第24卷 第2期
1998年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 2
March., 1998

带有非匹配不确定性非线性系统的线性动态输出反馈镇定[1)]

刘一军 秦化淑

（中国科学院系统科学研究所 北京 100080）

摘 要 研究了带有非匹配不确定性的 SISO 及 MIMO 仿射和非仿射非线性系统的动态输出反馈镇定问题，在仅要求标称系统为双曲极小相位，以及在对系统不确定部分做较弱限制下，分别为所论系统构造出了输出反馈形式的动态补偿器，它们均使相应的闭环系统为 Lyapunov 意义下的渐近稳定. 所构造的补偿器为线性的，结构简单，易于实现.

关键词 仿射非线性，非仿射非线性，非匹配条件，线性动态输出反馈，反馈镇定

1 引言

不确定非线性系统的反馈镇定是一个有重要意义的研究课题，多年来，一直受到广大控制理论工作者的关注，取得了不少成果(大部分是对仿射非线性系统)，从构造的控制器来看，大多数是状态反馈形式的[1-4]. 然而，对实际设计来说，构造输出反馈形式的控制器，有着更重要的意义，在理论上也要困难得多. 目前，这方面的成果不多. 文献[5—7]对标称系统为线性系统的情况，设计出了输出反馈形式的鲁棒控制器. 文献[8]在标称系统可完全线性化及不确定部分满足匹配条件的假定下构造出了不连续变结构动态输出反馈鲁棒控制器. 当标称系统为非线性时，文献[9,10]对带有非匹配不确定性的某种标准形系统，设计了输出鲁棒控制器. 对于不能完全线性化，带有非匹配不确定性非线性系统的输出反馈镇定问题，有关工作很少.

本文研究仿射及非仿射非线性不确定系统的动态输出反馈镇定问题，在不要求系统的不确定部分满足匹配条件，而仅要求易于检验的增长性条件下，对其标称系统为双曲极小相位的非线性系统，构造出了输出反馈形式的线性动态补偿器，它们使所论不确定系统为 Lyapunov 意义下的渐近稳定的，且不明显依赖于 Lyapunov 函数及不确定部分的具体结构，形式简单，易于实现. 特别，它们也适用于某类非仿射不确定非线性系统的镇定.

2 非线性不确定系统的输出反馈镇定

考察仿射非线性不确定系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (g(\boldsymbol{x}) + \Delta g(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}). \end{cases} \tag{1}$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1997-01-28

其中 $x \in R^n$, $u=(u_1,\cdots,u_m)^T \in R^m$, $y=(y_1,\cdots,y_m)^T \in R^m$, $g=(g_1(x),\cdots,g_m(x))$, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$为精确已知的光滑向量场及向量值函数, $\Delta f(x)$, $\Delta g(x)$为系统的不确知部分. $f(0_n)=0_n$, $g(0_n)\neq 0_{n\times m}$, $h(0_n)=0_m$.

(1)式的标称系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{2}$$

2.1 SISO 情形

考察 $m=1$ 时,系统(1)的输出反馈镇定.

假设标称系统(2)具有相对阶 r[11], $1<r<n$,于是存在定义在 0_n 某邻域 U 内的局部微分同胚[11]

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \varphi(x), \quad x \in U,$$

将(1)式变换为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \xi_1(z,w) + B[a(z,w) + b(z,w)u] + \xi_2(z,w)u, \\ \dot{w} = q(z,w) + \xi_3(z,w) + \xi_4(z,w)u, \\ y = z_1. \end{cases} \tag{3}$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_r)^T$, $w=(w_1,w_2,\cdots w_{n-r})^T$,

$$A = \begin{pmatrix} 0\ 1\ 0,\cdots,0\ 0 \\ 0\ 0\ 1,\cdots,0\ 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0\ 0,\cdots,0\ 1 \\ 0\ 0\ 0,\cdots,0\ 0 \end{pmatrix}_{r\times r}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{r\times 1}.$$

$$a(z,w) = L_f^r h(x)\big|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}, b(z,w) = L_g L_f^{r-1} h(x)\big|_{x=\varphi^{-1}(z,w)},$$

$$\xi_1(z,w) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Delta f(x)\bigg|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}, \xi_2(z,w) = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\Delta g(x)\bigg|_{x=\varphi^{-1}(z,w)},$$

$$\xi_3(z,w) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Delta f(x)\bigg|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}, \xi_4(z,w) = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\Delta g(x)\bigg|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}.$$

$\dot{w}=q(0,w)$称为系统(2)的零动态. 若其在 $w=0$ 为(局部)指数稳定的,则称式(2)是双曲极小相位的[3].

定义. 称不确定非线性系统(1)能用动态输出反馈(局部)镇定,如果存在光滑函数 $\alpha(\theta)$和动态方程 $\dot{\theta}=\beta(\theta,y)$,使闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + (g(x) + \Delta g(x))u, \\ y = h(x), \\ u = \alpha(\theta), \\ \dot{\theta} = \beta(\theta,y), \end{cases}$$

在原点是 Lyapunov 意义下渐近稳定的. 这里, $\theta \in R^s$, $\alpha \in C^1(\overline{U}_1, R^m)$, $\beta \in C^1(\overline{U}_2, R^s)$, $\beta(0_s,0_m)=u$, $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$ 分别为 R^s 和 R^{s+m}中包含原点的某开邻域, s 为一正整数.

定理 1. 对系统(1),假设:

1)不确定部分 $\Delta f(x)$, $\Delta g(x)$满足

$$\|\Delta f(\boldsymbol{x})\| \leqslant \psi_1(|y|)\psi_2(\|\boldsymbol{x}\|),\ \|\Delta g(\boldsymbol{x})\| \leqslant M\|\boldsymbol{x}\|,\ \psi_1,\psi_2 \in C^1,\ \psi_1(0) = 0;$$

2)标称系统(2)是双曲极小相位的.

则不确定系统(1)可用线性动态输出反馈指数镇定.

证明. 由 $\psi_1(0)=0,\psi_1\in C^1$ 可得 $\psi_1(|y|)=\psi_1'(\zeta|y|)|y|, 0<\zeta<1$. 当 $y\neq 0$ 时

$$\left\|\frac{\Delta f(\boldsymbol{x})}{y}\right\| = \frac{\|\Delta f(\boldsymbol{x})\|}{|y|} \leqslant \psi_1'(\zeta|y|)\psi_2(\|\boldsymbol{x}\|).$$

因此$\frac{\Delta f(\boldsymbol{x})}{y}$在集合$\{x\,|\,y=h(x)\neq 0, x\in U\}$上范数有界. 令

$$\delta(\boldsymbol{x})\begin{cases}\dfrac{\Delta f(\boldsymbol{x})}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}.$$

则 $\delta(x)$在邻域U 有界,且 $\Delta f(x)=\delta(x)y$. 由相对阶定义 $b(0,0)\neq 0$,构造线性动态补偿器如下:

$$\begin{cases}\dot{\theta} = A\theta + Bb(0,0)u(\theta) + k^r E_k^{-1}\boldsymbol{l}^T(y - c\theta),\\ u(\theta) = -\dfrac{k}{b(0,0)}dE_k\theta.\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\theta\in U_1\subset R^r$,U_1 为 R^r 中包含原点的邻域. $\boldsymbol{l}=(l_1,\cdots,l_r)$,$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_r)$为 Hurwitz 向量.

$E_k=\mathrm{diag}(k^{r-1},k^{r-2},\cdots,k,1)_{r\times r}$,$c=(1,0,\cdots,0)$,$k$ 为待定常数.

式(3,4)构成闭环系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}} = A\boldsymbol{z} + \xi_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) + \xi_2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})u(\theta) + B(a(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) + b(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})u(\theta)),\\ \dot{\theta} = A\theta + Bb(0,0)u(\theta) + k^r E_k^{-1}\boldsymbol{l}^T(y - c\theta),\\ \dot{\boldsymbol{w}} = q(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) + \xi_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}) + \xi_4(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})u(\theta),\\ u(\theta) = -kb^{-1}(0,0)\boldsymbol{d}E_k\theta,\\ y = z_1.\end{cases} \tag{5}$$

其中　$(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\theta)\in\varphi(U)\times U_1\subset \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^r$.

令　$\boldsymbol{e}=\theta-\boldsymbol{z}$,式(5)化为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{e}} = (A - k^r E_k^{-1}\boldsymbol{l}^T c)\boldsymbol{e} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{b}(0,0) - b(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w}))u(\theta) - Ba(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w})\\ \qquad - \xi_1(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w}) - \xi_2(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w})u(\theta),\\ \dot{\theta} = (A - kB\boldsymbol{d}E_k)\theta - k^r E_k^{-1}\boldsymbol{l}^T c\boldsymbol{e},\\ \dot{\boldsymbol{w}} = q(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w}) + \xi_3(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w}) + \xi_4(\theta - \boldsymbol{e},\boldsymbol{w})u(\theta).\end{cases} \tag{6}$$

选择适当的 Hurwitz 向量 $\boldsymbol{l}=(l_1,\cdots,l_r)$,$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_r)$使得$\|P_2\|\,\|\boldsymbol{l}^T\boldsymbol{c}\|<1$,其中,$P_2>0$ 满足:$P_2(A-B\boldsymbol{d})+(A-B\boldsymbol{d})^T P_2=-I$.

作代换

$$\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}\\ \bar{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E_k & \\ & E_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\\ \theta\end{pmatrix}.$$

注意到

$$cE_k^{-1} = (1/k^{r-1})c,\ E_kB = B,\ \|E_kB(b(0,0) - b(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}))u(\theta)\| = O(\|\bar{\boldsymbol{e}},\bar{\theta},\boldsymbol{w}\|^2),$$

$$\|\xi_4(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})u(\theta)\| = O(\|(\bar{e},\bar{\theta},w)\|^2).$$

(6) 式化为

$$\dot{\bar{e}}=k(A-l^Tc)\bar{e}+B\frac{\partial a}{\partial z}E_k^{-1}\bar{\theta}-B\frac{\partial a}{\partial z}E_K^{-1}\bar{e}+B\frac{\partial a}{\partial w}w$$
$$+(1/k^{r-1})E_k\Delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)c\bar{\theta}-(1/k^{r-1})E_k\Delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)c\bar{e}+\delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w), \tag{7}$$

$$\dot{\bar{\theta}}=k(A-Bd)\bar{\theta}+kE_k^{-1}l^Tc\bar{e},$$
$$\dot{w}=q(0,w)+L^*E_k^{-1}\bar{\theta}-L^*E_k^{-1}\bar{e}+(1/k^{r-1})E_k\Delta_2(\bar{\theta},\bar{e},w)c\bar{\theta}$$
$$-(1/k^{r-1})E_k\Delta_2(\bar{\theta},\bar{e},w)c\bar{e}+\delta_2(\bar{\theta},\bar{e},w). \tag{8}$$

其中
$$\Delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta(x)\Big|_{x=\varphi^{-1}(E_k^{-1}(\bar{\theta}-\bar{e}),w)},$$
$$\Delta_2(\bar{\theta},\bar{e},w)=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta(x)\Big|_{x=\varphi^{-1}(E_k^{-1}(\bar{\theta}-e),w)},$$
$$\delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)=O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|^2),\quad \delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)=O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|^2),$$
$$L^*=\frac{\partial q(\eta E_k^{-1}(\bar{\theta}-\bar{e}),w)}{\partial z},\quad \eta=\mathrm{diag}(\eta_1,\cdots,\eta_r),0<\eta_i<1.$$

设 $\varphi(U)\times U_1$ 相应变为邻域 $U_2\subset R^n\times R^r$. 由假设,$\dot{w}=q(0,w)$为指数稳定的,根据逆 Lyapunov 定理,存在正定函数 $V_0(w)$及常数 $k_1>0,k_2>0,k_3>0$ 和 $N>0$,使得

$$k_1\|w\|^2\leqslant V_0(w)\leqslant k_2\|w\|^2,\quad \frac{\partial V_0}{\partial w}q(0,w)\leqslant -k_3\|w\|,\quad \left\|\frac{\partial V_0}{\partial w}\right\|\leqslant N\|w\|,$$

设 $P_1>0$ 满足 $P_1(A-l^Tc)+(A-l^Tc)^TP_1=-I$,取

$$V_1(\bar{\theta},\bar{e})=\bar{e}^TP_1\bar{e}+\bar{\theta}^TP_2\bar{\theta},$$
$$V(\bar{\theta},\bar{e},w)=V_1(\bar{\theta},\bar{e})+V_0(w).$$

对 $\dot{V}_1(\bar{\theta},\bar{e})$

$$\dot{V}_1(\bar{\theta},\bar{e})|_{(7)}=-k\|\bar{e}\|^2-2\bar{e}^TP_1B\frac{\partial a}{\partial z}E_k^{-1}\bar{\theta}+2\bar{e}^TP_1B\frac{\partial a}{\partial z}E_k^{-1}\bar{e}-2\bar{e}^TP_1B\frac{\partial a}{\partial w}w$$
$$-2\bar{e}^TP_1(1/k^{r-1})E_k\Delta_1c\bar{\theta}+2\bar{e}^TP_1(E_kk^{r-1})E_k\Delta_1c\bar{e}$$
$$+2\bar{e}^TP_1\delta_1(\bar{\theta},\bar{e},w)-k\|\bar{\theta}\|^2-2k\bar{\theta}^TP_2E_k^{-1}l^Tc\bar{e}$$
$$\leqslant-\Big\{k(1-\|P_2\|\|l^Tc\|)-3\Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial z}\Big\|-\frac{1}{\varepsilon}\Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial w}\Big\|$$
$$-3\|P_1\Delta_1c\|+O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|)\Big\}\|\bar{e}\|^2$$
$$-\Big\{k(1-\|P_2\|\|l^Tc\|)-\Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial z}\Big\|-\|P_1\Delta_1c\|+O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|)\Big\}\|\bar{\theta}\|^2$$
$$+\Big\{\varepsilon\Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial w}\Big\|+O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|)\Big\}\|w\|^2.$$

由于 P_1 独立于 k,因此存在常数 M_1,M_2 在 U_2 上,满足

$$\Big(3\Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial z}\Big\|+3\|P_1\Delta_1c\|\Big)\leqslant M_1,\ \Big\|P_1B\frac{\partial a}{\partial w}\Big\|\leqslant M_2,$$

取邻域 $U_3\subset U_2$,$(0,0,0)\in U_3$,使当$(\bar{\theta},\bar{e},w)\in U_3$ 时,$O(\|(\bar{\theta},\bar{e},w)\|\leqslant\mu$ 于是

$$\dot{V}_1|_{(7)}\leqslant-[k(1-\|P_2\|\|l^Tc\|)-M_1-\frac{1}{\varepsilon}M_2+\mu]\|\bar{e}\|^2$$
$$-[k(1-\|P_2\|\|l^Tc\|)-M_1+\mu]\|\theta\|^2+[\varepsilon M_2+\mu]\|w\|^2. \tag{9}$$

对 $V_0(w)$

$$\begin{aligned}\dot{V}_0(\boldsymbol{w})\big|_{(8)} &= \frac{\partial V_0}{\partial w}q(0,\boldsymbol{w}) + \frac{\partial V_0}{\partial w}L^* E_k^{-1}\bar{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial V_0}{\partial w}L^* E_k^{-1}\bar{\boldsymbol{e}} + (1/k^{r-1})\frac{\partial V_0}{\partial w}\Delta_2 c\bar{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad - (1/k^{r-1})\frac{\partial V_0}{\partial w}\Delta_2 c\bar{\boldsymbol{e}} + O(\|(\bar{\boldsymbol{\theta}},\bar{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{w})\|^3) \\ &\leqslant -\left(k_3 - 2\varepsilon\|L^* N\| - \frac{1}{2k^{r-1}}\|N\Delta_2 c\| + \mu\right)\|\boldsymbol{w}\|^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{N}\| + \frac{1}{2k^{r-1}}\|\boldsymbol{N}\Delta_2\boldsymbol{c}\|\right)\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon}\|\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{N}\| + \frac{1}{2k^{r-1}}\|\boldsymbol{N}\Delta_2\boldsymbol{c}\|\right)\|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2.\end{aligned}$$

在 U_1 上,有 $\|N\Delta_2 c\|\leqslant M_4$, $\|NL^*\|=M_3$ 于是成立

$$\begin{aligned}\dot{V}_0\big|_{(8)} &\leqslant -\left(k_3 - 2\varepsilon M_3 - \frac{1}{2k^{r-1}}M_4 - \mu\right)\|\boldsymbol{w}\|^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{4\varepsilon}M_3 + \frac{1}{2k^{r-1}}M_4\right)\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|^2 + \left(\frac{1}{4\varepsilon}M_3 + \frac{1}{2k^{r-1}}M_4\right)\|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2.\end{aligned} \tag{10}$$

由式(9,10)即得

$$\dot{V}(\bar{\boldsymbol{\theta}},\bar{\boldsymbol{e}},\boldsymbol{w})\big|_{(7)(8)} \leqslant -\boldsymbol{L}_1\|\bar{\boldsymbol{e}}\|^2 - L_2\|\bar{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - L_3\|\boldsymbol{w}\|^2.$$

其中

$$L_1 \triangleq \left[k(1 - \|P_2\|\|l^T c\|) - M_1 - \frac{1}{\varepsilon}M_2 - \frac{1}{4\varepsilon}M_3 + \frac{1}{k^{r-1}}M_4 - \mu\right],$$

$$L_2 \triangleq \left[k(1 - \|P_3\|\|l^T c\|) - M_1 - \frac{1}{4\varepsilon}M_3 + \frac{1}{k^{r-1}}M_4 - \mu\right],$$

$$L_3 \triangleq \left[k_3 - 2\varepsilon M_3 - \frac{1}{k^{r-1}}M_4 - \varepsilon M_4 - \mu\right].$$

注意 l 的取法,知 $1-\|P_2\|\|\boldsymbol{l}^T c\|>0$,再取 ε 适当小,k 适当大,及适当的邻域 U_3 使 μ 适当小,这时在 U_3 上,有 $L_1,L_2,L_3>0$. 由此及 $V(\bar{\theta},\bar{e},w)$ 的取法知式(7,8)从而式(5)为指数渐近稳定的.

考察如下非仿射非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + [g(\boldsymbol{x}) + \Delta g(\boldsymbol{x})]u + \sum\limits_{i=2}^{l}(g_i(\boldsymbol{x}) + \Delta g_i(\boldsymbol{x}))u^i, \\ y = h(\boldsymbol{x}).\end{cases} \tag{11}$$

其中 $l(>2)$ 为整数,$g_i(x)(i=2,\cdots,l)$, $g_i(0)\neq 0$ 为 R^n 上精确已知的光滑向量场, $\Delta g_i(x)$, $i=1,2,\cdots,l$ 是 R^n 上不确知向量场.

定理 2. 设标称系统(2)为双曲极小相位的,且 $\Delta f(x)$, $\Delta g(x)$ 满足定理 1 的条件,则不确定系统(11)可用线性动态输出反馈(4)指数镇定.

证明. 只需注意到对形如(4)的控制器,成立

$$\left\|\sum_{i=1}^{l}(g_i(\boldsymbol{x}) + \Delta g_i(\boldsymbol{x}))u^i\right\| = O(\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\|^2).$$

与定理 1 证明类似,即得定理 2 的结论.

注. 定理 2 仅要求 $\Delta g_i(\boldsymbol{x})$ 有界,而不要求其满足匹配条件及增长性条件.

2.2 MIMO 情形

考察 m>1 时,系统(1)的输出反馈镇定.

设标称系统(2)具有向量相对阶 $(r_1,\cdots,r_m)$, $r_i>1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i = r < n$.

易知,存在局部坐标变换

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \triangleq \varphi(x), \tag{12}$$

满足

$$\frac{\partial \varphi_2(0)}{\partial x} g(0) = 0_{(n-r)\times m}. \tag{13}$$

将系统(1)化为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B[a(z,w) + \overline{A}(z,w)u] + \xi_1(z,w) + \xi_2(z,w)u, \\ \dot{w} = q(z,w) + p(z,w)u + \xi_3(z,w) + \xi_4(z,w)u, \\ y = Cz. \end{cases} \tag{14}$$

其中

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_m)^T, w = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-r})^T,$$

$$z_i = (z_1^i, z_2^i, \cdots, z_{r_i}^i)^T, 1 \leqslant i \leqslant m, \sum_{i=1}^m r_i = r < n,$$

$A = \text{blockdiag}(A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{mm}), B = \text{blockdiag}(b_1, b_2, \cdots, b_m)$,

$C = \text{blockdiag}(c_1, c_2, \cdots, c_m)$,

(A_{ii}, b_i, c_i) 为 Brunovsky 标准形

$\overline{A}(z,w) = (a_{ij}(z,w))_{m\times m}, a(z,w) = (a_1(z,w), \cdots, a_m(z,w))^T$,

$a_{ij}(z,w) = L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x) \Big|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}, a_i(z,w) = L_f^{r_i} h_i(x) \Big|_{x=\varphi^{-1}(z,w)}$,

$$p(z,w) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot g(x) \Bigg|_{x=\varphi^{-1}(z,w)},$$

$q(z,w), \xi_1(z,w), \xi_2(z,w), \xi_3(z,w), \xi_4(z,w)$,与 2.1 中相应记号的意义类似.

定理 3. 对系统(1),假设

1)不确定部分 $\Delta f(x), \Delta g(x)$ 满足

$$\|\Delta f(x)\| \leqslant M\|x\|^2, \|\Delta g(x)\| \leqslant M\|x\|;$$

2)标称系统(2)为双曲极小相位的.

则(MIMO)系统(1)可用线性动态输出反馈指数镇定.

证明. 构造线性动态补偿器如下:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A\theta + BA^{-1}(0,0)u + H(k)L^T(y - C\theta), \\ u(\theta) = -kA^{-1}(0,0)DE_k\theta. \end{cases} \tag{15}$$

其中 $L = \text{blockdiag}(l_1, l_2, \cdots, l_m), D = \text{blockdiag}(d_1, \cdots, d_m)$,

$l_i = (l_1^i, l_2^i, \cdots, l_{r_i}^i), d_i = (d_1^i, \cdots, d_{r_i}^i)$,为特殊取定的 Hurwitz 向量,使得

$\|P_2\| \|L^T C\| < 1$,其中 $P_2 > 0$ 满足

$P_2(A - BD) + (A - BD)^T P_2 = -I_r$

$E_k = \text{blockdiag}(E_{k_1}, E_{k_2}, \cdots, E_{k_m}), E_{k_i} = \text{diag}(k^{r_i - 1}, \cdots, k, 1)$,

$H(k) = \text{blockdiag}(H_1(k), \cdots, H_m(k)), H_i(k) = \text{diag}(k, k^2, \cdots, k^{r^i})$,

k 为待定常数.

考虑式(14)与动态补偿器(15)构成的闭环系统,并做变换

$$e = \theta - z, \quad \begin{pmatrix} \bar{e} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & \\ & E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \theta \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{cases}\dot{\bar{e}}= k(A - L^TC)\bar{e} + Ba(\bar{\theta} - e,w) + O(\|(\bar{e},\bar{\theta},w)\|^2),\\ \dot{\bar{\theta}}= k(A - BD)\theta + kL^TC\bar{e},\\ w = q(\theta - e,w) + p(\theta - e,w)u + O(\|(\bar{e},\bar{\theta},w)\|^2),\end{cases} \tag{16}$$

注意到式(13),有

$$\|p(\bar{\theta} - \bar{e},w)u(\theta)\| = O(\|(\bar{e},\bar{\theta},w)\|^2),$$

及

$$\|p(0,w)\bar{A}^{-1}(0,w)a(0,w)\| = O(\|w\|^2),$$

由假设

$$\dot{w} = q(0,w) - p(0,w)\bar{A}^{-1}(0,w)a(0,w)$$

是指数渐近稳定的,得 $\dot{w}=q(0,w)$指数渐近稳定. 与定理 1 证明类似,即得定理 3.

定理 4. 设标系统(2)为双曲极小相位的,若不确定项 $\Delta f(x)$满足匹配条件,且

$$\|\Delta f(x)\| \leqslant M\|x\|,\ \|\Delta g(x)\| \leqslant M\|x\|,$$

则不确定系统(1)可用线性动态输出反馈指数镇定.

证明. 注意,在坐标变换式(12)下,将(1)化为

$$\begin{cases}\dot{z} = Az + B[a(z,w) + \bar{A}(z,w)u] + B\bar{\xi}_1(z,w) + \xi_2(z,w)u,\\ \dot{w} = q(z,w) + p(z,w)u + \xi_4(z,w)u,\\ y = z_1.\end{cases} \tag{17}$$

其中　$\bar{\xi}_1(z,w)=(L_{\Delta f}L_f^{r_1-1}h_1(x),\cdots,L_{\Delta f}L_f^{r_m-1}h_m(x))^T\big|_{x=\varphi^{-1}(z,x)}$. 其它同式(14).

注意到:$\|E_kB\bar{\xi}_1\| = \|B\bar{\xi}_1\| \leqslant H(\|\bar{e}\| + \|\bar{\theta}\| + \|w\|)$,其中 H 为与 k 无关的常数. 类似于定理 3,即得结论.

注. 在定理 3,定理 4 中,不要求分布$\{g_1(x),\cdots,g_m(x)]$是对合的.

考虑如下一般 MIMO 非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x} = G(x,u,\Delta f(x)),\\ y = h(x).\end{cases} \tag{18}$$

其中　$x\in R^n,u\in R^m,h:R^n\to R^m,G:R^n\times R^m\times R^s\to R^n$,为精确已知向量值函数,$\Delta f(x):R^n\to R^s$ 为系统的不确定部分.

定理 5. 设 $G\in C^2$,若$(G(x,0,0),\dfrac{\partial G}{\partial u}(x,0,0),h(x))$及 $\Delta f(x)$满足定理 3,或定理 4 的条件,则不确定系统(18)可用线性动态输出补偿器(15)镇定.

证明. 由

$$G(x,u,\Delta f(x)) = G(x,0,0) + \frac{\partial G}{\partial u}(x,0,0)u + \frac{\partial G}{\partial \Delta f}(x,0,0)\Delta f + \sum_{i=1}^{m}u_i(R_i(x,u\Delta f)u) + \sum_{i=1}^{s}\Delta f_i(Q_I(x,u,\Delta f)\Delta f).$$

其中　$u=(u_1,\cdots,u_m)^T,\Delta f=(\Delta f_1,\cdots,\Delta f_s)^TR_i:R^n\times R^m\times R^s\to R^{n\times m},Q:R^n\times R^m\times R^s\to R^{n\times s}$

类似于定理 2 的考虑,即知结论成立.

3 结语

本文研究了不能完全线性化的不确定非线性系统的动态输出反馈镇定问题，与以往结果相比，本研究有以下特点：

1)对不确定部分要求低，特别不要求其满足匹配条件，从而，本文结论适用于更广一类不确定非线性系统；

2)控制器的设计过程完全为构造性的，且构造出的控制器为线性的，结构简单，因而易于实现；

3)讨论了某类非仿射不确定非线性系统的动态输出反馈镇定，这方面的工作尚不多见；

4)在 MIMO 情形，不要求分布$\{g_1(x),\cdots,g_m(x)\}$为对合的.

参 考 文 献

1 Martin J Corless, Georgeleitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Tran. Autom. Control*, 1981, **AC-26**(5): 1139—1144

2 Liao Tehlu, Fu Lichen, Hsu Chenfa. Output tracking control of nonlinear systems with mismatched uncertainties, *Systems & Control Letters*, 1992, **18**: 39—47

3 Behtash S. Robust output tracking for nonlinear systems. *Int. J. Control*. 1991, **51**: 1381—1407

4 Li Zhonghua, Chai Tianyou, Wen changyun. Systematic disign of robust controllers for nonlinear uncertain systems. *Int. J. control*. 1995, **62**(4): 871—892

5 Emelyamer S v *et al*. Output feedback stabilization of uncertain plants avariable structure system approach. *Int. J. Control*, 1992, **55**: 61—68

6 Emelyamer S v *et al*. Discontinuous output feedback stabilizating an uncertain MIMO plant. *Int. J. Control*, 1992, **55**: 83—107

7 Praly L, Andreanovel B D, Corron J M. Lyapunov design of stability controllers for casceded system. In: Proc. 28th, IEEE conference on Decision and Control, Tampa. Fl, Dec, 1989

8 Seangrohk Oh, Hassan K Khulit. Output feedback stabilization using variable structure control. *Int. J. Control*, 1995, **62**(4): 831—848

9 洪奕光，秦化淑. 一类不确定非线性控制系统的镇定. 控制理论与应用年会论文集，武汉：科学出版社，1993

10 秦化淑，梅生伟. 基于动态补偿的一类非线性系统的镇定. 中国控制会议论文集，黄山：科学出版社，1995

11 Isidori. Nonlinear Control Theory. New York: Spring-verlag, 1989

STABILITY OF NONLINEAR SYSTEMS WITH MISMATCHED UNCERTAINTIES VIA LINEAR DYNAMIC OUTPUT FEEDBACK

LIU YIJUN　QIN HUASHU

(*Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080)

Abstract The problems of asymptotic stabilization based on dynamic output feedback for SISO/MIMO nonlinear systems with matched and mismatched uncertainties are studied in this paper. Under only some weak constraints for the nominal systems and for the uncertainties, some dynamic output feedback compensators are constructed, which make the corresponding closed-loop systems asymptotically stable in the Lyapunov's sence.

Key words Affine nonlinear, nonaffine nonlinear, mismatched condition, linear dynamic output feedback, feedback stability

刘一军 1987 年于河北师范大学获硕士学位，1997 年获中国科学院系统科学研究所博士学位．现在天津河北工业大学工作．主要从事非线性系统(标称与含不确定性两类)的结构性质分析和控制问题研究，特别对非线性系统的局部、半全局和全局输出反馈镇定和跟踪问题有兴趣．

秦化淑 1956 年毕业于南开大学．1961—1980 年在中国科学院数学所工作，1980 年至今在中国科学院系统科学研究所从事控制系统的理论和应用研究工作．研究领域为非线性控制系统的结构性质和控制问题研究、机械臂控制、卫星控制等方面的应用研究，特别对含不确定性的非线性系统的输出反馈控制和浑沌系统的生成、抑制及同步化控制等问题有兴趣．