第34卷第1期
2005年3月
上海师范大学学报(自然科学版)
Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences)
Vol. 34, No. 1
2005, Mar.

投影信赖域最优路径内点算法解有界变量的约束优化问题

顾益明

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 基于最优路径(optimal path),提供一种投影信赖域内点算法解有界变量的线性等式约束优化. 在合理的条件下,证明了所提供的算法不仅具有整体收敛性并且保持局部超线性收敛速率. 数值计算结果表明了算法的有效性.

关键词: 最优路径; 信赖域方法; 内点法

中图分类号: O221.2　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-5137(2005)01-0018-07

1　介　绍

考虑有界变量及线性等式约束的非线性优化问题

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad Ax = b, l \leqslant x \leqslant u \tag{1.1}$$

其中f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$是光滑的非线性函数, 矩阵$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$,向量$b \in \mathbf{R}^m (n > m)$, 向量$l \in \{\mathbf{R} \cup \{-\infty\}\}^n$, $u \in \{\mathbf{R} \cup \{+\infty\}\}^n$, 且$l < u$. 定义$\Omega \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n \mid l \leqslant x \leqslant u, Ax = b\}$表示问题(1.1)的可行集, $\text{int}(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{R}^n \mid l < x < u, Ax = b\}$表示其"严格可行内点"集.

Bonmans 和 Pola[2]提出了一种内点信赖域算法解非负变量的线性等式约束优化问题,算法假定二次函数是凸函数,以保证整体收敛性,但为使求得的搜索方向满足严格可行性,会带来很多计算上的困难.

最近,Coleman 和 Li[3]提出了一种双信赖域方法解具有有界变量约束$l \leqslant x \leqslant u$优化问题,使用了两次信赖域搜索迭代方向和精确步长.

本文将采用信赖域与线搜索相结合的方法来解问题(1.1),两种策略的使用能获得算法的整体收敛性,并消除重复求解信赖域子问题带来的大量计算. 利用投影方法构造信赖域子问题,避免在求解子问题时考虑线性等式约束和有界变量约束,使用最优路径的弧线搜索方法来解信赖域子问题,不需Hessian或其近似矩阵为正定矩阵的假设. 沿迭代方向线搜,确保迭代点在信赖域中,并落在严格可行域内. 本文第二节首先利用投影方法构造问题(1.1)的信赖域子问题,第三节构造最优路径来求解信赖域子问题,第四节提出求解问题(1.1)的算法,第五节和第六节分别在合理的条件下证明了算法的整体收敛性和局部收敛速率,第七节给出数值计算结果来验证算法的有效性.

2　信赖域子问题

本节通过选取投影矩阵和二次模型来构造问题(1.1)的信赖域子问题. 令$g(x) \overset{\text{def}}{=} \nabla f(x)$,则

收稿日期: 2004-10-20

基金项目: 上海师范大学科研项目(DKL311).

作者简介: 顾益明(1974-),男,上海师范大学数理信息学院讲师.

$$L(x,\lambda,\mu,\nu) = f(x) + (Ax-b)^T\lambda - \mu^T(x-l) - \nu^T(u-x) \tag{2.1}$$

是问题(1.1)的 Lagrange 函数，其中 Lagrange 乘子 $\lambda \in \mathbf{R}^m$，$0 \leqslant \mu,\nu \in \mathbf{R}^n$. 记 l_i,u_i,x_*^i 分别表示向量 l，u,x_* 的第 i 个分量，同样 $(\cdot)_i$ 表示向量 $(\cdot)$ 的第 i 个分量. 现定义向量函数 $v(x):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，其每一个分量

$$v_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x^i - u_i, & \text{若 } (g+A^T\lambda)_i < 0, \text{ 且 } u_i < +\infty, \\ x^i - l_i, & \text{若 } (g+A^T\lambda)_i \geqslant 0, \text{ 且 } l_i > -\infty, \\ -1, & \text{若 } (g+A^T\lambda)_i < 0, \text{ 且 } u_i = +\infty, \\ 1, & \text{若 } (g+A^T\lambda)_i \geqslant 0, \text{ 且 } l_i = -\infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

记对角阵 $D(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{diag}\{|v_1(x)|^{-\frac{1}{2}},\cdots,|v_n(x)|^{-\frac{1}{2}}\}$. 自然的导出问题(1.1)的一阶必要性条件

$$D(x)^{-2}[g(x) + A^T\lambda] = 0,\ Ax = b. \tag{2.3}$$

记 $B_k \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 f(x_k)$ 或其近似阵，$J^v(x) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是 $|v(x)|$ 的 Jacobian 矩阵，$C_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k \operatorname{diag}\{g^k + A^T\lambda_k\} J_k^v D_k$，$H_k \stackrel{\text{def}}{=} B_k + C_k$. 则(2.3)的牛顿方程为：

$$D_k^{-2}H_k\delta_k = D_k^{-2}[g^k + A^T\lambda_{k+1}],\ A\delta_k = 0. \tag{2.4}$$

假如定义 $\hat\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k\delta_k$，$\hat g^k = D_k^{-1}g^k$，$\hat A_k = AD_k^{-1}$ 和 $\widehat H_k = D_k^{-1}(B_k + C_k)D_k^{-1}$，则(2.4)的第一个方程两边都左乘 D_k 后，等价地写成

$$\hat H_k\hat\delta_k = -(\hat g^k + \hat A_k^T\lambda_{k+1}),\ \hat A_k\hat\delta_k = 0 \tag{2.5}$$

假定 $\hat A(x)$ 是行满秩的，则进行 QR 分解，得 $\hat A(x) = [\ R(x),0\ ]\begin{bmatrix} Y(x) \\ Z(x)\end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} Y(x) \\ Z(x)\end{bmatrix}$ 为正交矩阵，$R(x) \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 是秩为 m 的非奇异下三角矩阵. 矩阵 $Z(x) \in \mathbf{R}^{(n-m)\times n}$ 构成零空间 $\mathcal{N}(\hat A(x))$ 的正交基，即 $\hat A(x)Z(x)^T = 0$. 而矩阵 $Y(x) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 构成值空间 $\mathcal{R}(\hat A(x)^T)$ 的正交基. 记 $R_k = R(x_k)$，$Z_k = Z(x_k)$，$Y_k = Y(x_k)$，Lagrange 乘子 λ_k 由(2.4)式可以通过解上三角方程

$$R_k^T\lambda_k = Y_k g^k \tag{2.6}$$

来得到. 这样，(2.5)的第一个方程可以写成

$$Z_k\widehat H_k\hat\delta_k = -Z_k\hat g^k, \tag{2.7}$$

其中再利用正交矩阵 $\begin{bmatrix} Y_k \\ Z_k\end{bmatrix}$，(2.7)可以写成

$$\begin{bmatrix} Z_k\widehat H_k \\ \hat A_k\end{bmatrix}[Y_k^T\ Z_k^T]\begin{bmatrix} Y_k \\ Z_k\end{bmatrix}\hat\delta_k = \begin{bmatrix} Z_k\hat g^k \\ 0\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} Z_k\widehat H_kY_k^T & Z_k\widehat H_kZ_k^T \\ R_k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_k\hat\delta_k \\ Z_k\hat\delta_k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z\hat g^k \\ 0\end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

从(2.5)可知 $\hat A_k\hat\delta_k = [\ R_k,0\ ]\begin{bmatrix} Y_k \\ Z_k\end{bmatrix}\hat\delta_k = 0$，则 $R_kY_k\hat\delta_k = 0$，但 R_k 是非奇异下三角矩阵，所以 $Y_k\hat\delta_k = 0$.

因此(2.8)可既约为

$$[Z_k\widehat H_kZ_k^T]Z_k\hat\delta_k = -Z_k\hat g^k. \tag{2.9}$$

令 $\tilde H_k \stackrel{\text{def}}{=} Z_k\widehat H_kZ_k^T$，$\tilde g^k \stackrel{\text{def}}{=} Z_k\hat g^k$，则基于(2.9)，可以导出问题(1.1)的信赖域子问题

$$(\tilde S_k)\ \min \tilde q_k(\tilde\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde g^k,\tilde\delta\rangle + \frac{1}{2}\langle\tilde\delta,\tilde H_k\tilde\delta\rangle \quad \text{s.t. } \|\tilde\delta\| \leqslant \Delta_k. \tag{2.10}$$

引理 2.1　$\tilde\delta_k$ 是子问题 $(\tilde S_k)$ 的解当且仅当存在 $0 \leqslant \zeta_k \in \mathbf{R}^1$ 使得

$$\begin{cases}(\tilde{H}_k+\zeta_k I)\,\tilde{\delta}_k=-\tilde{g}^k \\ \zeta_k(\Delta_k^2-\|\tilde{\delta}\|^2)=0\end{cases}, \tag{2.11}$$

且 $\tilde{H}_k +_k I$ 是半正定的.

3 最优路径

3.1 最优路径的构成

现在来构造如 Bulteau 和 Vial(见文献[1])提出的最优路径解信赖域子问题 $(\tilde{S}_k)$. 当信赖域半径取在区间 $[0,+\infty)$ 时,信赖域子问题 $(\tilde{S}_k)$ 的迭代点将落在由始点出发的曲线路径上. 为了更好的定义最优路径,我们对 $\tilde{H}_k\in\mathbf{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ 进行特征值分解,设分解为

$$\tilde{H}_k=W\Phi W^T=(w^1,w^2,\cdots,w^{n-m})\,\mathrm{diag}\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{n-m}\}(w^1,w^2,\cdots,w^{n-m})^T. \tag{3.1}$$

显然 $\tilde{H}_k$ 是对称矩阵,其特征值 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_{n-m}$ 是实数且对应的特征向量 $w^1,w^2,\cdots,w^{n-m}$. 不失一般性,假定 $\phi_1\leqslant\phi_2\leqslant\cdots\leqslant\phi_{n-m}$ 是 $\tilde{H}_k$ 特征值,对应特征向量 $w^1,w^2,\cdots,w^{n-m}$. 根据 $\phi_j\geqslant 0$, $\phi_j\leqslant 0$ 和 $\phi_j=0$ 分割集合 $\{1,,n-m\}$ 分别为 $\mathscr{P}$, $\{\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{N}$.

最优路 $\Gamma(\tau)$ 可以表示为

$$\Gamma(\tau)=\Gamma_1(t_1(\tau))+\Gamma_2(t_2(\tau)), \tag{3.2}$$

其中

$$\Gamma_1(t_1(\tau))=-\Big[\sum_{j\in\mathscr{P}}\frac{t_1(\tau)}{\phi_j t_1(\tau)+1}\tilde{g}_j^k w^j+t_1(\tau)\sum_{j\in\mathscr{N}}\tilde{g}_j^k w^j\Big],$$

$$\Gamma_2(t_2(\tau))=t_2(\tau)w^1,$$

且

$$t_1(\tau)=\begin{cases}\tau, & 若\ \tau<1/T\\ 1/T, & 若\ \tau\geqslant 1/T\end{cases},\quad t_2(\tau)=\begin{cases}0, & 若\ \tau<1/T\\ \tau-1/T, & 若\ \tau\geqslant 1/T\end{cases},$$

$\mathscr{P}=\{j\mid\phi_j\neq 0,j=1,\cdots,n-m\}$, $\mathscr{N}=\{j\mid\phi_j=0,j=1,\cdots,n-m\}$, $\tilde{g}_j^k=\langle\tilde{g}^k,w^j\rangle$, $j=1,\cdots,n-m$, $\tilde{g}^k=\sum_{j=1}^{n-m}\tilde{g}_j^k w^j$, $T=\max\{0,-\phi_1\}$ 并且当 $T=0$ 时 $1/T$ 定义为 $+\infty$. 值得注意的是,当 $\tilde{H}$ 不定,对所有的 $\phi_j=\phi_1<0$,若是 $j\in\{1,\cdots,n-m\}$ 有 $\tilde{g}_j^k=0$ 且,这时才会定义 $\Gamma_2(t_2(\tau))$,这种情况被视为困难情况(参见文献[8]). 一般情况下,$\Gamma(\tau)$ 定义时只考虑 $0\leqslant\tau<\frac{1}{T}$,即,$\Gamma(\tau)=\Gamma_1(t_1(\tau))$.

3.2 最优路径的性质

曲线 $\Gamma(\tau)$ 定满足一些性质以保证所提供的算法是整体收敛的. 类似于文[13]中引理 2.3 可得

引理 3.1 令在信赖域内迭代步 $\tilde{\delta}_k$ 是从最优路上得到的,则对于 $\tau\in(0,+\infty)$ 路径范数 $\|\Gamma(\tau)\|$ 是单调递增的,且存在 τ^*, $\Gamma(\tau^*)$ 在最优路径上,即

$$\|\Gamma(\tau^*)\|=\Delta_k,$$

且满足

$$(\tilde{H}^k+\tilde{\delta}_k I)\,\Gamma(\tau^*)=-\tilde{g}^k, \tag{3.3}$$

$\tilde{\delta}_k\geqslant 0$ 由

$$\tilde{\delta}_k=1/t_1(\tau^*),\quad 当\ \tau^*<1/T, \tag{3.4}$$

$$\tilde{\delta}_k=\frac{1}{T},\ t_2(\tau^*)=\tau^*-\frac{1}{T},\quad 当\ \tau^*\geqslant 1/T \tag{3.5}$$

得到,其中 $T=\max\{0,-\phi_1\}$.

4 算 法

下面给出求解问题(1.1)的最优路径投影 Hessen 信赖域内点算法.

初始步 选定参数 $\beta \in (0,\frac{1}{2})$, $0 < \bar{\eta} < \eta_1 < \eta_2 < 1$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 < \gamma_3$, $\epsilon \geqslant 0$. 选取初始点 $x_0 \in \mathbf{R}^n$，对称正定矩阵 B_0，初始信赖域半径 $\Delta_0 > 0$ 和最大信赖域半径 $\Delta_{\max} \geqslant \Delta_0$. 再令 $k = 0$，转主步.

主步

(1) 计算 $f_k = f(x_k)$, $g^k = \nabla f(x_k)$, B_k, D_k，QR 分解 $\hat{A}_k$ 得到 Y_k, Z_k 和 R_k，通过(2.12)计算 λ_k，再计算 C_k.

(2) 如果 $\|\tilde{g}^k\| \leqslant \epsilon$，则停止计算，$x_k$ 作为最优解；否则，转下一步.

(3) 构造最优路径 Γ_k.

(4) 求解信赖域子问题

$$(\tilde{S}_k)\ \min \tilde{q}_k(\tilde{\delta}) \overset{\text{def}}{=} \langle \tilde{g}^k, \tilde{\delta}\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{\delta}, \tilde{H}_k\tilde{\delta}\rangle \quad \text{s.t.}\ \|\tilde{\delta}\| \leqslant \Delta_k$$

记 $\tilde{\delta}_k$ 为信赖域子问题 $(\tilde{S}_k)$ 的解.

(5) 令

$$\delta_k = D_k^{-1} Z_k^T \tilde{\delta}_k, \tag{4.1}$$

选取 $\alpha_k = 1, \omega, \omega^2, \cdots$，直到下列不等式满足，

$$f(x_k + \alpha_k \delta_k) \leqslant f(x_k) + \alpha_k \beta q_k(\delta_k), \tag{4.2}$$

$$\text{同时}\ l \leqslant x_k + \alpha_k \delta_k \leqslant u. \tag{4.3}$$

(6) 令

$$s_k = \begin{cases} \alpha_k \delta_k, & \text{若}\ x_k + \alpha_k\delta_k \in \operatorname{int}(\Omega), \\ \theta_k \alpha_k \delta_k, & \text{否则}. \end{cases} \tag{4.4}$$

其中 $\theta_k \in (\theta_l, 1)$, $0 < \theta_l < 1$，并且 $\theta_k - 1 = O(\|\delta_k\|)$. 从而令

$$x_{k+1} = x_k + s_k. \tag{4.5}$$

计算

$$\operatorname{Pred}(s_k) = q_k(0) - q_k(s_k), \tag{4.6}$$

$$\operatorname{Ared}(s_k) = f(x_k) - f(x_k + s_k), \tag{4.7}$$

$$\rho_k = \frac{\operatorname{Ared}(s_k)}{\operatorname{Pred}(s_k)}. \tag{4.8}$$

(7) 校正信赖域半径

$$\Delta_{k+1} = \begin{cases} [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k] & \text{若}\ \rho_k \leqslant \eta_1 \\ (\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k] & \text{若}\ \eta_1 < \rho_k < \eta_2. \\ (\Delta_k, \min\{\gamma_3 \Delta_k, \Delta_{\max}\}] & \text{若}\ \rho_k \geqslant \eta_2 \end{cases} \tag{4.9}$$

计算 f_{k+1} 和 g^{k+1}.

(8) 计算 B_{k+1}，D_{k+1} 和 C_{k+1}，置 $k \leftarrow k+1$ 再转步 2.

注释 若 α_k 表示算法第 5 步中沿 δ_k 方向受有界变量约束 $l \leqslant x_k + \alpha_k\delta_k \leqslant u$ 的步长，即

$$\alpha_k \overset{\text{def}}{=} \min\{\max\{\frac{l_i - x_k^i}{\delta_k^i}, \frac{u_i - x_k^i}{\delta_k^i}\} : i = 1, \cdots, n\}. \tag{4.10}$$

其中 向量 δ_k^i 是 δ_k 的第 i 个分量. 若 $\delta_k^i = 0$，则 $\frac{l_i - x_k^i}{\delta_k^i} \equiv \frac{u_i - x_k^i}{\delta_k^i} \overset{\text{def}}{=} +\infty$. α_k的关键特性是取任意的步 α_k

δ_k 后得到的点 $x_k+\alpha_k\delta_k$ 都不会超出有界约束的边界.

引理 4.1 预计下降量 $\mathrm{Pred}(\delta_k)\overset{\mathrm{def}}{=}-q_k(\delta_k)=-\tilde{q}_k(\tilde{\delta}_k)$ 满足下降条件

$$\mathrm{Pred}\ (\delta_k)\geqslant\kappa\ \|\tilde{g}^k\|\ \min\{\Delta_k,\frac{\|\tilde{g}^k\|}{\|\tilde{H}_k\|}\},\tag{4.11}$$

并且

$$\langle g^k,\delta_k\rangle\leqslant-\hat{\kappa}\|\tilde{g}^k\|\ \min\{\Delta_k,\frac{\|\tilde{g}^k\|}{\|\tilde{H}_k\|}\},\tag{4.12}$$

其中 $\kappa,\hat{\kappa}>0$ 是与 k 无关的常数.

5 整体收敛性

作下列假设:

假设 1 水平集 $\mathscr{L}(x_0)x\overset{\mathrm{def}}{=}\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant f(x_0)\}$ 是紧的,算法产生的迭代序列 $x_k\in\mathscr{L}(x_0)$.

假设 2 $\|B_k\|$ 一致有界,即对任意的 k,存在 $r_B>0$, 使得 $\|B_k\|\leqslant r_B$.

假设 3 $\|\nabla^2f(x)\|$ 一致有界,即对任意 $x\in\mathscr{L}(x_0)$,存在 $r_G>0$, 使得 $\|\nabla^2f(x)\|\leqslant r_G$.

假设 4 $\|g(x)\|_\infty$ 一致有界,即对任意 $x\in\mathscr{L}(x_0)$,存在 $r_g>0$, 使得 $\|g(x)\|_\infty\leqslant r_g$.

显然,由假设 1 和假设 2 满足,可以推得 $\|D_k^{-1}\|$, $\|\tilde{H}_k\|$ 和 $\|Z_kD_k^{-1}\nabla^2f(x)D_k^{-1}Z_k^T\|$ 均有界,即分别存在 r_D, $\tilde{r}_H$ 和 $\tilde{r}_G>0$ 使得

$$\|D_k^{-1}\|\leqslant r_D,\ \|\tilde{H}_k\|\leqslant\tilde{r}_H,\ \|Z_kD_k^{-1}\nabla^2f(x)D_k^{-1}Z_k^T\|\leqslant\tilde{r}_G.\tag{5.1}$$

引理 5.1 如果假设 1 ~ 假设 3 满足,对任意 k,若存在 $\varepsilon>0$, 使 $\|\tilde{g}^k\|\geqslant\epsilon$, 则当

$$\Delta_k\leqslant\frac{\kappa\varepsilon(1-\beta)}{\max\{\tilde{r}_H,\tilde{r}_G\}}\tag{5.2}$$

时, $\alpha_k=1$ 满足第 5 步中下降条件(4.2),即

$$f(x_k+\delta_k)\leqslant f(x_k)+\beta\,q_k(\delta_k).\tag{5.3}$$

定理 5.2 如果假设 1 ~ 假设 3 满足,令 x_k 为算法产生的迭代序列,则

$$\liminf_{k\to\infty}\|\tilde{g}^k\|=0.\tag{5.4}$$

证明 由于篇幅有限,证明略.

定理 5.3 如果假设 1 ~ 假设 3 满足,令 x_k 为算法产生的迭代序列, $B_k=\nabla^2f(x_k)$. 若 x_* 为序列的极限点,则 $Z_*^TD_*^{-1}B_*D_*^{-1}Z_*$ 是半正定的.

6 局部收敛速率

定理 3.5 说明至少有一个 $\{x_k\}$ 的极限点是稳定点,本节再作一些假定,以得到进一步的结果和局部收敛速率. 定义指标集

$$I(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\,i\mid x^i=l_i,\ i=1,\cdots,n\,\},\ Q(x)\overset{\mathrm{def}}{=}\{\,i\mid x^i=u_i,\ i=1,\cdots,n\,\}.\tag{6.1}$$

对任意 $I(x)\cup Q(x)\subset\{1,\cdots,n\}$,与其相关的优化问题为

$$(P)_{I\cup Q}\min f(x);\ \mathrm{s.t.}\ Ax=b,\ (x-l)_{I(x)}=0\ \mathrm{or}\ (x-u)_{Q(x)}=0.\tag{6.2}$$

假设 5 对所有的 $I(x)\cup Q(x)\subset\{1,\cdots,n\}$, 关于 $(P)_{I\cup Q}$ 的一阶最优方程没有非孤立解.

假设 6 对 $i\in I(\bar{x})\cup Q(\bar{x})$, 当 $(A^T\lambda)_i=0$ 时, 有 $\lambda=0$, 此时问题(1.1)的约束就起作用.

假定 $(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$ 是与满足假设 5 的孤立解 $\bar{x}$ 对应的组. 定义严格起作用约束集

$$J_I(\bar{x})\overset{\mathrm{def}}{=}\{\,i\mid\bar{\mu}_i>0,\ i=1,\cdots,n\,\},\ J_Q(\bar{x})\overset{\mathrm{def}}{=}\{\,i\mid\bar{\nu}_i>0,\ i=1,\cdots,n\,\},\tag{6.3}$$

定义方向的扩展关键锥为

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \{d \in \mathbf{R}^n \mid Ad = 0,\ d^i = 0,\ i \in J_I(\bar{x}) \cup J_Q(\bar{x})\}. \tag{6.4}$$

假设 7 问题(1.1)的最优解 x_* 满足强二阶条件,即存在 $\chi > 0$ 使得

$$p^T \nabla^2 f(x_k) p \geqslant \chi \| p \|^2,\ p \in \mathscr{T}(x_k). \tag{6.5}$$

假设 8

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| (\tilde{H}_k - Z_k D_k^{-1} \nabla^2 f(x_k) D_k^{-1} Z_k^T) \tilde{\delta}_k \|}{\| \tilde{\delta}_k \|} = 0. \tag{6.6}$$

这意味着

$$\langle \delta_k, H_k \delta_k \rangle = \langle \tilde{\delta}_k, \tilde{H} \tilde{\delta}_k \rangle = \langle \delta_k, \nabla^2 f(x_k) \delta_k \rangle + o(\| \delta_k \|^2).$$

定理 6.1 如果假设 2 ~ 8 满足，$\{x_k\}$ 是算法产生的序列,则

$$\lim_{k\to\infty} \| \tilde{g}_k \| = 0. \tag{6.7}$$

定理 6.2 假设 2 ~ 8 满足，x_* 为问题(1.1)的局部极小点,则 $\{x_k\}$ 超线性收敛于 x_*，即

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| x_{k+1} - x_* \|}{\| x_k - x_* \|} = 0. \tag{6.8}$$

7 数值结果

将所提供的投影信赖域内点算法在奔腾 IV - 1.6GHz 的电脑上,利用 Matlab 软件编程进行数值实现. 下面给出具体计算的结果. 为了检验算法的有效性,我们选取参数如下：$\epsilon = 10^{-8}$，$\eta_1 = 0.01$，$\eta_2 = 0.8$，$\gamma_1 = 0.2$，$\gamma_2 = 0.5$，$\gamma_3 = 2$，$\beta = 0.4$，$w = 0.5$. 取最大信赖域半径 $\Delta_{\max} = 5$，初始信赖域半径 $\Delta_0 = 1$.

对 6 个标准测试试题进行数值试验(表 1)，这 6 个标准试题均引自文[10]. 表中 ITR，NF 和 NG 分别表示迭代次数,函数值计算次数和梯度值计算次数.

表 1 数值试验结果

题号	n	ITR	NF	NG
HS28	3	7	8	7
HS48	10	18	21	18
HS48	5	4	5	4
HS49	5	26	32	26
HS51	5	3	4	3
HS73	5	12	14	12

参考文献：

[1] BULTEAU J P, VIAL J PH. Curvilinear path and trust region in unconstrained optimization, a convergence analysis[J]. Mathematical Programming Study, 1987, 30: 82 - 101.

[2] BONNANS J F, POLA C. A trust region interior point algorithm for linear constrainede optimization[J]. SIAM J Optimization, 1997, 7(3): 717 - 731.

[3] COLEMAN T F, LI Y. An interior trust region approach for minimization subject to bounds[J]. SIAM J Optimization, 1996, 6(2): 418 - 445.

[4] DENG N Y, XIAO Y, ZHOU F J. A nonmonotonic trust region algorithm[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 76: 259 - 285.

[5] DENNIS J E, MORE J J. A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods[J]. Math Comp, 1974, 28: 549 - 560.

[6] DENNIS J E JR, SCHNABLE R B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations[M]. Prentice Hall, New Jersey, 1983.

[7] DIKIN I I. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming[J]. Soviet Math Dokl, 1967, (8): 18 - 35.

[8] MORE J J, SORENSEN D C. Computing a trust region step[J]. SIAM Journal on Science and Statistical Computing, 1983, 4: 553 - 572.

[9] POWELL M J. On the global convergence of trust region algorithm for unconstrained minimization[J]. Mathematical Programming, 1984, 29: 297 - 303.

[10] HOCK W, SCHITTKOWSKI K. Test examples fro nonlinear programming code, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 187[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[11] SORENSEN D C. Newton's method with a model trust region modification[J]. SIAM J Numer Anal, 1982, 19: 409 - 426.

[12] ZHU D T. Curvilinear paths and trust region methods with nonmonotonic back tracking techniaue for unconstrained optimization[J]. J of Computational Mathematics, 2001, 19, 241 - 258.

[13] ZHU D T. Trust region methods with nonmonotonic back tracking technique for constrained optimization[J]. Optimization, 1999, 46: 81 - 113.

Projected trust region interior point algorithm via optimal path for contrainted optimation problem subject to bounds on variables

GU Yi-ming

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In this paper we propose a projected trust region interior point algorithm via optimal path for optimation problem with linear equality contraint subject to bounds on variables. The proposed algorithm is globally convergent and have locally fast convergent rate under some reasonable conditions. The results of numerical experiments are reported to show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: optimal path; trust region method; interior point method