (x - x^k) \\ & + O(\|x - x^k\|^2) \end{aligned} \quad (16)$$

式中,  $\nabla f(x^k)$  表示  $f(x)$  在  $x^k$  处的梯度;  $\nabla^2 f(x^k)$  表示  $f(x)$  在  $x^k$  处的二阶偏导数矩阵,即 Hessian 阵;  $O(\|x - x^k\|^2)$  为  $\|x - x^k\|^2$  的高阶无穷小量.

当  $\mathbf{x}^k$  接近最优点时,  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) \rightarrow 0$ ; 而式(16)右边第三项总大于零。如果式(16)右边第三项大于第二项的绝对值, 就会产生锯齿现象。

由式(16)可知, 要使  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^k)$ , 应有

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) < 0. \quad (17)$$

要使  $f(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}^k$  的邻域内下降最快, 应使式(17)左边的值最小; 如果  $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$  是可逆矩阵, 且此问题是无约束的, 那么式(17)左边的极小值点为

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^k - (\nabla^2 f(\mathbf{x}^k))^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}^k). \quad (18)$$

这就是所谓的牛顿法<sup>[7]</sup>。但在有约束条件下, 求式(17)的极小值则较麻烦, 它相当于求解下列问题

$$\begin{cases} \min [(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k), \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in G. \end{cases} \quad (19)$$

式(19)与下面问题等价

$$\begin{cases} \min H = \mathbf{x}^T \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) \mathbf{x}^k, \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in G. \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)得

$$\nabla H = \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k). \quad (21)$$

如果把式(20)作为另一非线性规划问题, 取  $\mathbf{z}^0 = \mathbf{x}^k$  为其初始可行解(注: 用  $\mathbf{z}$  表示  $\mathbf{x}$ , 以便与原问题有区别); 用与 FW 法类似的思路求解, 设它的第  $l$  次迭代解为  $\mathbf{z}^l$ , 则其第  $l+1$  次迭代的子问题为

$$\begin{cases} \min [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{z}^l - \mathbf{x}^k) + \nabla f(\mathbf{x}^k)]^T \mathbf{y}, \\ \text{s.t. } \mathbf{y} \in G. \end{cases} \quad (22)$$

与 FW 法不同, 这里取

$$\mathbf{z}^{l+1} = \mathbf{z}^l + \lambda (\mathbf{y}^l - \mathbf{z}^l) + \mu (\mathbf{y}^{l-1} - \mathbf{z}^l). \quad (23)$$

式中  $\lambda, \mu$  为待定常数。式(23)右边增加了  $(\mathbf{y}^{l-1} - \mathbf{z}^l)$  项, 且  $\lambda$  和  $\mu$  都可以调整, 这就起到同时改变搜索方向和搜索步长的作用, 从而, 加快了收敛速度。

令  $\mathbf{P} = \mathbf{y}^l - \mathbf{z}^l, \mathbf{Q} = \mathbf{y}^{l-1} - \mathbf{z}^l$ , 由式(20), (23)得

$$\begin{aligned} H(\mathbf{z}^{l+1}) &= (\mathbf{z}^l + \lambda \mathbf{P} + \mu \mathbf{Q})^T \nabla f(\mathbf{x}^k) + \frac{1}{2} (\mathbf{z}^l + \lambda \mathbf{P} + \mu \mathbf{Q})^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^k) (\mathbf{z}^l \\ &\quad + \lambda \mathbf{P} + \mu \mathbf{Q}) - (\mathbf{z}^l + \lambda \mathbf{P} + \mu \mathbf{Q})^T \nabla f(\mathbf{x}^k) \mathbf{x}^k. \end{aligned} \quad (24)$$

根据库恩-图克最优性原理, 函数  $H$  取极值的一阶条件为

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \mu} = 0. \quad (25), (26)$$

由此可以推出

$$\lambda = \frac{A_2 B_2 - A_1 B_3}{B_1 B_3 - B_2^2}, \quad \mu = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 B_3 - B_2^2}. \quad (27), (28)$$

其中

$$A_1 = P^T \nabla f(x^k) - P^T \nabla^2 f(x^k) x^k + P^T \nabla^2 f(x^k) z^l, \quad (29)$$

$$A_2 = Q^T \nabla f(x^k) - Q^T \nabla^2 f(x^k) x^k + Q^T \nabla^2 f(x^k) z^l, \quad B_1 = P^T \nabla^2 f(x^k) P, \quad (30), (31)$$

$$B_2 = P^T \nabla^2 f(x^k) Q, \quad B_3 = Q^T \nabla^2 f(x^k) Q. \quad (32), (33)$$

将求得的  $\lambda, \mu$  值代入式(23), 可得  $z^{l+1}$  的值.

迭代过程的收敛准则为

$$\left| \frac{z_a^{l+1} - z_a^l}{z_a^l} \right| < \varepsilon. \quad (34)$$

式中,  $\varepsilon$  为给定的小的正数, 由精度要求而定.

尽管 FW 法在接近最优解时收敛速度较慢, 但在递推过程的前期收敛效果还是令人满意的. FWN 法利用了 FW 法这一优点; 在计算过程的前期阶段, 用 FW 法计算, 接近最优解时, 才用加速收敛措施. 整个 FWN 法的基本计算步骤如下:

准备. 设置系统初始可行解  $x^0$ , 给定小的正数  $\varepsilon$ , 给定正整数  $L_1$  和  $L_2$ .

第一步. 执行  $L_1$  次 FW 法.

第二步. 收敛判别. 若

$$\left| \frac{x_a^k - x_a^{k-1}}{x_a^{k-1}} \right| < \varepsilon \quad (35)$$

成立, 则计算停止; 否则转第三步.

第三步.  $x^{k-1} \leftarrow x^k; y^{k-1} \leftarrow y^k$ ; 执行一次 FW 法, 得  $x^k, y^k$ .

第四步.  $z^0 \leftarrow x^k, y^0 \leftarrow y^k, l \leftarrow 0$ .

第五步.  $l \leftarrow l + 1$ , 求解子问题(22), 得最优解为  $y^l$ .

第六步. 由式(27)–(33), 求出  $\lambda, \mu$ .

第七步. 由式(23), 算出  $z^{l+1}$ .

第八步. 若  $l \geq L_2$ , 则  $x^k \leftarrow z^{l+1}, k \leftarrow k + 1$ , 转第二步; 否则转下一步.

第九步. 若式(34)对所有  $a \in A$  成立, 那么  $x^k \leftarrow z^{l+1}, k \leftarrow k + 1$ , 转第二步; 否则转第五步.

上面的算法, 用于多模式交通分配时, 在每一步中, 因为有  $m$  种车, 所以要有  $j = 1, 2, \dots, m$  的循环迭代.

## 五、目标函数和费用函数

式(9)–(14)是规模十分庞大的等式与不等式约束组, 直接进行求解是十分困难的. 根据交通问题, 可假定每一条弧的费用仅仅依赖于弧本身的流量; 在需求不变的条件下, 对某种车  $j$ , 由 Beckmann 推导出的结论<sup>[8]</sup>, 式(9)–(14)与下述的凸规划问题等价:

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a^{j*}} C_a^j(x) dx, \\ \text{s.t.} \sum_{p \in P_i} h_p^{j*} = q_{ii}, \\ x_a^{j*} = \sum_{i \in I} \sum_{p \in P_i} \delta_{ap} h_p^{j*}, \\ h_p^{j*} \geq 0. \end{cases} \quad (36)$$

它为式(15)的规划模型的具体表达式。

式(36)的目标函数  $f(x)$  中  $C_a^i(x)$  为弧  $a$  上第  $i$  种车的费用函数。它表示弧  $a$  上第  $i$  种车的行驶时间。取

$$C_a^i(x) = A_{a0}^i + A_{a1}^i x_a + A_{a2}^i x_a^2 + A_{a3}^i x_a^3 + A_{a4}^i x_a^4, \quad (37)$$

式中  $A_{a0}^i - A_{a4}^i$  为常系数, 与弧上各种车的比例及运行状况有关, 可由仿真模型多次仿真, 再用回归分析方法确定。而

$$x_a = (x_a^1, x_a^2, \dots, x_a^k, \dots, x_a^m) \quad (38)$$

表明  $C_a^i(x)$  与各种车的流量有关, 但在迭代计算中, 可暂时只考虑当前车种流量的更新值。式(37)中, 若令  $A_{a1}^i = A_{a2}^i = A_{a3}^i = 0$ , 则它与美国联邦公路局确定的公式<sup>[9]</sup>完全相同, 可见它是一种更合理的表达式。

## 六、实 例

本文的模型和算法, 曾用于多例, 均获得较满意结果。下面举其中一例。

某市的交通网系统, 有 112 个节点和 186 条弧; 其中 14 个  $O$  点和 14 个  $D$  点。为简明起见, 设系统中只有两种车。在 Gould Concept 32/6705 超小型计算机上计算, 结果见表 1。从表中可看到, FWN 法收敛速度是相当快的; 而且随精度要求的提高, 它优于 FW 法就越明显。(因篇幅所限, 图和  $OD$  量未列出, 有兴趣者可写信与第一作者联系。)

表 1 FWN 法和 FW 法比较

比较	算法	FW	法	FWN	法
		迭代次数	计算时间(秒)	迭代次数	计算时间(秒)
0.05		46	160	48	167
0.03		73	239	68	223
0.02		94	329	77	270
0.01		142	577	109	442

本文建立的城市交通均衡流的多模式模型符合中国城市道路网的混合交通情况; 提出的 FWN 法, 收敛速度快, 优于 FW 法。

本文的计算工作, 曾得到东南大学 86 级研究生陈坚柏、吴畏的协助, 在此深表感谢。

## 参 考 文 献

- [1] 任福田、徐吉谦等, 交通工程学导论, 中国建筑工业出版社, 1987 年。
- [2] Dafermos, S., The General Multimodal Network Equilibrium Problem with Elastic Demand, *Network*, 1(1982), 57-72.
- [3] 吴继峰、唐焕文, 一个综合交通分配模型及其算法, 大连理工大学学报, 1(1989), 9-15.
- [4] 陈森发, 网络模型及其优化, 东南大学出版社, 1991 年。
- [5] Masao Fukushima, A Modified Frank-Wolfe Algorithm for Solving the Traffic Assignment Problem, *Transportation Research*, 2B(1984), 169-177.
- [6] Weintraub, A., Ortiz, C. and Gonzales, J., Accelerating Convergence of the Frank-Wolfe Algorithm, *Transportation Research*, 19(1985), (2), 113-122.

- [7] 席少霖、赵凤治,最优化计算方法,上海科学技术出版社,1983年。  
 [8] Dafermos, S. C., An Extended Traffic Assignment Model with Application to Two-way Traffic, *Transportation Science*, **5**(1971), (6), 369—389.  
 [9] M. A. P., Taylor, A Note on Using Davision's Function in Equilibrium Assignment, *Transportation Research*, **3A**(1984), 181—199.



**陈森发** 1945年生。1969年毕业于上海交通大学无线电系, 1982年获南京工学院工学硕士学位。现任东南大学管理学院副教授。主要研究兴趣是系统建模、决策分析和网络系统优化。



**周晶** 1963年生。1983年毕业于南京工学院数力系, 1986年获南京工学院工学硕士学位。



**朱玉全** 1965年生。1988年毕业于徐州师范学院数学系,现为东南大学管理学院硕士研究生。

## MULTIMODE MODELS AND THEIR ALGORITHM FOR URBAN TRAFFIC EQUILIBRIUM ASSIGNMENT

CHEN SENFA ZHOU JING ZHU YUCHUAN

(Management College, Southeast University, Nanjing 210018)

### ABSTRACT

In this paper, multimode models for urban traffic equilibrium assignment are built. A new algorithm——FWN is proposed, which can converge fast. The computational examples show that the results obtained are satisfactory.

**Key words:** Traffic assignment, multimode, converge.