

# 持续有界扰动下的非线性 $H_\infty$ 鲁棒预测控制

何德峰<sup>1</sup> 季海波<sup>1</sup> 郑涛<sup>1</sup>

**摘要** 针对未知但有界的持续扰动, 提出了一种约束非线性  $H_\infty$  鲁棒预测控制策略. 首先, 引入离散系统的输入状态稳定性概念; 其次, 采用仿射输入定义预测控制的控制律, 并给出相应终端约束集的估计解法. 进一步, 得到预测控制闭环系统的鲁棒稳定性结论. 最后, 数值仿真验证了上述策略的有效性.

**关键词** 模型预测控制, 输入状态稳定性, 鲁棒稳定性, 仿射输入, 非线性约束系统

**中图分类号** TP273

## Nonlinear $H_\infty$ Robust Predictive Control with Bounded Persistent Disturbances

HE De-Feng<sup>1</sup> JI Hai-Bo<sup>1</sup> ZHENG Tao<sup>1</sup>

**Abstract** The paper presents an  $H_\infty$  robust model predictive control (MPC) scheme for constrained nonlinear systems subject to unknown but bounded persistent disturbances. Firstly, the notion of the input-to-state stability (ISS) for discrete-time systems is introduced; secondly, an affine input is defined to serve as the control action of MPC and an estimate solution of its terminal constrained set is addressed. Then, the robust stability of the controlled system with the mentioned scheme is achieved. Finally, a numerical simulation demonstrates the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words** Model predictive control, input-to-state stability, robust stability, affine input, constrained nonlinear systems

模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 是一种处理约束的有效控制策略, 已在工业控制中得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>, 同时其名义稳定性也得到了深入的研究并取得丰硕的成果<sup>[2]</sup>. 然而 MPC 是一种基于有限时域目标函数在线优化实现的控制算法, 因此当过程存在约束和扰动时, MPC 的可行性和稳定性通常得不到保证<sup>[3]</sup>. 对此, 国内外学者针对不同的扰动提出了各种鲁棒预测控制<sup>[2-13]</sup>, 其中  $H_\infty$  鲁棒预测控制是一种处理有界扰动的有效策略<sup>[2, 7-11]</sup>. 但据我们所知, 目前  $H_\infty$  鲁棒 MPC 主要考察由状态限界的扰动, 而这在本质上通常是一种衰减扰动. 对于持续有界扰动, 通常采用双模控制策略<sup>[4]</sup>. 然而, 这种策略在线优化求解困难而且得到的是非连续的控制律. 最近, 文献 [13] 采用输入状态实际稳定性概念得到了持续扰动下的鲁棒预测控制的充分条件. 然而, 文献采用的目标函数并没有显式地考虑扰动抑制, 使得目标函数缺乏明确的物理意义, 同时也未给出优化问题可行的充分条件. 受此启发, 本文考察未知的持续有界扰动下的闭环系统鲁棒性问题: 结合  $H_\infty$  控制理论, 使目标函数

能显式地处理扰动项, 同时得到非线性  $H_\infty$  预测控制是输入状态稳定的充分条件和保证优化可行的充分条件即持续扰动的上界. 另一方面, 在非线性  $H_\infty$  鲁棒预测控制中, 特别是对离散系统, 终端约束集通常不易求解<sup>[10-11]</sup>. 为此, 定义仿射输入作为预测控制的控制律, 其中仿射系数是基于  $H_\infty$  控制理论离线确定的定常矩阵, 并由此得到一种估计终端约束集的简便方法. 最后通过数值仿真验证了该控制策略的可行性和有效性.

符号:  $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数;  $\mathbf{u}$  表示序列  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots\}$ ;  $\mathbf{x}^+$  表示状态  $\mathbf{x}$  的下一时刻状态<sup>[2]</sup>;  $L_2^m[0, b]$  表示在有限时间  $b < +\infty$  内信号平方可加的信号空间 (对应于连续时间系统的平方可积的信号空间). 函数  $f_1: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  称为  $\mathcal{K}$  类函数, 如果它是连续的并严格递增, 且  $f_1(0) = 0$ ; 函数  $f_2: \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  称为  $\mathcal{K}_\infty$  类函数, 如果它是一个  $\mathcal{K}$  类函数且当  $s \rightarrow \infty$  时, 有  $f_2(s) \rightarrow \infty$ ; 函数  $f_3: \mathbf{R}_{\geq 0} \times \mathbf{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  称为  $\mathcal{KL}$  类函数, 如果对于任意固定的  $t \geq 0$ ,  $f_3(\cdot, t)$  是一个  $\mathcal{K}$  类函数, 而对于任意固定的  $s \geq 0$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $f_3(s, t) \rightarrow 0$ .

### 1 系统描述

考虑离散非线性约束定常系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} H\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad t = 0, 1, \dots \\ \mathbf{u}(t) &\in U, \mathbf{x}(t) \in X, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, 向量  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^p$  和  $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^q$  分别为  $t$  时刻系统的状态、输入、扰动和辅助输出;  $U$  和  $X$  分别为输入约束和状态约束. 假设  $\mathbf{a}(\cdot)$ 、 $\mathbf{b}(\cdot)$  和  $\mathbf{g}(\cdot)$  分别是定义在  $\mathbf{R}^n$  上的已知光滑函数. 不失一般性, 取原点为系统 (1) 的期望平衡点.

**假设 1.** 系统 (1) 的状态是完全可观测的;  $U$  和  $X$  是紧凸集且  $0$  为约束集的内点.

**假设 2.** 持续扰动  $\mathbf{w}(t)$  满足如下约束, 并称这样的扰动为容许扰动

$$W(r) = \{\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^p : \|\mathbf{w}(t)\| \leq r, r \geq 0, t = 0, 1, \dots\} \quad (2)$$

其中  $r$  表示持续扰动的上界. 这里  $W(r)$  可以描述一类范数有界的不确定非线性系统<sup>[13]</sup>.

**注 1.** 如果每个时刻信号范数有界, 那么对于任意给定的有限时间  $T$ , 信号范数在  $[0, T]$  内总是平方可加的, 即  $\mathbf{w}(t) \in L_2^p[0, T]$ , 从而能量也是有限的.

下面介绍输入状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS) 的相关定义及性质.

考察如下离散非线性系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t)), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t = 0, 1, \dots \quad (3)$$

**定义 1**<sup>[14]</sup>. 系统 (3) 称为输入状态稳定的 (ISS), 如果对于任意输入  $\mathbf{w}(\cdot) \in W(r)$  和初始条件  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 都存在一个  $\mathcal{K}_\infty$  类函数  $\alpha$  和  $\mathcal{KL}$  类函数  $\beta$ , 使得系统满足

$$\|\mathbf{x}(t+1; \mathbf{x}_0, \mathbf{w})\| \leq \beta(\|\mathbf{x}_0\|, t) + \alpha(r) \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}(0), \dots, \mathbf{w}(t-1)\}$ ,  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{w})$  为系统 (3) 在输入  $\mathbf{w}$  作用下以  $\mathbf{x}_0$  为初始条件的  $t$  时刻的状态响应.

收稿日期 2006-09-15 收修稿日期 2007-03-12  
Received September 15, 2006; in revised form March 12, 2007  
国家自然科学基金 (60674029), 高等学校博士学科点专项科研基金 (20050358044) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (60674029), the Specialized Research Fund for Doctoral Program of Higher Education of China (20050358044)  
1. 中国科学技术大学自动化系 合肥 230026  
1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00215

**引理 1.** 系统 (3) 是输入状态稳定的, 如果存在一个连续的函数  $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$  满足

$$\begin{cases} \alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) + \delta_1(r) \\ V(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})) - V(\mathbf{x}) \leq \delta_2(\|\mathbf{w}\|) - \alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^p \quad (5)$$

其中, 函数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$ ,  $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{K}$ , 并把函数  $V(\cdot)$  称为系统的 ISS-Lyapunov 函数.

**证明.** 引理 1 的证明思路同输入状态实际稳定性 (Input-to-state practical stability) 相似, 感兴趣的读者可参见文献 [13–14].  $\square$

**注 2.** ISS 稳定性意味着系统 (3) 在不受扰动或仅受衰减扰动作用时, 闭环系统是原点渐近稳定的; 而当系统扰动为持续有界扰动时, 闭环系统是有界稳定的. 本文的目的就是针对有界持续扰动 (2), 设计非线性约束系统 (1) 的鲁棒预测控制器, 使得综合系统相对于扰动是 ISS 稳定的.

## 2 $H_\infty$ 鲁棒预测控制

考虑系统 (1), 给定预测步长  $T$  并定义  $T$  步优化控制序列  $\mathbf{u}$  为如下的仿射输入序列<sup>[15]</sup>

$$\mathbf{u}(k) = K\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k), \quad k \in [t, t+T-1] \quad (6)$$

其中, 仿射系数阵  $K$  为常系数阵, 离线计算; 偏差  $\mathbf{e}(k)$  为优化变量. 显然, 偏差  $\mathbf{e}(k)$  与输入  $\mathbf{u}(k)$  是一一对应的. 进一步, 定义  $t$  时刻非线性鲁棒预测控制策略即微分对策问题如下

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &= \min_{\mathbf{e}} \max_{\mathbf{w}} J(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}(t)) \quad (7) \\ \text{s.t. } \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(k))\mathbf{u}(k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(k))\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{u}(k) &\in U, \mathbf{w}(k) \in W(r), \mathbf{x}(k) \in X, \mathbf{x}(t+T) \in \Omega_c \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_t, k \in [t, t+T-1] \end{aligned} \quad (8)$$

这里,

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}(t)) = E(\mathbf{x}(t+T)) + \sum_{k=t}^{t+T-1} [\|\mathbf{z}(k)\|^2 - \varepsilon^2(\|\mathbf{w}(k)\|^2 - r^2)] \quad (9)$$

其中  $\mathbf{x}_t$  是  $t$  时刻的初始条件;  $\varepsilon$  是扰动加权系数 (不失一般性, 取  $\varepsilon=1$ );  $\Omega_c$  和  $E(\mathbf{x}(t+T))$  是离线计算的终端约束集和终端罚函数. 如果对策问题 (6)~(9) 可行, 那么可得  $t$  时刻的最优序列  $\mathbf{e}^* = \{\mathbf{e}(t)^*, \dots, \mathbf{e}(t+T-1)^*\}$ , 相应地得到控制序列  $\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}(t)^*, \dots, \mathbf{u}(t+T-1)^*\}$ , 并把当前控制量  $\mathbf{u}^*(t)$  作为 MPC 控制律作用于系统 (1). 下一时刻更新当前初始条件, 重新优化计算.

**注 3.** 在常规预测控制算法中, 为了减小在线优化的计算量, 通常取控制步长  $T_c$  小于预测步长  $T_p$ . 为描述方便, 取  $T_c = T_p = T$ , 但所得结论对  $T_c \leq T_p$  同样成立.

**注 4.** 常规模型预测控制是一种基于开环优化的反馈控制, 然而扰动的存在使得对策问题在开环优化下变得保守甚至不可行. 因此, 文献 [2, 5, 9] 等提出了闭环优化策略. 然而闭环优化使得对策问题的在线优化复杂化, 所以文献 [10–11] 建议采用折中的仿射输入结构 (6). 这种结构既保留了抑制扰动的闭环成分 (至少局部地), 又保留了利于在线优化计算的开环成分.

### 2.1 离线参数的计算

设系统 (1) 的状态方程在原点的线性化方程为

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + G\mathbf{w}(t), \quad t = 0, 1, \dots \quad (10)$$

其中  $A = \partial \mathbf{a}(0)/\partial \mathbf{x}$ ,  $B = \mathbf{b}(0)$ ,  $G = \mathbf{g}(0)$ .

**假设 3.** 系统 (10) 存在非负定矩阵  $P$  满足 Riccati 不等式组 (11), 并且矩阵  $A + BK_1 + GK_2$  是稳定的, 其中  $K_1 = -B^T P[I + (BB^T - GG^T)P]^{-1}A$ ,  $K_2 = G^T P[I + (BB^T - GG^T)P]^{-1}A$ :

$$\begin{cases} A^T P[I + (BB^T - GG^T)P]^{-1}A + H^T H - P \leq 0 \\ G^T P G - I < 0 \end{cases} \quad (11)$$

**引理 2.** 当假设 1~3 成立时, 如果定义  $E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ , 那么系统 (1) 存在一个由常数  $c > 0$  所定义的原点邻域  $\Omega_c = \{\mathbf{x} \in X : E(\mathbf{x}) \leq c\}$ , 满足: 1)  $K_1 \mathbf{x} \in U, \forall \mathbf{x} \in \Omega_c$ ; 2) 当反馈控制律  $\mathbf{u} = K_1 \mathbf{x}$  作用于系统 (1) 时, 有如下不等式成立

$$E(\mathbf{x}^+) - E(\mathbf{x}) + \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2 < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \quad (12)$$

**证明.** 如果假设 3 成立, 则由  $H_\infty$  控制理论<sup>[16]</sup> 可知, 系统 (10) 存在鞍点  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) = (K_1 \mathbf{x}, K_2 \mathbf{x})$ , 其中  $K_1$  和  $K_2$  如假设 3 所示. 定义系统 (1) 的 Hamiltonian 函数如下

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = E(\mathbf{x}^+) - E(\mathbf{x}) + \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{w}\|^2$$

令  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{w}$  并将  $\mathbf{u}^*$  和  $\mathbf{w}^*$  代入上式

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)^T P \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) - \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \\ &\quad \mathbf{x}^T H^T H \mathbf{x} + \mathbf{u}^{*T} \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{*T} \mathbf{w}^* = \\ &\quad \mathbf{x}^T (\tilde{A}^T P \tilde{A} + K_1^T K_1 - K_2^T K_2 - P + \\ &\quad H^T H) \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})^T P (\varphi(\mathbf{x}) + 2\tilde{A}\mathbf{x}) = \\ &\quad \mathbf{x}^T \Pi \mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

其中, 矩阵  $\tilde{A} = A + BK_1 + GK_2$ , 向量  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, K_1 \mathbf{x}, K_2 \mathbf{x}) - \tilde{A}\mathbf{x}$ , 对称阵  $\Pi = \tilde{A}^T P \tilde{A} + K_1^T K_1 - K_2^T K_2 - P + H^T H$  及标量  $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})^T P (\varphi(\mathbf{x}) + 2\tilde{A}\mathbf{x})$ . 令  $\Delta = I + (BB^T - GG^T)P$ , 则将  $K_1$  和  $K_2$  代入  $\Pi$  并整理得

$$\begin{aligned} \Pi &= (A + BK_1 + GK_2)^T P (A + BK_1 + GK_2) + \\ &\quad (B^T P \Delta^{-1} A)^T B^T P \Delta^{-1} A - (G^T P \Delta^{-1} A)^T \times \\ &\quad G^T P \Delta^{-1} A - P + H^T H = \\ &\quad A^T P A - P + H^T H + 2A^T P (GG^T - BB^T) P \Delta^{-1} A + \\ &\quad (P \Delta^{-1} A)^T \Delta (GG^T - BB^T) P \Delta^{-1} A = \\ &\quad H^T H - P + A^T P \Delta^{-1} A \end{aligned}$$

将  $\Pi$  代入  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$  得

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) = \mathbf{x}^T \{A^T P [I + (BB^T - GG^T)P]^{-1} A - P + H^T H\} \mathbf{x} + \Phi(\mathbf{x})$$

定义原点邻域  $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in X : \Phi(\mathbf{x}) \leq 0\}$ , 则由 Riccati 不等式 (11) 可得  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_1$ .

将函数  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  在  $(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)$  点 Taylor 展开

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \\ \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \end{bmatrix}^T \times \\ \left( R(\mathbf{x}) + O\left(\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \\ \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \end{bmatrix} \right\| \right) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \\ \mathbf{w} - \mathbf{w}^* \end{bmatrix}$$

其中  $O(s)$  表示  $s$  的高阶无穷小量,

$$R(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} b(\mathbf{x})^T P b(\mathbf{x}) + I_m & b(\mathbf{x})^T P g(\mathbf{x}) \\ g(\mathbf{x})^T P b(\mathbf{x}) & g(\mathbf{x})^T P g(\mathbf{x}) - I_p \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

那么当  $\mathbf{u}(\mathbf{x})^*$  作用于系统 (1) 时, Hamiltonian 函数为

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)^T (R_{22}(\mathbf{x}) + \\ O(\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^*\|)) (\mathbf{w} - \mathbf{w}^*)$$

再次定义原点的邻域  $\Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : R_{22} < 0\} \subseteq \Omega_1$ . 显然当  $\mathbf{x} \in \Omega_2$  时, 上式满足  $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}) < 0$ .

最后, 考虑输入约束  $U$ . 任取一个常数  $c > 0$  并定义原点邻域  $\Omega_c = \{\mathbf{x} \in X : E(\mathbf{x}) \leq c\}$ , 使其满足  $\Omega_c \subseteq \Omega_2$  和  $K_1 \mathbf{x} \in U, \forall \mathbf{x} \in \Omega_c$ . 那么, 由约束集  $U$  和  $X$  是包含原点的紧凸集以及不等式 (11) 可知,  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  是非空的紧凸集, 从而存在一个由正常数  $c$  所定义的原点邻域  $\Omega_c$  满足命题.  $\square$

**注 5.** 显然, 精确求解约束集  $\Omega_c$  是十分困难的 (即使是线性系统)<sup>[10]</sup>. 对此, 本文给出一种较简单的估计方法: 先任意给定一个较大的常数  $c > 0$ , 求解如下的优化问题 (13) 得极大值  $\alpha$ . 若  $\alpha > 0$ , 则减小常数  $c$  并重新计算直到  $\alpha \leq 0$ , 此时的常数  $c$  记为  $c^*$ , 则  $c^*$  定义了约束集  $\Omega_c$  的一个估计.

$$\alpha = \max_{\mathbf{x} \in X} \Phi(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } R_{22}(\mathbf{x}) < 0, K_1 \mathbf{x} \in U \\ E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq c \quad (13)$$

## 2.2 鲁棒稳定性

**定义 2.** 考虑系统 (1), 如果对于任意容许扰动序列  $\mathbf{w}$ , 输入序列  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}(k), k = 0, \dots, T-1\}$ , 满足: 1)  $\mathbf{u}(k) \in U$ ; 2)  $\mathbf{x}(t; \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0) \in X, t = 1, \dots, T$ ; 3)  $\mathbf{x}(T; \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_0) \in \Omega_c$ , 那么  $\mathbf{u}$  称为系统的一个容许输入序列.

**定义 3.** 考虑初始条件  $\mathbf{x}_t (t = 0, 1, \dots)$ , 如果对任意容许扰动序列  $\mathbf{w}$ , 系统 (1) 至少存在一个容许输入序列  $\mathbf{u}$ , 那么称  $\mathbf{x}_t$  是可行初始条件. 称可行初始条件的全体组成的集合  $I_x(T)$  为可行初始集.

显然,  $I_x(T)$  满足  $\Omega_c \subseteq I_x(T); I_x(T_1) \subseteq I_x(T_2), T_1 \leq T_2$ .

**定义 4.** 给定非空集合  $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ , 如果被控系统存在一个反馈控制  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U$ , 使得闭环系统对任意  $\mathbf{x} \in \Omega$  和容许扰动  $\mathbf{w}$ , 满足  $\mathbf{x}^+|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})} \in \Omega$ , 那么称  $\Omega$  是被控系统的一个鲁棒不变集.

**假设 4.** 设局部反馈闭环系统  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})K_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{w} = F(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  关于  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{w}$  是局部 Lipschitz 连续的, 即存在 Lipschitz 常数  $0 < L_x < \infty, 0 < L_w < \infty$ , 满足

$$\|F(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}_1) - F(\mathbf{x}_2, \mathbf{w}_2)\| \leq L_x \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + L_w \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|, \\ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega_c, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W(r) \quad (14)$$

**引理 3.** 如果假设 1~4 成立, 且扰动的上界  $r$  满足条件 (15), 则对策问题 (6)~(9) 在  $t$  时刻可行意味着在  $t+1$  时刻可行, 从而终端约束集  $\Omega_c$  是系统 (1) 的一个鲁棒不变集

$$r \leq \frac{\sqrt{c}(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}L_x)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}L_w} \quad (15)$$

其中  $\lambda_1$  和  $\lambda_n$  分别为矩阵  $P$  的最大和最小特征值.

**证明.** 设  $t$  时刻的最优序列  $\mathbf{e}_t^* = \{\mathbf{e}(t)^*, \dots, \mathbf{e}(t+T-1)^*\}$ , 对应的输入序列为  $\mathbf{u}_t^* = \{\mathbf{u}(t)^*, \dots, \mathbf{u}(t+T-1)^*\}$ , 容许扰动序列  $\mathbf{w}$ . 把  $\mathbf{u}_t^*$  按时间顺序作用于被控系统 (1), 则有状态  $\mathbf{x}(t+T; \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t^*, \mathbf{w}) \in \Omega_c$ , 而  $t+1$  时刻系统状态  $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}(t+1; \mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t)^*, \mathbf{w}(t))$ . 以  $\mathbf{x}_{t+1}$  为  $t+1$  时刻的初始条件, 构造如下输入序列

$$\mathbf{u}_{t+1} = \{\mathbf{u}(t+1)^*, \dots, \mathbf{u}(t+T-1)^*, K_1 \mathbf{x}(t+T)\}$$

显然, 要使命题成立, 只要上述构造序列是  $t+1$  时刻的一个可行输入序列即可, 亦即证明系统在  $t+T+1$  时刻的状态满足  $\mathbf{x}(t+T+1; \mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{w}) \in \Omega_c$ .

当线性控制律  $K_1 \mathbf{x}$  作用于系统 (1) 时, 由假设 4 可知

$$\|\mathbf{x}^+\| \leq L_x \|\mathbf{x}\| + L_w r, \forall \mathbf{x} \in \Omega_c$$

进一步,

$$\sqrt{\mathbf{x}^{+T} P \mathbf{x}^+} \leq \sqrt{\lambda_1} (L_x \|\mathbf{x}\| + L_w r), \forall \mathbf{x} \in \Omega_c$$

同时注意到  $\sqrt{\lambda_n} \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\mathbf{x}^T P \mathbf{x}} \leq \sqrt{c}$ , 代入上式并利用  $\Omega_c$  的定义, 可得扰动的上界

$$r \leq \frac{\sqrt{c}(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}L_x)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}L_w}$$

此时,  $\mathbf{x}^+ \in \Omega_c$ , 从而  $\Omega_c$  是系统 (1) 的一个鲁棒不变集. 显然, 此时  $F(\cdot, \cdot)$  的 Lipschitz 常数  $L_x$  应满足

$$L_x \leq \sqrt{\lambda_n/\lambda_1}$$

$\square$

设  $t$  时刻对策控制问题 (6)~(9) 的最优序列为  $\mathbf{e}_t^* = \{\mathbf{e}(t)^*, \dots, \mathbf{e}(t+T-1)^*\}$ , 则定义  $t$  时刻 MPC 控制量  $\mathbf{u}(t)^* = K_1 \mathbf{x}_t + \mathbf{e}(t)^*$ , 相应的闭环系统为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}_t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_t)(K_1 \mathbf{x}_t + \mathbf{e}(t)^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} H\mathbf{x}(t) \\ K_1 \mathbf{x}_t + \mathbf{e}(t)^* \end{bmatrix}, \quad t = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

**定理.** 如果假设 1~4 成立且对策问题 (6)~(9) 在  $t$  时刻可行, 则当扰动上界满足条件 (15) 时, 值函数  $V(\mathbf{x})$  是闭环系统 (16) 的一个 ISS-Lyapunov 函数, 从而闭环系统相对于扰动是输入状态稳定的.

**证明.** 首先, 由引理 3 可得, 对策问题 (6)~(9) 在  $k > t$  时刻都是可行的.

其次, 令值函数  $V(\mathbf{x}_t)$  作为闭环系统 (16) 的备选 ISS-Lyapunov 函数, 那么由假设 2 和式 (9) 可得

$$V(\mathbf{x}_t) \geq \|H\mathbf{x}_t\|^2 = \theta_1(\|\mathbf{x}_t\|) \quad (17)$$

又因为约束集  $U$  和  $X$  是紧凸集, 所以当假设 2 成立时, 闭环系统 (16) 的状态响应和容许输入是有界的, 从而值函数存在

上界  $\hat{J}$ , 即  $V(\mathbf{x}_t) \leq \hat{J}$ . 定义集合  $B_d = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq d, d > 0\}$  满足  $B_d \subseteq \Omega_c$ . 注意到由于  $\Omega_c$  包含原点, 故  $B_d$  非空. 令  $\sigma = \max(1, \hat{J}/(\lambda_1 d^2))$ , 并定义一个  $\mathcal{K}_\infty$  类函数  $\theta_2(s) = \sigma \lambda_1 \|s\|^2$ , 则考虑如下两种情况:

1)  $\mathbf{x} \in \Omega_c$ : 此时由引理 2 和 3 可得

$$E(\mathbf{x}(k+1)) - E(\mathbf{x}(k)) < \|\mathbf{w}(k)\|^2 - \|\mathbf{z}(k)\|^2, \quad \forall k \in [t, t+T-1]$$

累加上述不等式组并整理得

$$E(\mathbf{x}(t+T)) + \sum_{k=t}^{t+T-1} \{\|\mathbf{z}(k)\|^2 - \|\mathbf{w}(k)\|^2\} < \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|^2$$

即  $J(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_t) < \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|^2 + Tr^2$ , 从而有

$$V(\mathbf{x}_t) = \min_{\mathbf{e}} \max_{\mathbf{w}} J(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_t) < \lambda_1 \|\mathbf{x}_t\|^2 + Tr^2 \quad (18)$$

2)  $\mathbf{x} \notin \Omega_c$ : 此时  $\mathbf{x} \notin B_d$ , 从而有  $d < \|\mathbf{x}\|$ , 那么值函数  $V(\mathbf{x}_t) < \hat{J} \|\mathbf{x}\|^2/d^2 = \theta_2(\|\mathbf{x}_t\|)$ . 进一步得到

$$V(\mathbf{x}_t) < \theta_2(\|\mathbf{x}_t\|) + Tr^2 \quad (19)$$

综合式 (18) 和 (19) 可得

$$V(\mathbf{x}_t) < \theta_2(\|\mathbf{x}_t\|) + Tr^2, \quad \forall \mathbf{x}_t \in I_x(T) \quad (20)$$

最后, 设  $t$  时刻的最优序列为  $\mathbf{e}_t^* = \{\mathbf{e}(t)^*, \dots, \mathbf{e}(t+T-1)^*\}$ , 容许扰动序列为  $\mathbf{w}$ . 同时取  $t+1$  时刻的可行序列  $\mathbf{e}_{t+1} = \{\mathbf{e}(t+1)^*, \dots, \mathbf{e}(t+T-1)^*, 0\}$ , 则由引理 2 和 3 可得

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_{t+1}) - J(\mathbf{u}_t, \mathbf{w}, \mathbf{x}_t) &= E(\mathbf{x}_{t+T+1}) - E(\mathbf{x}_{t+T}) + \\ &\|\mathbf{z}(t+T)\|^2 - \|\mathbf{w}(t+T)\|^2 - \|\mathbf{z}_t\|^2 + \|\mathbf{w}_t\|^2 \\ \Rightarrow J(\mathbf{u}_{t+1}, \mathbf{w}, \mathbf{x}_{t+1}) &< J(\mathbf{u}_t, \mathbf{w}, \mathbf{x}_t) + \|\mathbf{w}_t\|^2 - \|\mathbf{z}_t\|^2 \\ \Rightarrow V(\mathbf{x}_{t+1}) &< V(\mathbf{x}_t) + \|\mathbf{w}_t\|^2 - \|\mathbf{z}_t\|^2, \quad \forall \mathbf{x}_t \in I_x(T) \end{aligned}$$

从而有

$$V(\mathbf{x}_{t+1}) - V(\mathbf{x}_t) < \|\mathbf{w}_t\|^2 - \theta_1(\mathbf{x}_t), \quad \forall \mathbf{x}_t \in I_x(T) \quad (21)$$

综合式 (17)、(20) 和 (21), 由引理 1 可得值函数  $V(\mathbf{x})$  是系统 (16) 的一个 ISS-Lyapunov 函数, 从而闭环系统相对于扰动是输入状态稳定的.  $\square$

注 6. 由上述定理可知, 当系统受到持续扰动时,  $E(\mathbf{x})$  不一定是终端约束集  $\Omega_c$  内的 Lyapunov 函数; 同理, 值函数  $V(\mathbf{x})$  也不一定是可行初始集  $I_x(T)$  内的 Lyapunov 函数. 这与衰减扰动或由系统状态限界扰动下的  $H_\infty$  鲁棒预测控制不同<sup>[7-10]</sup>.

### 3 数值仿真

考虑如下开环不稳定系统

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 1+x_1 \\ 1-4x_2 \end{bmatrix} u + \\ &0.1 \begin{bmatrix} 1-x_1 \\ 1+4x_2 \end{bmatrix} w \\ \mathbf{z}(t) &= \begin{bmatrix} 3\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中, 输入约束和状态约束分别为  $U = \{u \in \mathbf{R} : -2 \leq u \leq 2\}$  和  $X = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}$ . 文献 [7] 等曾研究了  $w$  由辅助输出限界的扰动, 这里将  $w$  作为持续扰动加以分析.

令原点  $(0, 0)$  为系统的期望平衡点, 以 0.1 秒的采样周期离散化系统 (22), 则离散化模型原点处的 Riccati 不等式组 (11) 的解  $P$  及终端约束集估计 (13) 为

$$P = \begin{bmatrix} 80.0 & -0.5 \\ -0.5 & 80.0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_c = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq 4.01\}$$

则局部 Lipschitz 常数为  $L_x = 0.971$ ,  $L_w = 0.0212$ , 扰动的上界  $r = 0.2412$ . 仿真中, 取系统的初始状态为  $(-0.61, 0.42)$ , 步长  $T = 10$ ,  $w(t) = 0.2412 \sin(t/5)$  时, 系统的状态和输入轨迹如图 1 所示. 从图中可知, 闭环系统对有界持续扰动是鲁棒稳定的, 而且系统的状态和输入都满足各自约束, 从而说明本文所述策略是可行的. 当然, 由于采用了局部 Lipschitz 常数, 因此当这些常数较保守时, 所得的扰动上界也较保守.

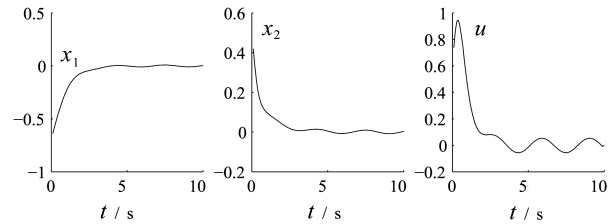


图 1 系统状态轨迹和控制输入曲线

Fig. 1 State trajectories of systems and profile of control

### 4 结论

本文考虑离散非线性约束系统, 结合  $H_\infty$  控制理论得到了持续有界扰动下的非线性鲁棒预测控制策略. 这种策略的要点是采用以  $H_\infty$  反馈律定义的仿射输入序列作为预测控制的优化序列, 并运用输入状态稳定性的概念得到 MPC 闭环系统是输入状态稳定的充分条件. 另外, 通过对优化问题可行性的分析, 得到使 MPC 策略可行的持续扰动的上界, 并以数值仿真验证了本文算法的可行性和有效性. 从而, 在理论上证明了预测控制系统对持续有界扰动是鲁棒的.

### References

- 1 Joe Q S, Badgwell T A. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 2003, **11**(7): 733-764
- 2 Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, Sokaert P O M. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, **36**(6): 789-814
- 3 Chisci L, Rossiter J A, Zappa G. Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. *Automatica*, 2001, **37**(7): 1019-1028
- 4 Michalska H, Mayne D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, **38**(11): 1623-1633
- 5 Sokaert P O M, Mayne D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(8): 1136-1142
- 6 De Nicolao G, Magni L, Scattolini R. On the robustness of receding-horizon control with terminal constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(3): 451-453

- 7 Chen H, Scherer C W, Allgower F. A game theoretic approach to nonlinear robust receding horizon control of constrained systems. In: Proceedings of American Control Conference. New Mexico, USA: IEEE, 1997. 3073–3077
- 8 Chen Hong, Liu Zhi-Yuan. An  $H_\infty$  approach to robust model predictive control. *Acta Automatica Sinica*, 2002, **28**(2): 296–300  
(陈虹, 刘志远. 一种基于  $H_\infty$  理论的鲁棒预测控制方法. *自动化学报*, 2002, **28**(2): 296–300)
- 9 Magni L, Nijmeijer H, der Van Schaft A J. A receding-horizon approach to the nonlinear  $H_\infty$  control problem. *Automatica*, 2001, **37**(3): 429–435
- 10 Magni L, Scattolini R. Control design for nonlinear systems: trading robustness and performance with the model predictive control approach. *IEEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2005, **152**(3): 333–339
- 11 He De-Feng, Ji Hai-Bo, Zheng Tao. An  $H_\infty$  robust predictive control of nonlinear systems with constraints. *Information and Control*, 2007, **36**(2): 136–141  
(何德峰, 季海波, 郑涛. 约束非线性系统  $H_\infty$  鲁棒预测控制. *信息与控制*, 2007, **36**(2): 136–141)
- 12 Geng Xiao-Jun, Xi Yu-Geng. Robust stability of nonlinear predictive control system with decaying disturbances. *Control and Decision*, 1999, **14**(4): 369–372  
(耿晓军, 席裕庚. 衰减扰动下非线性预测控制系统的鲁棒稳定性. *控制与决策*, 1999, **14**(4): 369–372)
- 13 Limon D, Alamo T, Salas F, Camacho E F. Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *Automatica*, 2006, **42**(5): 797–803
- 14 Jiang Z P, Wang Y. Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 2001, **37**(6): 857–869
- 15 Bemporad A, Morari M, Dua V, Pistikopoulos E N. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 2003, **39**(10): 1845–1846
- 16 Lin W, Byrnes C I.  $H_\infty$  Control of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, **41**(4): 494–510

何德峰 中国科学技术大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为先进控制与优化. 本文通信作者. E-mail: hdfzj@mail.ustc.edu.cn  
(HE De-Feng Ph.D. candidate in Department of Automation at University of Science and Technology of China. His research interest covers advanced control and optimization. Corresponding author of this paper.)

季海波 中国科学技术大学自动化系教授. 主要研究方向为非线性系统计算方法、非线性控制、鲁棒自适应控制. E-mail: jihb@ustc.edu.cn  
(JI Hai-Bo Professor in Department of Automation at University of Science and Technology of China. His research interest covers computation method on nonlinear system, nonlinear control, and robust adaptive control.)

郑涛 中国科学技术大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为非线性预测控制、多目标控制. E-mail: zhengtao@mail.ustc.edu.cn  
(ZHENG Tao Ph.D. candidate in Department of Automation at University of Science and Technology of China. His research interest covers nonlinear predictive control and multi-objective control.)