矢引力子场度规场引力理论的几何化

陈良范　周敏耀

摘　要

本文以Riemann-Cartan空间为物理时空，引入挠空间的反对称张量$Y_{\mu\nu}$，并构造了相应的Lagrangian，由此导出无源场方程组，此方程组与无源矢引力子场度规场理论的方程相同。计及电磁场的Lagarangian后，得到了以电磁场为源的场方程，并由此导出静态荷电球对称物质的外部解，进而采用V复延法，推得适于描写旋转荷电球体的外部介类Kerr-Newman度规，最后简要地讨论了该理论中相应的Birkhoff定理。

一、引　言

标准的Einstein理论是建立在Riemann空间中对称度规张量$g_{\mu\nu}$的基础上。Einstein〔1〕为了使他的几何化方法也同时包括电磁场，采用了非对称度规$g_{\mu\nu}$和非对称联络$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$，从而使物理时空的几何结构越出了Riemann空间范围。

其后，不少人沿着Einstein的思想，采用不同的几何结构作为物理时空，以求得引力场与电磁场的统一。如Moffat〔2〕曾指出，可取$g_{\mu\nu}$为Hermitian复量，其对称的实系数相应于引力场，其反对称的虚系数相应于电磁场。但是最近Moffat指出〔3〕，不存在先验理由，一定要将推广了的Riemann几何解释为引力场和电磁场的统一，从而提出新的主张，认为推广了的几何可以解释为纯粹的引力场，值得指出，这种主张与Cartan〔4〕原始思想是相吻的。Cartan提出空间存在挠率，并认为联络的反对称部分是引力场的附加部分，而不是其它物理场。两者之间的区别，仅在于采用空间的具体几何结构有所不同。类似思想的工作，以无曲率有挠率的Weitzenböck空间作为物理时空的理论，最近也由Hayashi〔5〕讨论过。

与此同时，对标准的Einstein场方程作另一方向的推广工作也在进行。Brans-Dicke〔6〕从马赫原理出发，建立了标准量一张量理论。最近，钱尚武同志〔7〕又提出了矢引力子场度规场引力理论。这两个理论都认为物质不仅具有能动张量，同时还产生相应的标量场或矢引力子场，这些场作为物质场还将具有自己的能动张量，它们与物质本身的能动张量一起决定空时度规。于是自然就产生了这样一种想法：能否用前一类作者提出的推广了的Riemann几何作为真实的物理时空，从纯几何结构导出并解释后一类理论，即将后一类理论中由物质产生的场予以几何化。

徐济仲等同志〔8〕最近提出“λ—挠度空间”，就Brans—Dicke理论的几何化进行了讨论。本文是对矢引力子场度规场引力理论进行几何化的一种尝试。

本文于81年1月14日收到

二、Riemann—Cartan空间的曲率和挠度

我们认为物理时空是具有局部 Lorentz 对称度规$g_{\mu\nu}$和非对称仿射联络$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$结构的 Riemann—Cartan空间。

在向量平移保内积的要求下，可得到度规场$g_{\mu\nu}$和联络场$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$之间关系：

$$D_\lambda g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu,\lambda}-g_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}-g_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}=0 \tag{1}$$

这里D_λ表示由Γ构成的协变微商，由于$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$的非对称性，不能由此解出$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$作为$g_{\mu\nu}$和$g_{\mu\nu}$一阶微商的函数。

由度规组成的Christoffel 记号为

$$\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}\equiv\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu}+g_{\beta\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\beta}) \tag{2}$$

由(1)式和(2)式可得

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}+K^{\lambda}_{\cdot\mu\nu} \tag{3}$$

这里

$$K^{\lambda}_{\cdot\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\cdot[\mu\nu]}-\Gamma_{\mu\cdot\nu]}^{[\lambda}-\Gamma_{\nu\cdot\mu]}^{[\lambda} \tag{4}$$

式中方括号是反对称求和，$\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$就是Cartan 引入的挠率张量。

引入$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$的线性组合$^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$，它由下式给出

$$^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\equiv\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\frac{2}{3}\delta^{\lambda}_{\mu}\Gamma^{\rho}_{[\rho\nu]} \tag{5}$$

这里的$\Gamma^{\rho}_{[\rho\nu]}$是挠矢量。

分别可由$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$、$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$、$^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$组成相应的Ricci张量

$$R(c)_{\mu\nu}=\left\{ {\sigma \atop \mu\sigma} \right\}_{,\nu}-\left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\}_{,\sigma}+\left\{ {\sigma \atop \lambda\nu} \right\}\left\{ {\lambda \atop \mu\sigma} \right\}-\left\{ {\sigma \atop \lambda\sigma} \right\}\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \tag{6.1}$$

$$R(\Gamma)_{\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma}+\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{6.2}$$

$$R(^*\Gamma)_{\mu\nu}={}^*\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma,\nu}-{}^*\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu,\sigma}+{}^*\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}{}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}-{}^*\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}{}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{6.3}$$

由(6.2)式和(6.3)式，并利用(5)式可以证明

$$g^{\mu\nu}R(\Gamma)_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}R(^*\Gamma)_{\mu\nu} \tag{7}$$

记φ_μ为挠矢量

$$\varphi_\mu\equiv\Gamma^{\rho}_{[\rho\mu]}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\rho}_{\rho\mu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho}) \tag{8}$$

由φ_μ可以组成二阶反对称张量

$$Y_{\mu\nu}=\varphi_{\mu,\nu}-\varphi_{\nu,\mu}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\Gamma^{\rho}_{\rho\mu,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\mu\rho,\nu}-\Gamma^{\rho}_{\rho\nu,\mu}-\Gamma^{\rho}_{\nu\rho,\mu}\right) \tag{9}$$

由此可构成有挠空间的挠度张量

$$W_{\mu\nu}\equiv 2Y_{\mu}{}^{\sigma}Y_{\sigma\nu}+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}Y^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta} \tag{10}$$

三、变分原理和无源场方程

可以选取$g_{\mu\nu}$和$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$分别为作用量原理中的独立动力学变量〔10〕，取无源引力场的作用量为

$$S_G=\int L_G d^4x \tag{11.1}$$

其中拉氏密度

$$L_G=L_G\left(g_{\mu\nu},\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu},\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}\right)=L^{(1)}_G+L^{(2)}_G \tag{11.2}$$

$$L^{(1)}_G=\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}R(\Gamma)_{\mu\nu} \tag{11.3}$$

$$L^{(2)}_G=-\sqrt{-g}\ Y^{\mu\nu}Y_{\mu\nu} \tag{11.4}$$

这里$L^{(1)}_G$与标准的 Einstein 理论中的拉氏密度相仿，$L^{(2)}_G$是考虑因挠率存在而相应附加引力场的添加项。

在由作用量S_G取稳态值得到场方程时，同时考虑变分$\delta g_{\mu\nu}$和$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$。即使

$$\delta_\Gamma S_G=0 \tag{12.1}$$

$$\delta_g S_G=0 \tag{12.2}$$

这里δ_Γ和δ_g分别表示对$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$和对$g_{\mu\nu}$的变分。由(12.2)我们可得度规场方程，由(12.1)将可获得Γ场满足的方程。

注意到$L^{(1)}_G$在λ变换下的不变性〔1〕，即当$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$作下列变换

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\to\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}+\delta^{\sigma}_{\mu}\lambda_{,\nu} \tag{13.2}$$

$L^{(1)}_G$是不变量。这里λ是任意的坐标函数。

因此由$L^{(1)}_G$组成的作用量在λ变换下的变分应为零， 即

$$\delta_\lambda S^{(1)}_G=\int\delta_\lambda L^{(1)}_G d^4x=0 \tag{13.2}$$

容易证明，由于λ的任意性，从(13.2)式可得

$$\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda,\sigma}}\right) = 0 \tag{13.3}$$

以下先考虑对$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$的变分，由(12.1)出发，可得Euler—Lagrange 方程

$$\frac{\partial L_G}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}}\right) = 0 \tag{14.1}$$

或
$$\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}}\right) + \frac{\partial L_G^{(2)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G^{(2)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}}\right) = 0 \tag{14.2}$$

由(11.4)式可知

$$L_G^{(2)} = -\sqrt{-g}\, Y^{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta} = -\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} Y_{\mu\nu} Y_{\alpha\beta}$$

注意到(9)式可知

$$\frac{\partial L_G^{(2)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}} = 0 \tag{15.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_G{}^{(2)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}} &= -2\sqrt{-g}\;\; Y^{\alpha\beta}\frac{\partial Y_{\alpha\beta}}{\partial \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu,\sigma}} \\ &= -\sqrt{-g}\, Y^{\alpha\beta}(\delta^{\pi}{}_{\lambda}\delta^{\mu}{}_{\pi}\delta^{\nu}{}_{\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - \delta^{\pi}{}_{\lambda}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu}{}_{\pi}\delta^{\sigma}{}_{\beta} - \delta^{\pi}{}_{\lambda}\delta^{\mu}{}_{\pi}\delta^{\nu}{}_{\beta}\delta^{\sigma}{}_{\alpha} + \delta^{\pi}{}_{\lambda}\delta^{\mu}{}_{\beta}\delta^{\nu}{}_{\pi}\delta^{\sigma}{}_{\alpha}) \\ &= -2\,(\delta^{\mu}{}_{\lambda} Y^{\nu\sigma}\sqrt{-g} - \delta^{\nu}{}_{\lambda} Y^{\mu\sigma}\sqrt{-g}\,)\end{aligned} \tag{15.2}$$

故
$$\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G{}^{(2)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}}\right) = -2\,[\delta^{\mu}{}_{\lambda}\,(Y^{\nu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma} - \delta^{\nu}{}_{\lambda}\,(Y^{\mu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma}] \tag{16}$$

将(15.1)和(16)代入(14 2)可得

$$\frac{\partial L_G{}^{(1)}}{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\sigma}}\right) + 2[\delta^{\mu}{}_{\lambda}\,(Y^{\nu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma} - \delta^{\nu}{}_{\lambda}\,(Y^{\mu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma}] = 0 \tag{17}$$

收缩指标λ和μ上式为

$$\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}\left(\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu,\sigma}}\right) + 6\,(Y^{\nu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma} = 0 \tag{18}$$

注意到(13.3)式，即得

$$(Y^{\nu\sigma}\sqrt{-g}\,)_{,\sigma} = 0 \tag{19.1}$$

这就是Y场满足的方程

$$Y^{\nu\sigma}{}_{;\,\sigma} = 0 \tag{19.2}$$

这里“；”表示由Christoffel 记号构成的协变微商。
同时，由定义式(9)可得到

$$Y_{\mu\nu;\sigma} + Y_{\nu\sigma;\mu} + Y_{\sigma\mu;\nu} = 0 \tag{19.3}$$

将(19.1)式代回到(17)式可得

$$\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\frac{\partial L_G^{(1)}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu,\sigma}}\right)=0 \tag{20}$$

Schrödinger 曾证明〔10〕此式结果是

$$g_{\mu\nu,\lambda}-g_{\mu\sigma}{}^*\Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}-g_{\sigma\nu}{}^*\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}=0 \tag{21}$$

应注意到等式左边第三项中${}^*\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}$下指标的顺序与(1)式顺序正好相反，因此${}^*\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$可由$g_{\mu\nu}$及其一阶微商唯一决定，容易算得

$${}^*\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} \tag{22}$$

从而可得

$$R({}^*\Gamma)_{\mu\nu}=R(c)_{\mu\nu} \tag{23}$$

再考虑对$g_{\mu\nu}$的变分，由于L_G中不含$g_{\mu\nu}$微商，从(12.2)式可得

$$\frac{\partial L_G}{\partial g_{\mu\nu}}=\frac{\partial L_G{}^{(1)}}{\partial g_{\mu\nu}}+\frac{\partial L_G{}^{(2)}}{\partial g_{\mu\nu}}=0 \tag{24}$$

由(11.3)式出发，并利用(7)和(23)式

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^{(1)}{}_G}{\partial g_{\mu\nu}}&=\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\left[\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}R({}^*\Gamma)_{\alpha\beta}\right]\\&=\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R({}^*\Gamma)_{\alpha\beta}-\sqrt{-g}\,g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R({}^*\Gamma)_{\alpha\beta}\\&=\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\nu\nu}R(c)-R(c)^{\mu\nu}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

由(11.4)式出发可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^{(2)}{}_G}{\partial g_{\mu\nu}}&=\frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}}\left[-\sqrt{-g}\,Y^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta}\right]\\&=-\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\nu}Y^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta}+2\sqrt{-g}\,Y^\mu{}_\sigma Y^{\nu\sigma}\\&=-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}Y^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta}+2Y^{\mu\sigma}Y_\sigma{}^\nu\right)\end{aligned} \tag{26}$$

注意到(10)式和Einstein 张量定义

$$G^{\mu\nu}=R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{27}$$

(24.)式可化为

$$G^{\mu\nu}+W^{\mu\nu}=0 \tag{28}$$

这就是无源引力场方程。(19.2)(19.3)和(28)式就是我们的基本方程组。

如果将(8)式定义的φ_μ视为矢引力子场的“势”，则$Y_{\mu\nu}$就可认为是矢引力子场的强度$H_{\mu\nu}$，而$\frac{1}{8\pi}W_{\mu\nu}$可看作是矢引力子场能动张量$T_{(gr)\mu\nu}$，于是(19.2)，(19.3)和(28)式可分

别改写为

$$H^{\mu\nu};_{\nu}=0$$

$$H_{[\mu\nu;\lambda]}=0$$

$$G_{\mu\nu}=-8\pi T_{(gr)\mu\nu}$$

以上三个式子就是文献〔7〕中(1′)，(2)和(4′)式。

我们可作如下理解：这样一个有挠引力理论的场方程，在无源情况下将等效于经过修正的标准Einstein场方程，修正只需对原场方程的源项的能动张量添一适当的附加项。文献〔4〕曾对此结论作过更一般的论证。

四、电磁场为源的方程及静态荷电球对称外部解

在引力场拉氏密度中加入电磁场拉氏密度，可组成总拉氏密度。

$$L_{总}=L_G+L_{(em)} \tag{29.1}$$

其中L_G仍由(11.2)给出，

$$L_{(em)}=-\sqrt{-g}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{29.2}$$

这里$F_{\mu\nu}$是电磁场张量

$$F_{\mu\nu}=A_{\mu};_{\nu}-A_{\nu};_{\mu}$$

则

$$S_{总}=\int L_{总}d^4x \tag{29.3}$$

仿上节的计算，对Γ的变分仍得(19.2)(19.3)式，对$g_{\mu\nu}$的变分可得以电磁场为源的场方程

$$G_{\mu\nu}+W_{\mu\nu}=-8\pi T_{(em)\mu\nu} \tag{30}$$

这里

$$T_{(em)\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu}+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right) \tag{31}$$

对电磁势A_μ作变分，可得无源Maxwell方程组

$$F^{\mu\nu};_{\nu}=0 \tag{32.1}$$

$$F_{[\mu\nu;\lambda]}=0 \tag{32.2}$$

以下计算荷电静态球对称分布物质的外部解，球对称静场的线元形式为：

$$dS^2=B(r)dx_o^2-A(r)dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{33}$$

可求得 Ricci 张量为

$$R_{oo}=-\frac{B''(r)}{2A(r)}+\frac{1}{4}\frac{B'(r)}{A(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{B'(r)}{A(r)}\right) \tag{34.1}$$

$$R_{11}=\frac{B''(r)}{2B(r)}-\frac{1}{4}\frac{B'(r)}{B(r)}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{A'(r)}{A(r)}\right) \tag{34.2}$$

$$R_{22}=-1+\frac{r}{2A(r)}\left(-\frac{A'(r)}{A(r)}+\frac{B'(r)}{B(r)}\right)+\frac{1}{A(r)} \tag{34.3}$$

$$R_{33}=\sin^2\theta\, R_{22} \tag{34.4}$$

其中撇号表示对r的微商，其它分量均为零

在静态荷电球对称时，电磁张量形式为

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{35.1}$$

按常规方法由(31)和(32.1)式可求出

$$T_{(em)\mu\nu}=\frac{Q^2}{8\pi r^4}\begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{35.2}$$

这里Q是物体的荷电量。

球对称时$Y_\mu{}^\nu$应只存在r方向的分量，故一般形式为

$$Y^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & Y^{01}{}_{(r,t)} & 0 & 0 \\ Y^{10}{}_{(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y^{23}{}_{(r,t)} \\ 0 & 0 & Y^{32}{}_{(r,t)} & 0 \end{pmatrix} \tag{36.1}$$

按定义有

$$Y^{01}=-Y^{10}$$
$$Y^{23}=-Y^{32}$$

在(19.2)式中取$\mu=1$，可得

$$Y^{10}{}_{(r,t)}=Y^{10}(r)$$

取$\mu=3$，可得

$$Y^{32}{}_{(r,t)}=0$$

则$Y_{\mu\nu}$的具体形式为

$$Y_{\mu\mu}=\begin{pmatrix} 0 & -Y_{10}(r) & 0 & 0 \\ Y_{10}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{36.2}$$

在(19.2)式中取$\mu=0$，可得

$$(\sqrt{-g}\,Y^{01})_{,1}=0$$

利用(33)式球对称度规，上式解是

$$Y_{10}A^{-\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}r^2 = C$$

这里C是积分常数。可解出

$$Y_{10} = \frac{C}{r^2}A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$$

由(10)式可求出

$$W_{\mu\nu} = \frac{C^2}{r^4}\begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{36.3}$$

应用场方程(30)，并注意到r很大时，理论应取牛顿极限，最后可解得类Reissner—Nordström度规。

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{C^2+Q^2}{r^2}\right)dx_0{}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{C^2+Q^2}{r^2}} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{37.1}$$

当球体不荷电时，度规简化为

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{C^2}{r^2}\right)dx_0{}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{C^2}{r^2}} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{37.2}$$

这里C与r无关，其具体形式将由有源的Y场方程决定，认为Y场由质量决定，可记

$$C = f(M)$$

$f(M)$是M的某类函数。
一个简单而又合理的假定为$C=\alpha M$，其中α是无量纲常数，其值可由实验决定。
则(37.1)和(37.2)分别为

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\alpha^2M^2+Q^2}{r^2}\right)dx_0{}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\alpha^2M^2+Q^2}{r^2}} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{38.1}$$

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\alpha^2M^2}{r^2}\right)dx_0{}^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\alpha^2M^2}{r^2}} - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{38.2}$$

视界面由模长为零的超曲面法向量决定，即需满足

$$n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0$$

其中n^μ是超曲面法向量。
在静态球对称条件下，上述条件简化为

$$g^{11} = 0$$

从(38.2)式可见

在$|\alpha|>1$时，g^{11}恒小于零，则不存在视界面。

在$|\alpha|=1$时，可得“准视界面”$r=r_0=M$，这就是矢引力子场度规场引力理论的结果。

在$1>|\alpha|>0$时，存在两个视界面。

$$r=r\pm=(1\pm\sqrt{1-\alpha^2})M$$

在$\alpha=0$时，可得视界面$r=r_c=2M$，显然这就是标准Einstein 引力理论中的Schwarzschild 半径。

按文献〔7〕对水星进动值的分析，α值范围是$1>|\alpha|>0$，以此为据，这理论中的视界面应有两个，因而有关黑洞的一系列性质，如最大几何及其共形表示的 penrose 图等与标准的 Einstein 理论及矢引力子场度规场引力理论均有所不同。

考虑到自旋粒子在有挠引力场中的运动方程及自旋变化率有别于无挠纯度规理论〔13〕，原则上可作为鉴别此理论与无挠引力理论的标准。

五、类Kerr—Newman 度规

从(38.1)式出发，采用V复延法，可得到适于描写转动荷电球体外部解的类 Kerr—Newman度规。

引入 4 矢标架度规η_{ab}

$$\eta_{ab}=\vec{Z}_a\cdot\vec{Z}_b \tag{39}$$

$\vec{Z}_a\cdot\vec{Z}_b$是标架 4 矢，它们在坐标协变基上的分量分别是$z_a{}^\mu$和$z^\mu{}_b$。度规张量$g^{\mu\nu}$和标架度规之间关系为

$$g^{\mu\nu}=\eta^{ab}z_a{}^\mu z_b{}^\mu \tag{40}$$

采用另矢标架度规〔11〕

$$\eta_{ab}=\eta^{ab}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix} \tag{41}$$

则

$$g^{\mu\nu}=z_0{}^\mu z_1{}^\nu+z_1{}^\mu z_0{}^\nu-z^\mu{}_2z_3{}^\nu-z_3{}^\mu z_2{}^\nu \tag{42}$$

为了便于将(38.1)式线元用另矢标架表示，作坐标变换。

$$du=dx^0-\frac{r^2}{r^2-2Mr+Q^2+\alpha^2M^2}dr \tag{43.1}$$

$$dv=dr \tag{43.2}$$

$$d\theta=d\theta \tag{43.3}$$

$$d\varphi=d\varphi \tag{43.4}$$

则线元(37)可改写为

$$ds^2=\left(1-\frac{2M}{v}+\frac{\alpha^2M^2+Q^2}{v^2}\right)du^2+2dudv-v^2d\theta^2-v^2\sin^2\theta d\varphi^2 \tag{44}$$

容易算出u、v坐标系中的逆变度规张量是

$$g'^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\left(1-\frac{2M}{v}+\frac{\alpha^2M^2+Q^2}{v^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{v^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{45}$$

可以核对在u、v坐标系中，标架4矢是

$$z_a{}'^{\mu}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{v}+\frac{\alpha^2M^2+Q^2}{v^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}v} & \frac{i}{\sqrt{2}v\sin\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}v} & \frac{-i}{\sqrt{2}v\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{46}$$

将v进行复延拓，并把标架4矢推广为

$$z_a{}''^{\mu}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}\left[1-M\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^*}\right)+\frac{\alpha^2M^2+Q^2}{vv^*}\right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}v^*} & \frac{i}{\sqrt{2}v^*\sin\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}v} & \frac{-i}{\sqrt{2}v\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{47}$$

显然存在

$$\begin{aligned} z_3'^{\mu}&=z_2'^{\mu*} \\ z_3''^{\mu}&=z_2''^{\mu*} \end{aligned} \tag{48}$$

为了使线元中不出现虚数，再作一次坐标变换

令 $$u'=u-ia\cos\theta \tag{48.1}$$

$$v'=v+ia\cos\theta \tag{48.2}$$

可算出变换矩阵是

$$\alpha_\nu^\mu=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ia\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & -ia\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

注意到标架4矢 z''^{μ}_{a} 是坐标空间的逆变矢，则 u'、v' 系的标架4矢 z'''^{μ}_{a} 与 u、v 系的标架4矢 z''^{μ}_{a} 之间满足

$$z'''^{\mu}_{a}=\alpha^{\mu}_{\nu}z''^{\nu}_{a}\qquad (a=0,\ 1,\ 2) \tag{50.1}$$

并使

$$z'''^{\mu}_{3}=z'''^{\mu *}_{2} \tag{50.2}$$

计算可得

$$z'''^{\mu}_{a}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2}{v'^2+a^2\cos^2\theta}\right) & 0 & 0 \\ \dfrac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(v'+ia\cos\theta)} & \dfrac{-ia\sin\theta}{\sqrt{2}(v'+ia\cos\theta)} & \dfrac{1}{\sqrt{2}(v'+ia\cos\theta)} & \dfrac{i}{\sqrt{2}(v'+ia\cos\theta)\sin\theta} \\ \dfrac{-ia\sin\theta}{\sqrt{2}(v'-ia\cos\theta)} & \dfrac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}(v'-ia\cos\theta)} & \dfrac{1}{\sqrt{2}(v'-ia\cos\theta)} & \dfrac{-i}{\sqrt{2}(v'-ia\cos\theta)\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{51}$$

按(40)式即可求出 u'、v' 系中的逆变度规张量 $g'''^{\mu\nu}$，进而算出相应的协变度规张量

$$g'''_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{\alpha^2M^2+Q^2-2Mv'}{v'^2+a^2\cos^2\theta} & 1 & 0 & \dfrac{a\sin^2[2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2]}{v'^2+a^2\cos^2\theta} \\ 1 & 0 & 0 & -a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & -(v'^2+a^2\cos^2\theta) & 0 \\ \dfrac{a\sin^2\theta(2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2)}{v'^2+a^2\cos^2\theta} & -a\sin^2\theta & 0 & -\sin^2\theta\left[v'^2+a^2+\dfrac{a^2\sin^2\theta(2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2)}{v'^2+a^2\cos^2\theta}\right] \end{pmatrix} \tag{52}$$

则在 $u'v'$ 系中的线元是

$$\begin{aligned} ds^2=&\left[1+\frac{\alpha^2M^2+Q^2-2Mv'}{v'^2+a^2\cos^2\theta}\right]du'^2+2du'dv'+\frac{2a\sin^2\theta[2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2]}{v^2+a^2\cos^2\theta}du'd\varphi \\ &-2a\sin^2\theta dv'd\varphi-(v'^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2-\sin^2\theta\left[v'^2+a^2+\frac{a^2\sin^2\theta(2Mv'-Q^2-\alpha^2M^2)}{v'^2+a^2\cos^2\theta}\right] \\ &\times d\varphi^2 \end{aligned} \tag{53}$$

这就是此理论中的类Kerr—Newman度规，也可将此改写为相应的Boyer—Lindquist形式

$$\begin{aligned} ds^2=&\left(1-\frac{2Mr-Q^2-\alpha^2M^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)dx_o^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2-2Mr+Q^2+\alpha^2M^2}dr^2-(r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\ &+2\frac{(2Mr-Q^2-\alpha^2M^2)a\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos\theta}d\varphi dx^o-\left[(r^2+a^2)\sin^2\theta+\frac{(2Mr-Q^2-\alpha^2M^2)a^2\sin^4\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right] \\ &\times d\varphi^2 \end{aligned} \tag{54}$$

物质不荷电时，上式简化为类Kerr度规

$$\begin{aligned} ds^2=&\left(1-\frac{2Mr-\alpha^2M^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)dx_o^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2-2Mr+\alpha^2M^2}dr^2-(r^2+a^2\cos^2\theta)d\theta^2 \\ &+2\frac{(2Mr-\alpha^2M^2)a\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}d\varphi dx^o-\left[(r^2+a^2)\sin^2\theta+\frac{(2Mr-\alpha^2M^2)a^2\sin^4\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]d\varphi^2 \end{aligned} \tag{55}$$

由于此理论的一级近似与Einstein理论的一级近似一致，故上述线元中的a也是旋转球体的单位质量的角动量。

六、Birk hoff定理

Birkhoff 曾证明按Einstein引力场方程，凡球对称物质在真空中的解必然是静态的 Schwarzschild 度规。如果产生场的物质作径向脉动，此结论仍成立。最近，Pevelle[12]证明了Birkhoff定理成立的充要条件是Einstein场方程中的$T_{\mu\nu}$应是对角化和静态。

由于此理论中的场方程与Einstein 场方程形式极类似，且当物质球对称分布时，$W_{\mu\nu}$是静态和对角化的，故也存在相应的Birkhoff 定理。

定理一　球对称物质的外部解（包括物质作径向运动），必是式(38.2)线元形式。

定理二　荷电球对称物质的外部解（包括物质作径向运动），必是式(38.1)的线元形式。

定理的证明与标准Einstein 引力理论中的证明完全相仿，这里就不再作证明了。

参　考　文　献

〔1〕A. Einstein《The Meaning of Relativity》1955
〔2〕D. H. Boal & J. W. Moffat　phys Rev D11 2026 (1975)
〔3〕J. W. Moffat　phys Rev D19 3554 (1979)
〔4〕V. D. Sandberg　phys Rev D 12 3013 (1975)
〔5〕Hayashi　phys Rev D 19 3524 (1979)
〔6〕R. H. Dicke　phys Rev 125 2163 (1962)
〔7〕钱尚武　物理学报第28卷第二期 258 (1979)
〔8〕徐济仲等　武汉大学学报　第一期 1 (1979)
〔9〕R. J. Mckellar　phys Rev D 20 356 (1979)
〔10〕E. Schrödinger《Space—time structure》(1950)
〔11〕E. Newman & R. Penrose,　J. Math. phys Vol 3 №3 566 (1962)
〔12〕R. pavelle　phys Rev D 19 №10 2876 (1979)
〔13〕吴泳时　刘煜奋　科学通报　第25卷　156 (1980)

The Theory of Gravitation with the Vector Graviton Field and the metric Field Is Geometrized

Chen Liangfan Zhou Mingyiao

ABSTRACT

In this paper, a theory of gravitation with torsion has been suggested. We have found that the theory is equivalent to VGM theory in the domain where there are no sources of the vector graviton field. A solution for a Charged rotating sphere has been given.