完全图基和多边图的色性

许 绍 吉

摘　　要

文章讨论了建立在完全图基上的色多项式的若干性质，并利用完全图基讨论了一些多边图的色性。

一、引　　言

本文讨论的图为限、无向、无环的简单图，若两个图 G_1 和 G_2 的色多项式相同，$P(G_1)=P(G_2)$，则称 G_1 和 G_2 色某价，若由 $P(G_1)=P(G_2)$ 可推得 G_2 与 G_1 同构，则称 G_1 色唯一。[1]、[2]、[3]、[4] 中分别给出了一些色等价图和色唯一图，[1] 中且讨论了空图基、完全圈基、树基之间的一些关系，[4]、[5]、[6]、[7] 中讨论了建于空图基、树基上的色多项式的若干性质。

本文讨论了建立在完全图基上的色多项式的一些性质，并利用完全图基讨论了一些多边图的色性。

二、多边图的色性讨论 (1)

对图 G，本文以 n 表示顶点数，以 m 表示边数，$l=n(n-1)/2-m$，当 $m\sim n(n-1)/2$ 时称 G 为多边图，$y^i=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-i+1)$ 为一组完全图基。

本文一般用 H 表示 G 的补图的边集，$G=K_n-H$，在色多项式计算中，收缩一边 $G\cdot uv$ 表示将 u、v 中收缩为一点 w，其余点 x 若与 u、v 至少一点相邻，则 x 与 w 相邻，否则不邻，$H\cdot uv$ 表示将 H 中 u、v 收缩为一点 w，其余 H 中点 x 若与 u、v 至少一点不邻，则 x 与 w 不邻，否则相邻。

我们知道 K_n 和 K_n-e 均为色唯一图。$P(K_n-e)=y^n-y^{n-1}$

$m=n(n-1)/2-2$ 的图共有二类，即 $K_n-||$ 和 $K_n-\wedge$。

定理 1　$m=n(n-1)/2-2$ 的图色唯一。

证明： $P(K_n-||)=P(K_n-|)+P(K_{n-1}-|)=y^n+2y^{n-1}+y^{n-2}$

$P(K_n-\wedge)=P(K_n-|)+P(K_{n-1})=y^n+2y^{n-1}$ 证毕。

$m=n(n-1)/2-3$ 的图共有五类，分别为

G_1：$K_n-|||$　　G_2：$K_n-\wedge|$　　G_3：$K_n-\triangle$　　G_4：$K_n-\Pi$　　G_5：K_n-

本文于1983年1月4日收到

定理 2 $m=n(n-1)/2-3$ 的图中 G_3 与 G_4 色等价，G_1、G_2 和 G_5 均为色唯一。

证明： $P(G_1)=P(K_n-||)+P(K_{n-1}-||)=y^n+3y^{n-1}+3y^{n-2}+y^{n-3}$

$P(G_2)=P(K_n-\wedge)+P(K_{n-1}-\wedge)=y^n+3y^{n-1}+2y^{n-2}$

$P(G_3)=P(K_n-\wedge)+P(K_{n-1}-|)=y^n+3y^{n-1}+y^{n-2}$

$P(G_4)=P(K_n-\wedge)+P(K_{n-1}-|)=y^n+3y^{n-1}+y_{n-2}$

$P(G_5)=P(K_n-\wedge)+P(K_{n-1})=y^n+3y^{n-1}$ 证毕。

$m=n(n-1)/2-4$ 的图共有十一类，设为 K_n-H_i，$i=1$、2、…11，H_i 依次为 ||||、∧||、Π|、△|、∧∧、M，⋀|、□、⋀/、△/、⋀⋀，则仿前，可求得这十一类图的色多项式如下

||||	$y^n+4y^{n-1}+6y^{n-2}+4y^{n-3}+y^{n-4}$
∧||	$y^n+4y^{n-1}+5y^{n-2}+2y^{n-3}$
Π|、△|	$y^n+4y^{n-1}+4y^{n-2}+y^{n-3}$
∧∧	$y^n+4y^{n-1}+4y^{n-2}$
⋀|、M	$y^n+4y^{n-1}+3y^{n-2}$
□、⋀/、△/	$y^n+4y^{n-1}+2y^{n-2}$
⋀⋀	y^n+4y^{n-1}

于是，可得

定理 3 $m=n(n-1)/2-4$ 的图中，K_n-||||、K_n-∧||、K_n-∧∧、K_n-⋀⋀ 为仅有的色唯一图。

$l=5$ 的图共有 26 类，它们的色多项式如下：

|||||	$y^n+5y^{n-1}+10y^{n-2}+10y^{n-3}+5y^{n-4}+y^{n-5}$
∧|||	$y^n+5y^{n-1}+9y^{n-2}+7y^{n-3}+2y^{n-4}$
Π||、△||	$y^n+5y^{n-1}+8y^{n-2}+5y^{n-3}+y^{n-4}$
∧∧|	$y^n+5y^{n-1}+8y^{n-2}+4y^{n-3}$
⋀||、M|	$y^n+5y^{n-1}+7y^{n-2}+3y^{n-3}$
Π∧、△∧	$y^n+5y^{n-1}+7y^{n-2}+2y^{n-3}$
□|、⋀/|、◿/|	$y^n+5y^{n-1}+6y^{n-2}+2y^{n-3}$
⋀/	$y^n+5y^{n-1}+6y^{n-2}+y^{n-3}$
⋀∧	$y^n+5y^{n-1}+6y^{n-2}$
ΠΠ、◿∧	$y^n+5y^{n-1}+5y^{n-2}+y^{n-3}$
⬠、⋀∧	$y^n+5y^{n-1}+5y^{n-2}$
□/、⋀|、Π∧、▽∧、▱	$y^n+5y^{n-1}+4y^{n-2}$
⋀/、◿/	$y^n+5y^{n-1}+3y^{n-2}$
⋀⋀	y^n+5y^{n-1}

于是可得

定理 4 $m=n(n-1)/2-5$ 边图中，K_n-|||||、K_n-∧|||、K_n-∧∧|、K_n-⋀/、K_n-⋀∧、K_n-⋀⋀ 为仅有的六族色唯一图。

这里 K_6- ⌂ 即为 W_6，K_6-⋀⋀ 即为 ◇，已在〔3〕中证明为色等价，本文证明了与 W_6 色等价的仅有 K_6-⋀∧。

三、建立在完全图基上的色多项式若干性质

定理 5 设 $G=K_n-H$，H 有 l 条边，$P(G)=\sum_{i=0}^{n} b_i y^{n-i}$，则

1° $b_0=1$。

2° $b_1=l$。

3° $\binom{l}{i}\geqslant b_i\geqslant 0$ 当 $0\leqslant i\leqslant l$，$b_i=0$ 当 $i>l$。

证明：1° 和 2° 容易用归纳法或空图基到完全图基的转换来证明。

3° 对 l 进行归纳，当 $l=1$ 时 $P(G)=y^n+y^{n-1}$ 不等式成立。设当 $l-1$ 时亦成立，当 H 有 l 条边时，

$$P(G)=P(K_n-(H-e))+P(K_{n-1}-H\cdot e)=\sum_{i=0}^{n} c_i y^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1} d_i y^{(n-1)-i}$$

其中 c_i 为 $P(K_n-(H-e))$ 中 y^{n-i} 的系数，因 $H-e$ 有 $l-1$ 条边，故由归纳假设

$$\binom{l-1}{i}\geqslant c_i\geqslant 0。$$

d_i 为 $P(K_n-H\cdot e)$ 中 $y^{(n-1)-i}$ 的系数，因 $H\cdot e$ 至多有 $l-1$ 边，故 $\binom{l-1}{i}\geqslant d_i\geqslant 0$

$$0\leqslant b_i=c_i+d_{i-1}\leqslant\binom{l-1}{i}+\binom{l-1}{i-1}=\binom{l}{i}\quad 证毕。$$

定理 6 设 $\chi(G)=k$，$P(G)_{\lambda=k}=l\cdot k!$，$P(G)=\sum_{i=0}^{n} b_i y^{n-i}$ 则当 $i>n-k$ 时 $b_i=0$，$b_{n-k}=l$。

证明：结论显然。

定理 7 令 $P(G_1)=\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^{n-i}=\sum_{i=0}^{n} b_i y^{n-i}$

$$P(G_2)=\sum_{i=0}^{n} a'_i\lambda^{n-i}=\sum_{i=0}^{n} b'_i y^{n-i}。$$

若 $b_i=b'_i$ 当 $i<k$ 时成立，$b_k\neq b'_k$。

则 $a_i=a'_i$ 当 $i<k$ 时成立，$a_k\neq a'_k$，且 $a_k-a'_k=b_k-b'_k$。

证明：将完全图基换成空图基，比较对应项多数，可知定理成立。

定理 8 设 K_n-H_1 与 K_n-H_2 色等价，则 $K_{n+i}-H_1$ 与 $K_{n+i}-H_2$ 亦为色等价。i 为任一自然数。

证明：用空图基表示色多项式，利用等式

$$P(K_{n+i}-H)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)P_{\lambda-i}(K_n-H)$$

即知定理成立。

定理 9 设 $P(K_n-H_1)=\sum_{i=0}^{n} b_i y^{n-i}$，

$$P(K_n-H_2)=\sum_{i=0}^{n} c_i y^{n-i},$$

则
$$P(K_n-H_1UH_2)=\left(\sum_{i=0}^{n} b_i y^{n-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} c_i y^{n-i}\right)\Big/ y^n,$$

这里H_1UH_2表示H_1和H_2的不相交并，乘除运算按通常的乘除法规则$y^i\cdot y^j/y^n=y^{i+j-n}$。

证明：这只是Zykov定理的转述。

系：若K_n-H_1与K_n-H_2色等价，$K_n-H'_1$与$K_n-H'_2$色等价，则$K_n-H_1UH'_1$与$K_n-H_2UH'_2$色等价。

四、多边图的色性讨论(2)

定理 10 设H为l条互不相邻的边，则

$$P(K_n-H)=\sum_{i=0}^{n}\binom{l}{i}y^{n-i},$$

且仅当H为l条互不相邻的边时，y^{n-l}的系数为$\binom{l}{l}=1$，否则为0。

证明：用归纳法，当$l=1$时成立，设当$l=k$时成立，以H_k表示l条互不相邻的边所成的边图，由定理8

$$P(K_n-H_{k+1})=P(K_n-H_k)\cdot P(K_n-H_1)/y^n=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{k}{i}y^{n-i}\right)(y^n+y^{n-1})/y^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{k+1}{i}y^{n-i}$$

若H不为条互不相邻的边所成图，则H必含形为八的系图，以e记其中一边，

$$P(K_n-H)=P(K_n-(H-e))+P(K_{n-1}-H\cdot e)$$

其中$H-e$有k条边，由定理5，$P(K_n-(H\cdot e))$中$y^{n-(k+1)}$系数为0，$H\cdot e$的边数$\leqslant k-1$，由定理5，$P(K_{n-1}-H\cdot e)$中y^{n-1-k}系数亦为0，故$P(K_n-H)$中$y^{n-(k+1)}$的系数为0。证毕。

系，设H为l条互不相邻的边，则K_n-H色唯一。

注：本系即［4］中定理1。

定理 11 设H为$l-2$条互不相邻的边和一条长为2的路的并，共l条边，

$$P(K_n-H)=\sum_{i=0}^{n}b_iy^{n-i},$$

则

$$b_0=1$$

$$b_i=\binom{l-1}{i}+\binom{l-2}{i-1}\quad i=1,2,\cdots l-1$$

且仅当H为此类图时

$$b_{l-1}=\binom{l-1}{l-1}+\binom{l-2}{l-2}=2。$$

若H为l条互不相邻的边则$b_{l-1}=l$，否则$b_{l-1}<2$。

证明：利用定理10和等式

$$P(K_n-H)=P(K_n-H_{l-1})+P(K_{n-1}-H_{l-2})$$

其中H_l表示l条互不相邻的边，容易证明

$$b_i=\binom{l-1}{i}+\binom{l-2}{i-1}。$$

设H不为此类图，亦不为H_l，则H必含下列子图之一

$$P(K_n-H)=P(K_n-(H-e))+P(K_{n-1}-H\cdot e)$$

其中 $H-e$ 含有∧子图，$l-1$ 边，由定理 10，$P(K_n-(H-e))$ 中 $y^{n-(l-1)}$ 系数为 0，$H\cdot e$ 的边数 $\leqslant l-2$，由定理 10，$P(K_{n-1}-H\cdot e)$ 中 $y^{n-1-(l-2)}=y^{n-(l-1)}$ 的系数 <2。证毕。

系，定理 11 中所述图色唯一。

定理 12 设 H 为 l 条边的星 S_l，则

$$P(K_n-H)=P(K_n-S_l)=y^n+l\cdot y^{n-1},$$

且仅当 H 为 S_l 时 y^{n-2} 系数为 0。

证明： 用归纳法，利用递推公式

$$P(K_n-S_l)=P(K_n-S_{l-1})+P(K_{n-1})$$

容易证明

$$P(K_n-S_l)=y^n+l\cdot y^{n-1}$$

若 H 不为星，则 H 含有 || 子图

$$P(K_n-H)=P(K_n-(H-e))+P(K_{n-1}-H\cdot e)$$

其中 $P(K_n-(H-e))$ 中 y^{n-2} 系数 $\geqslant 0$，$H\cdot e$ 至少有一条边，故 $P(K_{n-1}-H\cdot e)$ 中 y^{n-2} 系数 >0，（这点利用归纳法和递推公式立即容易证得）故 $P(K_n-H)$ 中 y^{n-2} 系数 >0。证毕。

系，K_n-S_l 色唯一。

定理 13 令 C_l 为 l 条边的圈，T 为一个顶点和一条长为 $l-1$ 的路 P_{l-1} 的一个端点在此路上的邻点相连所得之图，则 K_n-C_l 与 K_n-T 色等价。

证明： $P(K_n-C_l)=P(K_n-P_{l-1})+P(K_{n-1}-P_{l-3})$

$$P(K_n-T)=P(K_n-P_{l-1})+P(K_{n-1}-P_{l-3})$$ 证毕。

定理 14 令 S_{l-1} 表示 $l-1$ 边的星，顶点为

$$v,v_1,\cdots v_{l-1},\ d(v)=l-1,\ d(v_i)=1,$$

H_1 为另有一点 u 与 v_1 相邻所得图，H_2 为连接 v_1,v_2 所得图，则 K_n-H_1 与 K_n-H_2 色等价。

证明： $P(K_n-H_1)=P(K_n-S_{l-1})+P(K_{n-1}-S_{l-2})$

$$P(K_n-H_2)=P(K_n-S_{l-1})+P(K_{n-1}-S_{l-2})$$ 毕证。

参 考 文 献

[1] C. Y. Chao and E. G. Whitehead Jr., On chromatic equivalence of graphs, in "Theory and Applications of Graphs" (Y. Alavi and D. R. Lick, Eds) Springer-Verlag Lecture Notes in Math. No. 642, Spriger-Verlag, New Yoqk, 1978, 121-131.

[2] C. Y. Chao and E. G. Whitehead, Jr., Chromatically unique graphs, Discrete Math. 27 (1979), 171-177.

[3] B. Loerinc, Chromatic uniqueness of generalized θ-graphs, Discrete Math., 23 (1978), 313-316.

[4] B. Loerinc and E. G. Whitehead, Jr., Chromatic polynomials for regular graphs and modified wheels, J. Combin. Theory, Ser. B, 31 (1981), 54-61.

[5] V. Chvátal, A note on coefficients of chrormatic polynomials, J. Combin. Theory, 9 (1970), 95-96.

[6] R. C. Read, An introduction to chromatic polynomials, J. Combin. Theory, 4 (1968), 52-71.

[7] S. G. Hoggar, Chromatic polynomials and logarithmic concavity, J. Combin. Theory, Ser. B 16 (1974), 248-254.

[8] A. A. Zykor, On some properties of linear complexes, Amer. Math. Soc. Transl. No. 79 (1952), translated from Mat. Sb. 24, No. 66 (1949), 163-188.

Complete-graph-basis and Graphs with More Edges

Xu Shaoji

Abstract

In this paper, some properties regarding the chromatic polynomials of graph on the complete-graph-basis and the chromaticity of some graphs by complete-graph-basis are discussed.