维普资讯 http://www.cqvip.com

第29卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 29, No. 2
2000年6月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Jun. 2000

2000,29(2)
1-5

外扰动Riemann几何在地震预测中的应用

李新洲

(上海师范大学 理工信息学院,上海 200234)

摘 要:研究了球对称Riemann几何在外扰动下的稳定性.主要讨论引力波入射到该物体时,发生散射和吸收的方式.这个问题的答案显然在地震预测研究中存在着应用前景.在理论上,这些答案还引发进一步的兴趣:它将更深入地揭示广义相对论时空性质.

关键词:灾害;引力波;外扰动;地震 灾害 地震预测

中图分类号:O29;P631.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-5137(2000)02-0001-05

P315.61

0 引 言

重大自然灾害是人类最为关注的自然现象之一.人类史上,多数文明显示了对超越人们自身的自然灾害的敬畏之情.这种传统一直影响到现在,迄今尚有不少科学专业人士认为诸如地震之类的灾害是不可预报的.一般认为,地壳处在运动之中,因而经受缓慢的形变.形变将导致岩石中应力的积累.如果在某些地方,岩石不再能承受应力,就会发生突变,弛豫到无应力位置,并向周围环境释放能量.如果环境可以承担这种能量的增加,那么这是一个孤立的事件.但如果环境也处在一种临界状态,就可能发生链式反应.地震就相当于这种应力释放的链式反应涉及到较大的区域.1989年,CALSON和LANGER提出了基于自组织临界态的地震模型.同年,BAK和汤超曾用多至8000块积木的二维和三维列阵模型来研究地震的自组织临界性,他们认为标度行为正是地震难以预报的原因.事实上,按自组织临界状态的观点,预测所收集的有关初始条件的信息量将随时间指数增长.然而,我国地震工作者经过长期科学实践,已经提供了1974年2月4日辽宁海城7.3级地震,1997年4月6日新疆伽师6.3级地震等成功预报实例[1].如何进一步总结和改进能真实反映特大自然灾害发生的关键因素,建立更精确的模型,发现本质的物理机制,解决预测机制的理论基础问题,是当前灾害学的重要研究方向.

对包括地震在内的灾害的数学描述确实已取得了一定进步[2],然而其物理本质机制的

收稿日期:2000-03-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(19875016)

作者简介:李新洲(1946-),男,上海师大理工信息学院教授,博士生导师.

维普资讯 http://www.cqvip.com

研究相对滞后.灾害的许多现象都涉及到奇性.我们真正的兴趣在于奇性起因,而不是奇性现象的本身.如果简单地将奇性嵌入到动力学中去,并不会取得实质性的进展,因为通过这样的方法我们可以随心所欲地安排任何的奇性.在 Riemann 几何的框架中,具有物理意义的度规一般来说是 Enistein 理论[3]或 Lovelock 理论的解[4].如果将地球简化成一个球形几何体,则可用 Riemann 几何的球对称度规来描述.黑洞的扰动可以用拟正则模来研究[5],求解黑洞拟正则模方程一般称为 Regg-Wheeler 方程.如果度规带有奇性,我们可以用推广的 Regge-Wheeler 方程来导出在外扰动下度规的拟正则模.利用这些模的性质,可对带有奇性的度规进行分类.这样,我们可以为灾害学提供在外扰动下是否发生灾变的几何模型.

本文安排如下:第 1 节将导出外扰动方程.第 2 节列举稳定与不稳定几何特例.第 3 节对一般带奇性球对称几何,建立一种稳定性判别方法.第 4 节为总结和讨论.

1 外扰动方程

在 Einstein 理论中,时间独立的球对称度规可写作

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\varphi^2), \tag{1.1}$$

对于上述度规在外扰动下的度规为

$$\begin{aligned}ds^2 = {} & (B + \delta B)dt^2 - (r\sin\theta + \delta\psi)^2(d\varphi - \sigma dt - q_r dr - q_\theta d\theta)^2 - \\ & (A + \delta A)dr^2 - (r + \delta\zeta)^2 d\theta^2,\end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $\delta A,\delta B,\delta\psi,\delta\zeta,\sigma,q_r$ 和 q_θ 是 t,r,θ 的函数.对于一般的扰动,σ、q_r 和 q_θ 将为一阶小量,而 $\delta A,\delta B,\delta\psi$ 和 $\delta\zeta$ 是小的增量.扰动 σ、q_r 和 q_θ 将导致球对称几何转动,而扰动 $\delta A,\delta B,\delta\psi$ 和 $\delta\zeta$ 不导致转动,所以存在着两类性质不同的扰动.另一方面,为了保持度规的不变性,在 $\varphi\to-\varphi$ 时,应要求 σ,q_r 和 q_θ 的符号作相应改变.所以称 σ,q_r 和 q_θ 为轴微扰,$\delta A,\delta B,\delta\psi$ 和 $\delta\zeta$ 为极微扰,它们应当分别给予处理.

利用 Cartan 结构方程

$$\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j, \tag{1.3}$$

可以得到 Riemann 曲率张量 R_{ijkl},进行缩并后,又得 R_{icci}张量 $R_{\varphi r}$和 $R_{\varphi\theta}$为

$$R_{\varphi r} = \frac{(r^4\sin^3\theta\Theta^{-1}Q_{rt})_{,t} - (\sin^3\theta\Delta Q_{\theta r})_{,\theta}}{2(r^3\sin^1\theta B^{\frac{1}{2}})}, \tag{1.4}$$

$$R_{\varphi\theta} = \frac{(r^4\sin^3\theta\Delta^{-1}Q_{t\theta})_{,t} - (\sin^3\theta\Delta Q_{r\theta})_{,r}}{2(r^2\sin^2\theta\Theta)}, \tag{1.5}$$

其中 $\Delta=r^2(B/A)^{\frac{1}{2}}$,$\Theta=(AB)^2$,$Q_{\alpha\beta}=q_{\alpha,\beta}-q_{\beta,\alpha}$和 $Q_{\alpha t}=q_{\alpha,t}-\sigma_{,\alpha}(\alpha,\beta=r,\theta)$.扰动应满足 Einstein 方程,即有

$$\delta R_{\varphi r} = \delta R_{\varphi\theta} = 0. \tag{1.6}$$

令 $Q(t,r,\theta)=\Delta Q_{r\theta}\sin^3\theta$,由(1.6)式可导出

$$\frac{\Theta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta} = -(\sigma_{,r} - q_{r,t})_{,t}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial r} = (\sigma_{,\theta} - q_{\theta,t})_{,t}. \tag{1.8}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

在以后的考虑中,假设微扰有 $e^{i\omega t}$ 的时间依赖性,其中 ω 是一个复常数,则上述方程约化为

$$\frac{\Theta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial \theta}=-i\omega\sigma_{,r}-\omega^2 q_r, \tag{1.9}$$

$$\frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial r}=i\omega\sigma_{,\theta}+\omega^2 q_\theta. \tag{1.10}$$

从(1.9)和(1.10)式中消 σ,则有

$$r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+\Theta\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)+\frac{\omega^2 r^4 Q}{\Delta}=0, \tag{1.11}$$

再令 $Q(r,\theta)=Q(r)C_{l+2}^{-3/2}(\theta)$ 进行分离变量,其中 C_n^{ν} 是 Gegenbauer 函数,可得

$$\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right)-(l-1)(l+2)\frac{\Theta\Delta Q}{r^4}+\omega^2 Q=0\ . \tag{1.12}$$

利用广义 tortoise 变换

$$Q\rightarrow rY\ , \tag{1.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}=\frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ . \tag{1.14}$$

可得外扰动方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2}+\omega^2\right)Y=VY\ . \tag{1.15}$$

其中

$$V=(l-1)(l+2)\frac{\Theta\Delta Q}{r^4}-\frac{\Delta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{4}{r^4}\right)\ . \tag{1.16}$$

2 稳定与不稳定几何

新近,李新洲等人提出了一种新型冷星体——D 星[6~8]. D 星的度规为

$$\mathrm{d}s^2=\left(1+\varepsilon^2-\frac{2G\sigma_0 M_B(r)}{r}\right)\mathrm{d}t^2-\left(1-\varepsilon^2-\frac{2G\sigma_0 M_A(r)}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\ , \tag{2.1}$$

其中 $M_A(r)$,$M_B(r)$ 是 Goldstone 场和物质场的函数. 当 $\varepsilon\rightarrow 0$ 时,度规(2.1)约化成通常的 Schwarzschild 几何. D 星也有类 Chandrasekhar 极限,超过这个极限,D 星坍缩成 D 黑洞. 利用(2.16)式,可定出 D 黑洞的拟正规模方程的有效势为

$$V_{\mathrm{DBH}}=\left(1-\varepsilon^2-\frac{2G\sigma_0 M_A}{r}-\frac{\varepsilon^2}{r^2}\right)\left[\frac{(l-1)(l+2)+2(1-\varepsilon)^2}{r^2}-\frac{6G\sigma_0 M_A}{r^3}-\frac{4\varepsilon^2}{r^4}\right], \tag{2.2}$$

视界半径为

$$r_{\mathrm{DBH}}=\frac{2G\sigma_0 M_A+[4G^2\sigma_0^2 M_A^2+4\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)]}{(1-\varepsilon^2)}\ , \tag{2.3}$$

其中 $M_A=M_A(\infty)$. 数值计算表明拟正则模 ω 是复的,且 $\mathrm{Im}(\omega)>0$,即 D 黑洞是稳定的.

下面再讨论标量场-引力场耦合解[9~11],

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{m/\eta}\mathrm{d}t^2-\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{-m/\eta}\mathrm{d}r^2-\left(1-\frac{2\eta}{r}\right)^{1-m/\eta}r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\ , \tag{2.4}$$

其中参数 $\eta>m$. 拟正则模方程的有效势为

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$V_{SG}=(1-\frac{2\eta}{r})^{(2m/\eta-1)}\left\{\frac{4\eta^2}{r^2}[l(l+1)-\frac{6m}{r\eta}](1-\frac{2\eta}{r})+\frac{12\eta}{r^4}(1-\frac{m}{\eta})^2\right\}. \quad (2.5)$$

视界半径为 $r_{SG}=2\eta$. 数值计算表明,拟正则模 ω 是纯虚的,即度规(2.4)是不稳定的.

3 稳定性判别方法

广义 tortoise 变换(2.14)可以改写成

$$\mathrm{d}r_*=(\frac{A}{B})^{1/2}\mathrm{d}r. \quad (3.1)$$

设 $r_0>0$ 是函数 $(A/B)^{1/2}$ 的最大孤立奇点. 当 $r\to+\infty$ 时,有 $r_*\to+\infty$ 为实常数,我们将分成 $\lambda\geqslant1$, $1>\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}>\lambda>0$ 三种情形来讲座. 用 $\frac{\partial}{\partial t}$ 代替 $i\omega$,将(1.15)式写成更为一般形式

$$\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2Y}{\partial r_*^2}-VY, \quad (3.2)$$

对于 $\lambda\geqslant1$ 情形,当 $r\to r_0$ 时,$r_*\to-\infty$. 将(3.2)式两边乘以 $\frac{\partial Y^*}{\partial t}$ 并积分,则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\partial Y^*}{\partial t}\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}+\frac{\partial Y}{\partial r_*}\frac{\partial Y^*}{\partial t\partial r_*}+VY\frac{\partial Y^*}{\partial t})\mathrm{d}r_*=\frac{\partial Y^*}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial r_*}\Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (3.3)$$

取(3.3)的复共轭并与(3.3)相加,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}(\left|\frac{\partial Y}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial Y}{\partial r_*}\right|^2+V|Y|^2)\mathrm{d}r_*=(\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial Y^*}{\partial r_*}+\frac{\partial Y^*}{\partial t}\frac{\partial Y}{\partial r_*})\Big|_{-\infty}^{\infty}. \quad (3.4)$$

将无穷远处边界条件代入上式,可知能量泛函

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\left|\frac{\partial Y}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial Y}{\partial r_*}\right|^2+V|Y|^2)\mathrm{d}r_*=\text{常数}. \quad (3.5)$$

另一方面,从(1.15)式可得 $V(-\infty)=(l-1)(l+2)B(r_0)/r_0^2\geqslant0$, $V(\infty)=0$. 因为 r_0 是 $(A/B)^{\frac{1}{2}}$ 的最大孤立奇点,$V(r_*)$ 是有界正定的. 所以 $\left|\frac{\partial Y}{\partial t}\right|^2$ 的积分是有界的,这样就排除了方程(3.2)具有指数增长的解,即在 $\lambda\geqslant1$ 情形几何在外扰动下是稳定的. 在 $\frac{1}{2}>\lambda>0$ 情形,$r\to r_0$ 时,$r_*\to0$, $V\to-\infty$,所以(3.5)式不再成立,几何在外扰动下是不稳定的. 在 $1>\lambda\geqslant\frac{1}{2}$ 的情形,$r\to r_0$ 时,$r_*\to0$, $V(0)=(l-1)(l+2)B(r_0)/r_0^2\geqslant0$,稳定性不确定.

4 讨 论

我们已经得到了球对称几何的扰动方程,并导出了一种稳定性判别方法. 这一结果可以应用于灾害研究,在外扰动下,稳定几何所对应的是无灾害的动力学模型,反之则对应于发生模型.

本文仅处理了外引力的轴扰动方程,极扰动方程可作相似的处理,可以证明它对几何的稳定性描述是一致的. 对于标量扰动和电磁扰动,我们可以作类似研究,结果将另文发表.

维普资讯 http://www.cqvip.com

参考文献：

[1] 郭增建，李均之，任振球. 特大自然灾害预测的新途径、新方法[M]. 北京：科学出版社，2000.

[2] WOO G. The Mathematics of Natural Catastrophe[M]. Imperial College Press, 1999.

[3] KRAMER D, STEPHANI H, HERLT E, MACCALLUM M. Exact solutions of Einstein's field equations[M]. Cambridge Univ Press, 1980.

[4] LI X Z. Dimensionally continued wormhole solution[J]. Phys Rev, 1994, D50: 3787.

[5] IYER S, WILL C M. Black hole normal modes: A WKB approach I[J]. Phys Rev, 1987, 35: 3621.

[6] LI X Z, ZHAI X H. Fermion stars with a global monopole[J]. Phys lett, 195, B364: 212.

[7] LI X Z, ZHAI X H, CHEN G. Boson D-stars[J]. Astropart, Phys. 2000, 13: 245.

[8] LI J M, LI X Z. Feature of motion around D-stars[J]. Chin Phys Lett, 1998, 15: 3.

[9] AGNESE A G, CAMERA M. Gravitation without black holes[J]. Phy Rev, 1985, D31: 1280.

[10] ZHAI X H, YUAN N Y, LI X Z. Motion of test partical in generalized schwarzschild geometry[J]. Chin Phys Lett, 1999, 16: 321.

[11] YUAN N Y, LI X Z. Complex normal modes of generalized schwarschild geometry[J]. Chin Phys Lett, 2000, 17: 246.

Application of Riemann Geometry with External Perturbations to Earthquake

LI Xin-zhou

(College of Science, Engineering and Information, Shanghai Teachers University, Shanghai, 200234, China)

Abstract: The stablity of the spherical object to external perturbations has been discussed. On the applied side, the principal question to which the study is addressed is the manner in which gravitational waves, incident on the object, are scattered and absorbed. The answer to this question has clearly some interest on predicting earthquake. On the theoretical side, the answer has a more trascendent interest: it provides insight into the deeper aspects of spacetime as conceived in general relativity.

Key words: catastrophe; gravitational wave; perturbation; earthquake