

EAST 核聚变实验装置中极向场线圈电流的确定

王华忠, 罗家融

(中国科学院 等离子体物理研究所, 安徽 合肥 230031)

摘要: 在 EAST 核聚变托卡马克实验装置中, 无论是在设计阶段还是未来运行过程中, 确定极向场线圈电流都是非常重要的。本文采用排列格林函数方法, 给出设计中固定边界计算和未来运行过程中反演计算两种条件下极向场线圈电流的确定方法, 并在理论上证明了其可行性, 大大减少了计算时间。

关键词: 固定边界; 反演计算; 格林函数; 极向场线圈

中图分类号: TL631.24 文献标识码: A 文章编号: 1000-6931(2006)03-0347-05

EAST Poloidal Field Coils Current Determination Method

WANG Hua-zhong, LUO Jia-rong

(*Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*)

Abstract: As non-circle and divertor Tokamak device like EAST, confirming the poloidal current is very important both in design and future operation. The rearrange Green function methods were used to obtain the poloidal current in fixed-body and fitting computation. Its feasibility is proved in theory and the computation time can be reduced greatly.

Key words: fixed boundary; fitting computation; Green function; poloidal field coil

根据 EAST 极向场系统的设计方案, 极向场系统将采用一体化的设计方法。在等离子体的产生、上升、成形、平顶各阶段, 用于欧姆加热和位形控制的电流在同一线圈中流动, 这种设计不仅可使装置的运行更加灵活, 而且也可使 EAST 极向场系统大为简化。极向场的作用主要是用来提供欧姆加热和控制等离子体位形。因此, 在极向场线圈电流的确定上不再区分单独的加热场和极向场线圈, 而是采用同一方法。

EAST 装置极向场系统采用 14 个超导磁体上下对称布置。其中, 位于中心螺管旁的一大一小两个线圈(通常称之为大偏滤线圈和小偏滤线圈), 在设计中为尽可能贴近纵场线圈而将其一分为二, 同时又为了只用 1 组电源对其供电而一直在放电波形上保持这两个线圈在各种位形下的电流始终相同。

对于非圆截面和有偏滤器的托卡马克装置, 在设计中和未来运行过程中, 极向场线圈电

流的确定可分为如下两类问题:

- 1) 固定边界计算, 已知等离子体的平衡位形和等离子体电流分布, 求取极向场线圈电流;
- 2) 平衡反演计算, 已知实验磁测量数据, 求取等离子体位形和电流分布以及极向场线圈电流。

这两类问题下的极向场线圈电流的确定均需求解托卡马克轴对称 MHD 平衡。

1 基本方程

在受控热核装置中, 等离子体受外场控制, 在圆柱坐标系 (r, θ, z) 中, 在给定相应参数后, 使用 Grad-Shafranov 方程来求解等离子体的磁通函数 $\psi^{[1]}$:

$$L\psi \equiv \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 R J(R, \psi) \quad (1)$$

等离子体区

$$L\psi = 0 \quad \text{等离子体区外}$$

其中: J 为环向等离子体电流密度; R 为圆柱坐标的半径; z 为并行于长轴的高度。

式(1)中的环向等离子体电流密度 $J(R, \psi)$ 一般取少量的几个自由参数, 表示成 ψ 的线性函数, 有:

$$J(R, \psi; \alpha_j, \gamma_j, \delta_z) = R \left[\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (\tilde{\psi}^i - \tilde{\psi}^m) + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \mu_0 / 4\pi^2 R^2 \cdot (\tilde{\psi}^i - \tilde{\psi}^m) \right] \quad (2)$$

其中: $\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (\tilde{\psi}^i - \tilde{\psi}^m)$ (一般表示为 P') 为等离

子体压力梯度; $\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i (\tilde{\psi}^i - \tilde{\psi}^m)$ (一般表示为 FF') 与极向电流有关; α_j, γ_j 则是该模型中的自由参数; $\psi_j = (\psi_j - \psi_{\text{axis}}) / (\psi_{\text{bdy}} - \psi_{\text{axis}})$ 为放电的边缘磁通和磁轴磁通差的归一化磁通, ψ_{axis} 是位于磁轴的磁通, ψ_{bdy} 是位于最后 1 个闭合磁面的磁通, 归一化磁通 ψ_j 使得可从少量的反演参数映射为 r, z 平面上大量网格点的磁通值。

这样, 式(1) Grad-Shafranov 方程形式上就化成了一个 ψ 的二阶椭圆形线性偏微分方程。但实际上因等离子体的边界总是预先未知, 所以, 式(1)本质上总是非线性的, 通常采用隐式交替方法、松弛法以及 Sidel 迭代方法求解。

2 设计中固定边界计算条件下极向场线圈电流的确定

Grad-Shafranov 方程算符 $L \equiv \frac{\partial}{\partial R} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 的格林函数对应圆圈电流产生的流函数^[2,3]为:

$$G(R, z, R', z') = \mu_0 (RR')^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) (K(k) - \frac{2}{k} E(k)) \right]$$

$$k = \left[\frac{4RR'}{(z - z')^2 + (R + R')^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

其中: R, R' 分别是两个圆圈电流的半径; $z - z'$ 表示两个圆圈电流之间的距离; $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别表示第 1 类、第 2 类椭圆积分。

格林函数只依赖于装置的几何尺寸且计算十分耗时, 通常把计算网格区域内的格林函数提前算好并放在 1 个二维数组中。

所谓固定边界计算, 就是要求已知边界上的磁通值为定值, $\psi_{b(i)} = \text{const}$, 也即要求 $\psi_{b(i)}^{\text{coils}} + \psi_{b(i)}^{\text{plasma}} = \text{const}$ ($b(i) \in \partial D, i = 1, \dots, N$)。

在外界线圈(极向场)已知情况下, 采用格林函数的方法易于求出边界上的磁通值。但在固定边界计算情况下, 常常需要反求外界极向场线圈中的电流, 有时因设计方面的原因, 问题将变得复杂。固定边界计算时, 一般是通过格林函数的方法计算调整外界极向场线圈中的电流, 从而使在已知等离子体边界上 m 个不同控制点上的 ψ 为定值^[4], 有:

$$2\pi \sum_{i=1}^N I_{\text{coils}(i)} \mathbf{G}(x_b, z_b, x_i, z_i) + 2\pi \Delta x \Delta z \cdot \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J I_{\text{plasma}(i,j)} \mathbf{G}(x_b, z_b, x_i, z_j) = \text{const} \quad (3)$$

求解这样 1 个矩阵方程, 可得到外界极向场线圈中的电流, 这在数学上没有问题。但如果另加一定限制条件, 例如, 图 1 EAST 装置极向场系统 PF7 和 PF9 线圈(大小偏滤线圈)只用 1 组电源对其供电而一直在放电波形上保持这两个线圈在各种位形下电流始终相同, 为保持这两个线圈在各种位形下电流始终相同, 则要求矩阵方程的解必须满足这两个极向场线圈中的电流相等, 这样一来, 问题将变得非常复杂。对这种情况下的求解, 必须采用非常复杂的电磁场理论进行计算。但这是一非常耗时的

计算过程, 不可能满足未来 EAST 实时控制要求。

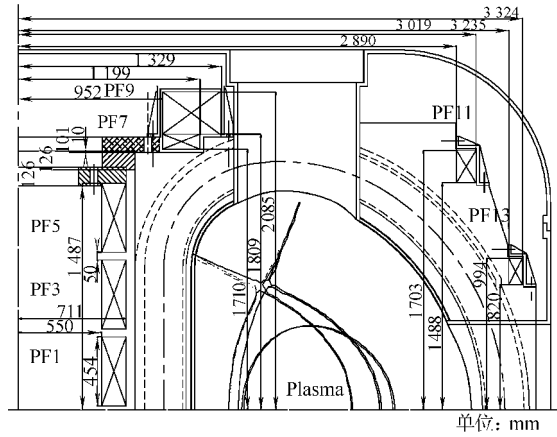


图1 EAST 极向场线圈布置

Fig. 1 EAST poloidal field coils disposal

在深入研究有关计算方法后, 采用排列格林函数的方法。这已在理论上证明了其可行性, 并大大减少了计算时间。

在 EAST 核聚变实验装置固定边界计算条件下极向场线圈电流的确定中, 为保持两个线圈在各种位形下电流始终相同, 我们将这两个线圈对空间各点的感应假想变成 1 个虚拟的合并线圈对空间各点的感应(G_{coil-2}), 将矩阵方程(3)变成以下形式:

$$G_{coil-2} I_{coil-2} = \psi_{const} - G_{plasma} I_{plasma} \quad (4)$$

这样, 求解矩阵方程(4)就等于求解矩阵方程(3)。经这样的处理后, 矩阵方程(4)中隐含着方程(3)中 PF7 和 PF9 线圈匝电流相等的条件, 变换后的结果则保证确定 EAST 核聚变实验装置固定边界计算条件下极向场线圈电流设计满足两个极向场线圈中的匝电流相等需要。

证明如下。

为简单起见, 假设线圈 1 和 2 单匝电流相等, 虚拟的合并线圈对空间各点的感应格林函数为:

第 1 行、第 1 列: $G_1(1, 1) \times (n_1 / (n_1 + n_2)) + G_2(1, 1) \times (n_2 / (n_1 + n_2))$

...

第 n 行、第 m 列: $G_1(n, m) \times (n_1 / (n_1 + n_2)) + G_2(n, m) \times (n_2 / (n_1 + n_2))$

从总体来看, 这等价于 $(G_1 \times (n_1 / (n_1 +$

$n_2)) + G_2 \times (n_2 / (n_1 + n_2))) \times F_{总} = G_1 \times F_1 + G_2 \times F_2$ 。这样, 等于保证了实际线圈 1 上的电流与线圈 2 上的电流相等(n_1 和 n_2 表示线圈 1 和线圈 2 的匝数; F_1 和 F_2 表示两个线圈中实际电流大小; $F_{总}$ 表示两个线圈中总电流)。

在软件实现过程中, 只需对要求合并线圈的格林函数表的相关行列按照匝数比进行对应迭加, 等离子体和其它之间的感应格林函数作同样处理。

为验证确定固定边界计算条件下极向场线圈电流的正确性, 首先进行了格林函数表全空间网格扫描, 扫描的结果是相对误差在 0.1×10^{-7} 以内(此结果在机器的误差范围内)。同时, 为了验证正确性, 首先用这种方法进行固定边界的平衡计算, 得到 1 组极向场线圈电流和要求的边界上的磁感应强度; 再用此极向场线圈电流结果作为已知的确定量, 采用自由边界法计算上述边界上的磁感应强度。这两种计算情况下的结果示于图 2、3。

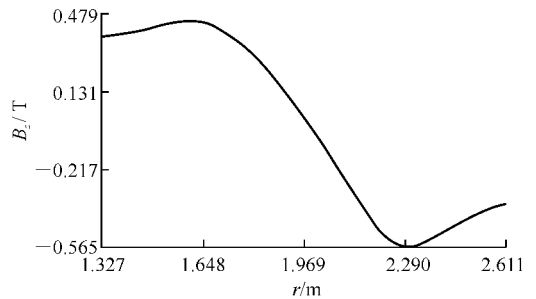


图2 两种计算情况下 B_z-r 的比较

Fig. 2 Different B_z-r between those two methods

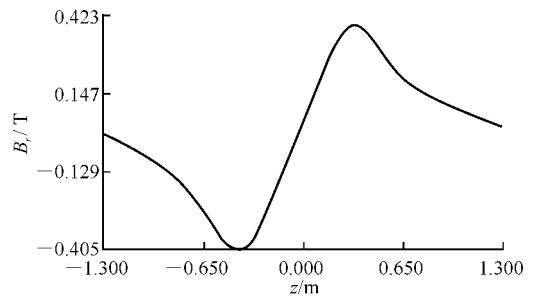


图3 两种计算情况下 B_z-z 的比较

Fig. 3 Different B_z-z between those two methods

从上图可看出, 固定边界的平衡计算得到

的边界上的磁感应强度和采用自由边界法计算出的上述边界上的磁感应强度,在图形上用目视已分辨不出它们之间的差值(两者的相对偏差在千分之一以内)。

同时,计算比较了有和没有采用排列格林函数的方法虚拟合并线圈条件下等离子体参数和极向场线圈匝电流状况。

固定边界计算得到的主要等离子体参数(14组)分别为:炮号,91 000;betap,1.740;li,1.328;拉长比,1.437;上三角形变,0.115;下三角形变,0.584。

固定边界计算得到的14组极向场线圈匝电流分别为: $0.115\ 083 \times 10^4$; $0.428\ 976 \times 10^4$; $0.197\ 280 \times 10^4$; $0.521\ 361 \times 10^3$; $0.521\ 361 \times 10^3$; $-0.177\ 680 \times 10^4$; $-0.924\ 423 \times 10^4$; $-0.718\ 888 \times 10^4$; $-0.187\ 677 \times 10^4$; $0.348\ 286 \times 10^4$; $0.876\ 956 \times 10^4$; $0.876\ 956 \times 10^4$; $-0.628\ 227 \times 10^4$; $-0.188\ 973 \times 10^5$ 。

固定边界计算得到的主要等离子体参数(12组)分别为:炮号,91 000;betap,1.740;li,1.328;拉长比,1.437;上三角形变,0.115;下三角形变,0.583。

固定边界计算得到的12组极向场线圈匝电流分别为: $0.115\ 093 \times 10^4$; $0.428\ 962 \times 10^4$; $0.197\ 275 \times 10^4$; $0.521\ 418 \times 10^3$; $-0.177\ 691 \times 10^4$; $-0.924\ 402 \times 10^4$; $-0.718\ 875 \times 10^4$; $-0.187\ 691 \times 10^4$; $0.348\ 280 \times 10^4$; $0.876\ 957 \times 10^4$; $-0.628\ 201 \times 10^4$; $-0.188\ 976 \times 10^5$ 。

从以上结果可看出,两种计算条件下的计算结果几乎没有差异。因此,在EAST核聚变实验装置中,固定边界计算条件下极向场线圈电流满足设计需要,能够保证使电源系统只用1组电源对其供电而一直在放电波形上保持这两个线圈在各种位形下电流始终相同,即保证图1中EAST大小偏滤线圈在各种位形下电流始终相同。

3 未来运行过程中反演计算条件下极向场线圈电流的确定

所谓平衡反演计算条件下极向场线圈电流的确定,是指根据分布在托卡马克真空室外的

磁探针所测量到的场量数值来反演计算所有的环向电流源(包括等离子体电流密度分布函数式(2)中的 α_j 、 γ_j ,外部极向场线圈电流、真空室壁上的感应电流等)。

分布在托卡马克真空室外的磁探针所测量到的场量数值可表示为:

$$C(R, z) = \sum_{en=1}^{n_c} G_M(R, z; R_{en}, z_{en}) I_{en} + \int_{\Omega} dR' dz' G_M(R, z; R', z') J(R', z') \quad (5)$$

此时,平衡重建问题可一般地表述为:

$$T[I_{en}, \alpha_j, \gamma_j] = g \quad (6)$$

式中:诊断数据 g 是已知的,算子 T 可推断出。

这种反演问题,在数学上是一种对不适应问题的求解。对此类问题的求解,其基本思想均为对解加上一定限制,即给出一定的约束条件,以缩小允许解的种类。在托卡马克稳态运行时,即在等离子体电流处于平顶处,此时的等离子体处于平衡状态,它应遵循所谓的Grad-Shafranov方程。在等离子体平衡重建问题中,Grad-Shafranov方程就是从物理模型出发、反演环向等离子体电流密度分布解所需要的平衡约束条件。因此,可对 $J(R, \psi)$ 解的范围附加进一步的限制(见式(2))。有了式(2)的约束条件,且测量数据 g 是已知的,就可根据上式要求求解在最小二乘意义下的解。等离子体电流密度分布函数式(2)中的 α_j 、 γ_j 是未知的,实验上,现有的诊断手段尚难以对它们进行直接测量,只能依据间接的测量数据,用反演方法来重建。因此,平衡反演计算条件下极向场线圈电流的确定中必须同时反演确定 α_j 、 γ_j ,这需对式(6)中的算子 T 进行巧妙设置,使得通过间接的测量数据,用反演方法来同时重建得到极向场线圈电流和等离子体电流密度分布函数式(2)中的 α_j 、 γ_j 。

式(2)中等离子体电流在各个测量点产生的磁通为:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \sum_{j=1}^{65 \times 65 \text{ 格点数}} G_{\text{测量点-等离子体}} R(\psi^i - \psi^m) + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \mu_0 / 4\pi^2 R \sum_{j=1}^{65 \times 65 \text{ 格点数}} G_{\text{测量点-等离子体}} R(\psi^i - \psi^n) \quad (7)$$

上式中, $\sum_{j=1}^{65 \times 65 \text{ 格点数}} G_{\text{测量点-等离子体}} R(\psi^i - \psi^m)$ 和

$\mu_0/4\pi^2 R \sum_{j=1}^{65 \times 65 \text{格点数}} \mathbf{G}_{\text{测量点-等离子体}} R(\psi^i - \psi^n)$ 对应的 α_j, γ_j 可分别提前算好, 借用格林函数的概念, 将上式中对应 α_j, γ_j 的部分合在一起统一作为 $\mathbf{G}'_{\text{plasma}}$ 。因此, 等离子体电流在各个测量点产生的磁通为 $\mathbf{G}'_{\text{plasma}} \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \gamma_j \end{bmatrix}$ 。

这样, 分布在托卡马克真空室外的磁探针所测量到的场量数值可表示为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}'_{\text{plasma}}, 0 \\ 0, \mathbf{G}_{\text{coils}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j \gamma_j \\ \mathbf{I}_{\text{coils}} \end{bmatrix} = \mathbf{C}(R, z) \quad (8)$$

上式中的 $\mathbf{G}_{\text{coils}}$ 根据与式(4)同样的方法合并线圈。反演计算情况下虚拟合并线圈前后单零位形等离子体参数和极向场线圈匝电流变化状况如下。

固定边界计算得到的主要等离子体参数分别为: 炮号, 92 600; betap, 1. 464; li, 1. 034; 拉长比, 1. 828; 上三角形变, 0. 496; 下三角形变, 0. 567。

固定边界计算得到的极向场线圈匝电流分别为: -0.502802×10^4 ; -0.194877×10^3 ; 0.169992×10^4 ; 0.486888×10^4 ; 0.486888×10^4 ; -0.636473×10^3 ; -0.103941×10^5 ; -0.738193×10^4 ; -0.109940×10^4 ; -0.738193×10^4 ; 0.791191×10^4 ; 0.791191×10^4 ; -0.639635×10^4 ; -0.148704×10^5 。

反演计算得到的主要等离子体参数分别为: 炮号, 92 600; betap, 1. 469; li, 1. 049; 拉长比, 1. 829; 上三角形变, 0. 495; 下三角形变, 0. 566。

反演计算得到的极向场线圈匝电流分别为: -0.502802×10^4 ; -0.194877×10^3 ; 0.169992×10^4 ; 0.486888×10^4 ; $-0.636473 \times$

10^3 ; -0.103941×10^5 ; -0.738193×10^4 ; -0.109940×10^4 ; -0.738193×10^4 ; 0.791191×10^4 ; -0.639635×10^4 ; -0.148704×10^5 。

从以上结果可看出, 两种计算条件下计算结果的差异很小, 在反演所要求的 2% 误差以内。因此, 通过求解式(8)可保证 EAST 核聚变实验装置反演计算条件下满足两个极向场线圈中的匝电流相等的需要。

4 结论

在 EAST 核聚变实验装置中, 可在设计中固定边界计算和未来运行过程中反演计算两种条件下, 满足极向场线圈匝电流相等的设计需要, 能够保证 EAST 极向场线圈布置条件下大偏滤线圈和小偏滤线圈在各种位形下电流始终相同。

参考文献:

- [1] 石秉仁. 磁约束聚变原理与实践[M]. 北京: 原子能出版社, 1999: 61-84.
- [2] 宫野, 石秉仁, 李芳. 非圆截面等离子体平衡问题的积分法[J]. 核聚变与等离子体物理, 1982, (3): 190-193.
GONG Ye, SHI Bingren, LI Fang. Non-circle plasma equilibrium problem integral method[J]. Nuclear Fusion and Plasma Physics, 1982, (3): 190-193(in Chinese).
- [3] 林为干, 符果行, 邬琳若, 等. 电磁场理论[M]. 北京: 北京人民邮电出版社, 1984: 177-253.
- [4] JOHNSON J L, DALHED H E, GREENE J M, et al. Numerical determination axisymmetric toroidal magnetohydrodynamic equilibria [J]. Journal of Computational Physics, 1979, 32: 212-234.