第24卷 第4期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 24, No. 4
1995年12月 J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences) Dec. , 1995

完全竞争市场均衡态存在定理的一个证明

陈 跃 邹辉文 李 炜
(数学系)

提 要 改进了教材[1]中完全竞争市场均衡态存在定理的条件与证明,使之更为合理与清晰.

关键词 完全竞争市场;均衡态
中图法分类号 F224.0

0 引 言

文献[1]的第97,98两页中,给出了完全竞争市场均衡态存在定理及其证明.其中有两个不足之处,其一是在该定理的假设条件(3)中,假定消费者效用函数是连续的且拟凹,这是不够的;其二是在该定理证明所引用的几个定理中,定理2.1.2(实际上是定理2.1.1)与定理3.3.2的证明不尽合理,前者主要想证明预算映射是下半连续的,后者则涉及了生产者利润函数的连续性.本文根据文献[2]中有关定理的证明思想,解决了以上问题.

1 利润函数的连续性

在完全竞争市场中有 m 个生产者.设其生产集分别为 $Y^j \subset R^l, j=1,2,\cdots,m$. 记 $J=\{1,2,\cdots,m\}$,则利润函数分别为 $\pi_j(p)=\max\{p\cdot y \mid y\in Y^j\}$,其中 $p\in\Delta^l=\left\{p\in R^l_+ \mid \sum_{i=1}^{l}p_i=1\right\}$.

定理1 设 $Y\subset R^l$ 是非空紧集,则对任意的 $p^k\in\Delta^l, p^k\to p^0$, 有 $\pi(p^k)\to\pi(p^0)$,其中 $\pi(p)=\max\{p\cdot y \mid y\in Y\}$.

证 设 $p^k\in\Delta^l, p^k\to p^0$,由于 Y 是紧集,所以存在 $y^0\in Y$,使得 $\pi(p^0)=p^0\cdot y^0$.因为 $p^k\to p^0$,所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 K_1,当 $k>K_1$ 时, $p^k\cdot y^0\geqslant p^0\cdot y^0-\varepsilon$.因此

$$\pi(p^k)\geqslant\pi(p^0)-\varepsilon. \tag{1}$$

另一方面,对 Y 中任意点 y 来说,由于 $p^k\to p^0$,所以存在与 y 有关的正整数 $K(y)$ 与开邻域

收稿日期:1995-09-21

$U(y)$，使得当 $k > K(y)$、$x \in U(y)$ 时，有

$$p^k \cdot x \leqslant p^0 \cdot y + \varepsilon. \tag{2}$$

此时，开邻域集 $\{U(y) | y \in Y\}$ 覆盖了整个紧集 Y，从而得到 Y 的有限开覆盖 $\{U(y^1), U(y^2), \cdots, U(y^q)\}$．取 $K_2 = \max\{K(y^1), K(y^2), \cdots, K(y^q)\}$，则当 $k > K_2$ 时，对任何 $y \in Y$，存在 $r \in \{1,2,\cdots,q\}$，使得 $y \in U(y^r)$，从而由(2)得

$$p^k \cdot y \leqslant y^0 \cdot y^r + \varepsilon \leqslant \pi(p^0) + \varepsilon,$$

让 y 取遍 Y，得

$$\pi(p^k) \leqslant \pi(p^0) + \varepsilon. \tag{3}$$

由(1)与(3)可知结论成立． □

2　预算集值映射的连续性

在完全竞争市场中有 n 个消费者，每个消费者的消费集是 $X^i \subset R^l, i = 1,2,\cdots,n$，记 $I = \{1,2,\cdots,n\}$，并设消费者 i 的初始占有财产向量为 $w^i \in X^i$．又假定消费者 i 在生产者 j 处拥有股份 θ_{ij}，$i \in I, j \in J, 0 \leqslant \theta_{ij} \leqslant 1$，且对任何 $j \in J$，

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} = 1. \tag{4}$$

这样，消费者 i 的财产价值为 $p \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p)$，其中 $p \in \Delta^l$．

定理2　设对每个 $i \in I$，X^i 是凸集，且对任何 $p \in \Delta^l$，存在 $z^i \in X^i$，满足 $p \cdot z^i < p \cdot w^i$，而且对每个 $j \in J$，Y^j 是非空紧集，且 $0 \in Y^j$，则对每个 $i \in I$ 来说，由 $B_i(p) = \left\{x^i \in X^i | p \cdot x^i \leqslant p \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p)\right\}$ 定义的预算集值映射 $B_i: \Delta^l \Rightarrow X^i$ 是连续的．

证　首先说明 $B_i(p)$ 是非空集．因为 $0 \in Y^j$，所以 $\pi_j(p) \geqslant 0$，再由条件 $p \cdot z^i < p \cdot w^i$ 知 $z^i \in B_i(p)$．

其次证 B_i 是上半连续的．设 $p^k \in \Delta^l, p^k \to p^0, x^k \to x^0, x^k \in B_i(p^k)$，则由最后一条件知

$$p^k \cdot x^k \leqslant p^k \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p^k).$$

由定理1知道，当 $k \to \infty$ 时，有

$$p^0 \cdot x^0 \leqslant p^0 \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p^0), \tag{5}$$

即 $x^0 \in B_i(p^0)$．

下面证 B_i 是下半连续的．设 $p^k \in \Delta^l, p^k \to p^0, x^0 \in B_i(p^0)$，现在要找 $x^k \in X^i$，使得 $x^k \to x^0$，且 $x^k \in B_i(p^k)$．由于 $x^0 \in B_i(p^0)$，所以(5)成立，对(5)的两种情形，分别讨论如下：

(1) 若 $p^0 \cdot x^0 < p^0 \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p^0)$ 成立，则因为当 $p^k \to p^0$ 时，$\pi_j(p^k) \to \pi_j(p^0)$，所以当 k 充分大时

$$p^k \cdot x^0 - p^k \cdot w^i - \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\pi_j(p^k)$$

$$= p^0 \cdot x^0 - p^0 \cdot w^i - \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^0) + D_k < 0, \tag{6}$$

其中 $D_k = (p^k - p^0)\cdot(x^0 - w^i) - \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}[\pi_j(p^k) - \pi_j(p^0)]$ 是一个趋于零的数. 因此,对充分大的 k,取 $x^k = x^0$,则 $x^k \to x^0$,且由(6)知 $x^k \in B_i(p^k)$.

(2) 若 $p^0 \cdot x^0 = p^0 \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^0)$,则 x^0 在超平面 $p^0 \cdot x = \beta^0$ 上,其中 $\beta^0 = p^0 \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^0)$. 由假设,对 p^0 来说,存在 $z^0 \in X^i$,使得 $p^0 \cdot z^0 < p^0 \cdot w^i$,又由于 $\pi_j(p^0) \geqslant 0$,所以有

$$p^0 \cdot z^0 < p^0 \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^0), \tag{7}$$

即 z^0 在半空间 $p^0 \cdot x < \beta^0$ 中. 由(7),可以和(6)一样推得:当 k 充分大时

$$p^k \cdot z^0 < p^k \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^k),$$

即 z^0 也在半空间 $p^k \cdot x < \beta^k$ 中,其中 $\beta^k = p^k \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p^k)$.

如果能够证明,超平面 $p^k \cdot x = \beta^k$ 的法向量 p^k 与向量 $z^0 - x^0$ 不垂直,则该平面必与过 z^0 及 x^0 的直线相交于唯一点 z^k (图1与图2). 而事实上,由于 $p^0 \cdot z^0 < p^0 \cdot w^i \leqslant p^0 \cdot x^0$,所以 $p^0 \cdot (z^0 - x^0) < 0$,从而当 k 充分大时

$$p^k \cdot (z^0 - x^0) = (p^k - p^0)\cdot(z^0 - x^0) + p^0 \cdot (z^0 - x^0) < 0,$$

这说明 p^k 与 $z^0 - x^0$ 不垂直.

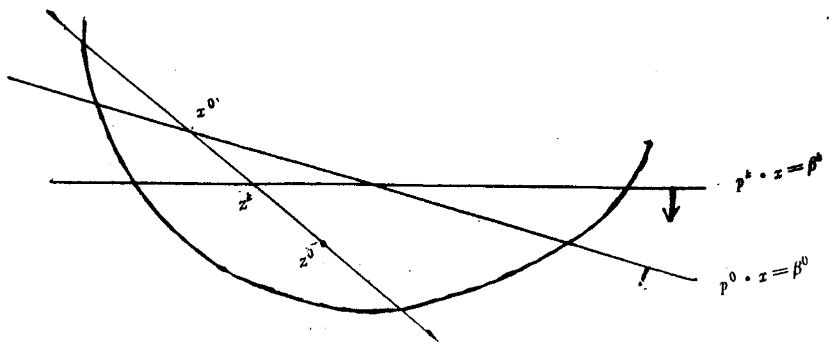


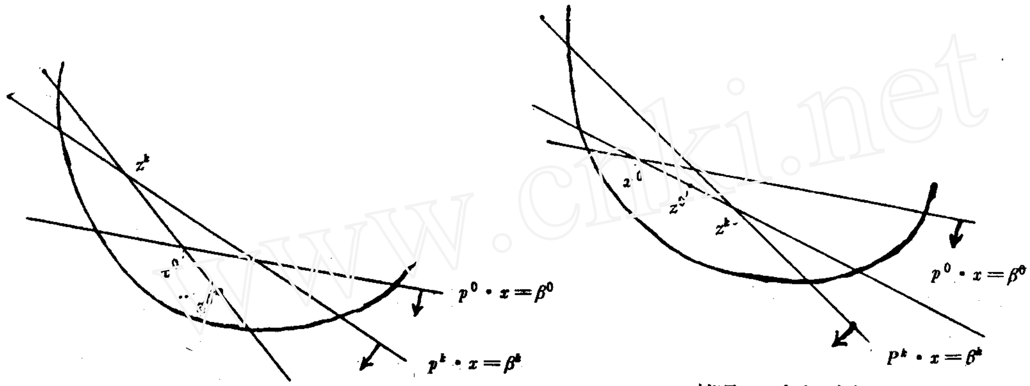
图 1

z^k 在 x^0 与 z^0 之间(箭线表示有关半空间)

现在定义 $x^k \in X^i$ 如下

$$x^k = \begin{cases} z^k, & \text{当 } z^k \text{ 在 } x^0 \text{ 与 } z^0 \text{ 之间时}, \\ x^0, & \text{当 } z^k \text{ 不在 } x^0 \text{ 与 } z^0 \text{ 之间} \end{cases}$$

由于 X^i 是凸集,并且 $x^0, z^0 \in X^i$,所以 $x^k \in X^i$. 又因为当 $p^k \to p^0$ 时,$\beta^k \to \beta^0$,所以当 $p^k \to p^0$



情况一：x^0 在 z^k 与 z^0 之间　　情况二：z^0 在 x^0 与 z^k 之间

图 2

z^k 不在 x^0 与 z^0 之间(箭线表示有关半空间)

时，超平面 $p^k \cdot x = \beta^k$ 的极限位置是 $p^0 \cdot x = \beta^0$，从而超平面 $p^k \cdot x = \beta^k$ 与过 z^0 及 x^0 的直线的交点 z^k 趋于超平面 $p^0 \cdot x = \beta^0$ 与相同直线的交点 x^0，这样，$x^k \to x^0$.

最后证 $x^k \in B_i(p^k)$. 显然，$z^k \in B_i(p^k)$. 当 z^k 不在 x^0 与 z^0 之间时，那么或者 x^0 在 z^k 与 z^0 之间，或者 z^0 在 x^0 与 z^k 之间(图2)，由于 z^0 在半空间 $p^k \cdot x < \beta^k$ 中，所以不论哪一种情况出现，都有这样的结论：x^0 在半空间 $p^k \cdot x \leqslant \beta^k$ 中，或者 $x^0 \in B_i(p^k)$. □

3　对效用函数的假定

设消费者 i 的效用函数是 $u_i: X^i \to R$. 虽然[1]中对效用函数的假定是连续且拟凹，但在证明中却会用到严格拟凹性质. 受[2]的启发，假定效用函数除了满足连续性的要求外，还满足以下条件

若 $u_i(x^i) > u_i(y^i)$ $(x^i, y^i \in X^i)$，那么对任何 $\alpha \in (0,1)$，有

$$u_i(\alpha x^i + (1-\alpha) y^i) > u_i(y^i). \tag{8}$$

这个条件与严格拟凹的区别在于满足(8)的效用函数的最优解不是唯一的. 当然，这个条件包含了拟凹性，这就是下面的

定理3　若连续函数 $u_i(x)$ 满足条件(8)，则 $u_i(x)$ 是拟凹的.

证　设 $x, y \in S_i^c = \{x \in X^i \mid u_i(x) \geqslant c\}$，则 $u_i(x) \geqslant c, u_i(y) \geqslant c$. 现在考虑3种可能的情形：

(1) $u_i(x) > u_i(y)$. 这时，对任何 $\alpha \in (0,1)$，由(8)，

$$u_i(\alpha x + (1-\alpha) y) > u_i(y) \geqslant c,$$

即 $\alpha x + (1-\alpha) y \in S_i^c$.

(2) $u_i(x) < u_i(y)$. 类似于(1)，也可得到 S_i^c 是凸集.

(3) $u_i(x) = u_i(y)$. 则对任何 $\alpha \in (0,1)$，都有 $u_i(\alpha x + (1-\alpha) y) \geqslant u_i(x)$. 如若不然，则

存在 $\alpha_1 \in (0,1)$ 使得

$$u_i(x^1) < u_i(x), \tag{9}$$

其中

$$x^1 = \alpha_1 x + (1-\alpha_1)y. \tag{10}$$

由于 $u_i(x)$ 连续,所以可以取到 $\alpha_2 \in (\alpha_1, 1)$,使

$$u_i(x^1) < u_i(x^2) < u_i(x), \tag{11}$$

其中

$$x^2 = \alpha_2 x + (1-\alpha_2)y \text{(图 3)}. \tag{12}$$

由(10)与(12)可得

$$x^1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x^2 + (1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2})y \tag{13}$$

由(11)可知 $u_i(y) > u_i(x^2)$,从而由(8)与(13)可得

$$u_i(x^1) > u_i(x^2),$$

这与(11)矛盾,因此,对任何 $\alpha \in (0,1)$,$u_i(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant u_i(x) \geqslant c$,即 S_i^c 是凸集.

□

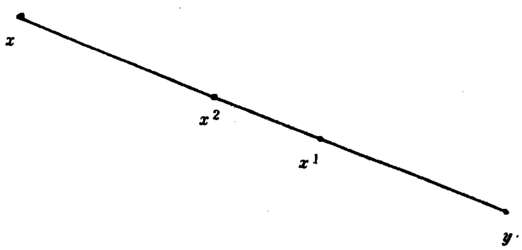


图 3

4 完全竞争市场均衡态的存在性

现在证明完全竞争市场均衡态的存在定理.

定理4 假设市场 $E = \{(X^i, u_i, w^i), (\theta_{ij}), Y^j\}_{i\in I, j\in J}$ 满足下列条件:

(1) 对于 $i \in I$,$X^i \subset R_+^l$ 是非空凸紧集;

(2) 对于 $i \in I$ 及 $p \in \Delta^l$,存在 $z^i \in X^i$,使 $p \cdot z^i < p \cdot w^i$;

(3) 对于 $i \in I$,u_i 是连续的,且满足(8);

(4) 对于 $i \in I$ 及 $p \in \Delta^l$,如果存在 $x^i \in X^i$,使得 $p \cdot x^i < p \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}\pi_j(p)$,则存在 $\tilde{x}^i \in X^i$,使得 $u(x^i) < u_i(\tilde{x}^i)$.

(5) 对于 $j \in J$,$0 \in Y^j$,且 $Y^j \subset R^l$ 是凸紧集.

则存在 $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n) \in X = \prod_{i=1}^{n} X^i$、$\bar{y} = (\bar{y}^1, \cdots, \bar{y}^m) \in Y = \prod_{j=1}^{m} Y^j$ 和 $\bar{p} \in \Delta^l$,使得

(1) 对每个 $i \in I$，$\bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$，并且 $u_i(\bar{x}^i) = \max\{u_i(z) | z \in B_i(\bar{p})\}$；

(2) 对每个 $j \in I$，$\bar{p} \cdot \bar{y}^j = \pi_i(\bar{p}) = \max\{\bar{p} \cdot z | z \in Y^j\}$；

(3) $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i \leqslant \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j + \sum_{i=1}^{n} w^i$，且 $\bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i = \bar{p} \cdot \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j + \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} w^i$.

证　证明的主要依据是社会系统均衡态的存在定理([1]中第89页). 构造 $n+m+1$ 人的社会系统 E' 如下：

集值映射是

$$S_0(x, y, p) = \Delta^l;$$
$$S_i(x, y, p) = B_i(p), i \in I;$$
$$S_j(x, y, p) = Y^j, j \in J,$$

效用函数是

$$u_0(x, y, p) = p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{j=1}^{m} y^j - \sum_{i=1}^{n} w^i\right);$$
$$u_i(x, y, p) = u_i(x^i), i \in I;$$
$$u_j(x, y, p) = p \cdot y^j, j \in J.$$

由定理2、定理3以及 $B_i(p)$ 是凸集等结论，可知社会系统 E' 满足社会系统均衡态存在定理的全部条件，从而由该定理得到：存在 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in X \times Y \times \Delta^l$，使得

$$\bar{x}^i \in B_i(\bar{p}), \bar{y}^j \in Y^j, \bar{p} \in \Delta^l, \tag{14}$$

并且

$$u_i(\bar{x}^i) = \max\{u_i(z) | z \in B_i(\bar{p})\}, \bar{p} \cdot \bar{y}^i = \pi_j(\bar{p}) \tag{15}$$

以及对任何 $p \in \Delta^l$，

$$p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j - \sum_{i=1}^{n} w^i\right) \leqslant \bar{p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j - \sum_{i=1}^{n} w^i\right). \tag{16}$$

由(14)与(15)，得

$$\bar{p} \cdot \bar{x}^i \leqslant \bar{p} \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \bar{p} \cdot \bar{y}^j. \tag{17}$$

将(17)两边关于 i 求和，并注意到(4)，得

$$\bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i \leqslant \bar{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} w^i + \bar{p} \cdot \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j. \tag{18}$$

再由(16)与(18)得

$$\text{对任何 } p \in \Delta^l, p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j - \sum_{i=1}^{n} w^i\right) \leqslant 0,$$

由此可得 $\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i - \sum_{j=1}^{m} \bar{y}^j - \sum_{i=1}^{n} w^i \leqslant 0$.

下面用反证法证明对每个 $i \in I$，有

$$\bar{p} \cdot \bar{x}^i = \bar{p} \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \bar{p} \cdot \bar{y}^j. \tag{19}$$

如若不然，那么从(17)知一定有

$$\bar{p} \cdot \bar{x}^i < \bar{p} \cdot w^i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \bar{p} \cdot \bar{y}^j, \tag{20}$$

由定理的条件(4)知存在 $\tilde{x}^i \in X^i$，使得 $u_i(\bar{x}^i) < u_i(\tilde{x}^i)$，再由定理的条件(3)知道对任何

$\alpha \in (0,1)$,

$$u_i(\alpha\tilde{x}^i + (1-\alpha)\bar{x}^i) > u_i(\bar{x}^i) \tag{21}$$

当 α 充分小时,由(20)知道, $\alpha\tilde{x}^i + (1-\alpha)\bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$, 但这和(21)一起,与 $\bar{x}^i$ 在 $B_i(\bar{p})$ 内使 u_i 达到最大值产生矛盾.

最后,对(19)的两边关于 i 求和,便得到 $\bar{p}\cdot\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^i = \bar{p}\cdot\sum_{j=1}^{m}\bar{y}^j + \bar{p}\cdot\sum_{i=1}^{n}w^i$. □

参 考 文 献

1 潘吉勋.数理经济学原理.长春:吉林大学出版社,1989

2 Debreu G. Existence of competitive equilibrium. in Arrow and Intriligator, eds. Handbook of mathematical economics (Ⅱ), Amsterdam North-Holland, 1982

A Proof of the Equilibrium Exitence Theorem of Perfect Competitive Markets

Chen Yue *Zhou Huiwen* *Li Wei*
(Department of Mathematics)

Abstract We improve the conditions and the proof of the Equilibrium Existence Theorem of perfect competitive markets in [1], and make them clearer and more reasonable.

Key words perfect competitive market; Equilibrium