威布尔分布场合下序进应力加速寿命试验的统计分析*

费鹤良
(数学系)

提　要　本文对寿命分布为威布尔分布，加速方程为逆幂模型，由一般序进应力加速寿命试验所获得的数据，给出了一种统计分析方法.

关键词　威布尔分布；序加试验；逆幂律；参数估计
中图法分类号　O213.2

序进应力加速寿命试验(以下简称序加试验)是加速寿命试验中的一种重要方法，它比恒定应力加速寿命试验更能缩短试验时间. 有关序加试验的统计分析可参看林正宁，费鹤良[1,2](1987,1991)的文章，Xiangking yin 和 Baozhong Sheng[3](1987)讨论了序加试验时，威布尔分布的极大似然估计，但计算困难，且不一定有解. 费鹤良等[4](1991)对固体钽电解电容器作了序加试验和恒加试验的比较，统计分析的结果二者基本一致，说明了序加试验及其统计分析的可行性.

本文对于威布尔分布，加速方程为逆幂律模型下，由一般序加应力$V(t)=Kt+V_0$下获得的定数截尾数据，给出一种统计分析方法，其优点是只要进行一组序加试验便可得到有关参数的估计.

1　基本假定

在下列假定下，讨论序加试验的统计分析.

假定1　在恒定应力V下，产品寿命服从威布尔分布，其分布函数为

$$F_V(t)=1-\exp[-(t/\eta_V)^m],\qquad t>0 \tag{1}$$

其中$m>0$为形状参数，$\eta_V>0$为特征寿命.

假定2　特征寿命η_V与应力V之间满足逆幂律关系，即

$$\eta_V=\frac{1}{dV^c} \tag{2}$$

其中参数$d>0, c>0$.

本文于1994年4月22日收到
* 国家自然科学基金资助项目

假定3 产品的剩余寿命仅依赖于当时已累积失效的部分和当时的应力水平，而与累积方式无关，这便是Nelson假定[6]. 它的数学含义是，在应力水平V_i下，产品工作t_i的累积失效概率$F_i(t_i)$，相当于这种产品在应力V_j下工作t_{ij}的累积失效概率$F_j(t_{ij})$，即$F_i(t_i) = F_j(t_{ij})$

在一般序进应力加速寿命试验下，应力$V(t)$随时间t线性增加，即

$$V(t) = Kt + V_0 \tag{3}$$

这里K, V_0为预定的正常数.

若T为序进应力(3)下的产品的寿命，由[1]易知T的寿命分布为

$$F_K(t) = 1 - \exp\{-(\frac{d[(Kt+V_0)^{1+c} - V_0^{1+c}]}{K(1+c)})^m\}, \qquad t > 0, \tag{4}$$

若令$x = Kt/V_0$，则

$$F_K(x) = 1 - \exp\{-[\frac{(1+x)^{1+c} - 1}{K(1+c)/(dV_0^{1+c})}]^m\}, \qquad x > 0, \tag{5}$$

2 参数估计

先给出几个引理

引理1 设$0 < x_i < x_j < x_K, c > 0$，则

$$f(c) = \frac{\ln[(1+x_j)^{1+c} - 1] - \ln[(1+x_i)^{1+c} - 1]}{\ln[(1+x_K)^{1+c} - 1] - \ln[(1+x_j)^{1+c} - 1]} \tag{6}$$

为c的严格逆降函数.

证 记

$$h_1(c,x) = \frac{(1+x)^{1+c}\ln(1+x)}{(1+x)^{1+c} - 1}, \qquad x > 0$$

$$h_2(c,x) = \ln[(1+x)^{1+c} - 1], \qquad x > 0$$

函数$f(c)$对c求导，得到

$$\frac{\partial f(c)}{\partial c} = \frac{h(c)}{[h_2(c,x_K) - h_2(c,x_j)]^2} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} h(c) &= [h_1(c,x_j) - h_1(c,x_i)][h_2(c,x_K) - h_2(c,x_j)] \\ &\quad - [h_1(c,x_K) - h_1(c,x_j)][h_2(c,x_j) - h_2(c,x_i)] \\ &= [h_1(c,x_j) - h_1(c,x_i)][h_1(c,x_K) - h_1(c,x_j)] \cdot \\ &\quad \left[\frac{h_2(c,x_K) - h_2(c,x_j)}{h_1(c,x_K) - h_1(c,x_j)} - \frac{h_2(c,x_j) - h_2(c,x_i)}{h_1(c,x_j) - h_1(c,x_i)}\right], \end{aligned} \tag{8}$$

由于

$$\frac{\partial h_1(c,x)}{\partial x} = \frac{(1+x)^c}{[(1+x)^{1+c} - 1]^2}[(1+x)^{1+c} - (1+c)\ln(1+x) - 1], x > 0$$

易知$\partial h_1(c,x)/\partial x > 0$，即$h_1(x,c)$作为$x$的函数为严格逆增函数. 又$h_2(c,x)$显然为$x$的严格逆增函数，它对$x$的导数为

$$\frac{\partial h_2(c,x)}{\partial x} = \frac{(1+c)(1+x)^c}{(1+x)^{1+c} - 1}$$

现在，我们令

$$h_3(c,x) = \frac{\partial h_2(c,x)/\partial x}{\partial h_1(c,x)/\partial x}$$

$$= \frac{(1+c)[(1+x)^{1+c}-1]}{(1+x)^{1+c}-(1+c)\ln(1+x)-1}, \qquad x>0 \tag{9}$$

$h_3(c,x)$ 关于 x 的导数为

$$\frac{\partial h_3(c,x)}{\partial x} = \frac{(1+c)^2[(1+x)^{1+c}-(1+c)(1+x)^{1+c}\ln(1+x)-1]}{(1+x)[(1+x)^{1+c}-(1+c)\ln(1+x)-1]^2}, \qquad x>0,$$

易证 $\partial h_3(c,x)/\partial x<0$，(对 $x>0$)，所以 $h_3(c,x)$ 为 x 严格逆降函数.

根据 Cauchy 定理，存在 $\xi_1, x_i<\xi_1<x_j$，和 $\xi_2, x_j<\xi_2<x_K$，使得

$$h(c) = [h_1(c,x_j)-h_1(c,x_i)][h_1(c,x_K)-h_1(c,x_j)] \cdot [h_3(c,\xi_2)-h_3(c,\xi_1)]$$

由 $h_1(c,x)$，$h_2(c,x)$ 为 x 的严增函数和 $h_3(c,x)$ 为 x 的严降函数可知 $h(c)<0$，对 $c>0$，即有 $\partial f(c)/\partial c<0$。引理1得证.

引理2 设 $0<x_1<x_2<\cdots<x_r, a_i>0, i=1,\cdots,r$，则，对于 $1<K<r$，

$$f(c) = \frac{\sum_{i=2}^{K} a_i\{\ln[(1+x_i)^{1+c}-1]-\ln[(1+x_{i-1})^{1+c}-1]\}}{\sum_{i=K+1}^{r} a_i\{\ln[(1+x_i)^{1+c}-1]-\ln[(1+x_{i-1})^{1+c}-1]\}}, \quad c>0, \tag{10}$$

为 c 的严格逆降函数.

证 用引理1，易证引理2成立.

记 EXP(θ) 为均值是 θ 的指数分布.

引理3[8] 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ i.i.d. EXP(1)，$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 为次序统计量，

则 $nX_{(1)},\cdots,(n-i+1)(X_{(i)}-X_{(i-1)}),\cdots,X_{(n)}-X_{(n-1)}$ 相互独立，且服从 EXP(1)

引理4[8] 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ i.i.d. EXP(θ)，

记 $S_i=\sum_{j=}^{i} x_j, i=1,2,\cdots,k$，则

$$\frac{S_1}{S_2},\left(\frac{S_2}{S_3}\right)^2,\cdots,\left(\frac{S_{k-1}}{S_k}\right)^{k-1} \text{i.i.d.} \sim R(0,1),$$

引理5 设 $W_{(1)},W_{(2)},\cdots,W_{(r)}$ 为标准极小值分布的容量为 n 的前 r 个次序统计量，记 $H_i=W_{(i)}-W_{(i-1)}$，则当 n 较大时，$H_i/E(H_i)$，$i=2,\cdots,r$，近似服从指数分布EXP(1)，且近似相互独立.

设产品寿命服从 Weibull 分布，现抽取 n 个产品在序进应力(3)下作定数截尾寿命试验，到有 r 个产品失效时截止，失效时间依次为：

$$t_{(1)}\le t_{(2)}\le\cdots\le t_{(r)} \qquad r\le n$$

令 $x_{(i)}=Kt_{(i)}/V_0$，$i=1,2,\cdots,r$.

根据文献[9]，并注意到 $X=KT/V_0$，，且 $(1+X)^{1+c}$，服从三参数 weibull 分布，有下面的近似 F 分布：

$$F=\frac{r-k}{k-1}\frac{\sum_{i=2}^{k}\{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i-1)})^{1+c}-1]\}/EH_i}{\sum_{j=k+1}^{r}\{\ln[(1+X_{(j)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(j-1)})^{1+c}-1]\}/EH_j}.$$

$$\approx F(2(k-1),2(r-k)), \tag{11}$$

其中 $EH_i = EW_{(i)} - EW_{(i-1)}, i = 1,2,\cdots,r$，见引理5.

(11)式可看作 $k-1$ 个相互独立同分布于自由度为2和 $2(r-k)$ 的 F 分布的随机变量之和的平均，由于 F 分布 $F(2,2(r-k))$ 的均值为 $(r-k)/(r-k-1)$．对于给定的样本观察值，可从下列等式得到参数 c 的估计：

$$\frac{r-k}{k-1}\frac{\sum_{i=2}^{k}\{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i-1)})^{1+c}-1]\}/EH_i}{\sum_{j=k+1}^{r}\{\ln[(1+X_{(j)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(j-1)})^{1+c}-1]\}/EH_j} = \frac{r-k}{r-k-1}, \tag{12}$$

或

$$\frac{\sum_{i=2}^{k}\{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i-1)})^{1+c}-1]\}/EH_i}{\sum_{j=k+1}^{r}\{\ln[(1+X_{(j)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(j-1)})^{1+c}-1]\}/EH_j} = \frac{k-1}{r-k-1}, \tag{13}$$

由引理2知道，(12)(或(13))式的左边为 c 的单调下降函数，从而可以得到 c 的唯一解 $\hat{c}$，$\hat{c}$ 称为 c 的逆短估计[10].

记　$Y_i = (n-i+1)\{[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]^m - [(1+X_{(i-1)})^{1+c}-1]^m\}, i = 1,2,\cdots,r$，且设 $X_{(0)} = 0$．可知 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ i.i.d. $\sim \mathrm{EXP}(\theta)$，其中 $\theta = K(1+c)/dV_0^{1+c}]^m$.

设

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} Y_j = \sum_{j=1}^{i}[(1+X_{(j)})^{1+c}-1]^m + (n-i)[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]^m, \quad i = 1,2,\cdots,r, \tag{14}$$

由引理4可知，$S_1/S_2, (S_2/S_3)^2, \cdots, (S_{r-1}/S_r)^{r-1}$ 相互独立，且服从同一均匀分布 $R(0,1)$，即

$$-\log\frac{S_1}{S_2}, -2\log\frac{S_2}{S_3}, \cdots, -(r-1)\log\frac{S_{r-1}}{S_r} \text{ i.i.d.} \sim \mathrm{EXP}(1)$$

建立矩方程

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r-1}\left(-i\log\frac{S_i}{S_{i+1}}\right) = 1$$

即

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r-1}\log\frac{S_r}{S_i} = 1 \tag{15}$$

易证，对于给定的 $x_{(i)}, i = 1,2,\cdots,r$ 和 c，$\log(S_r/S_i), i = 1,2,\cdots,r-1$ 是 m 的严格增函数(可参见[11])．将由(12)式得到的 c 的估计 $\hat{c}$ 代入(15)，则可从(15)式得到 m 的估计，记作 $\hat{m}$.

由引理3可知

$$\frac{Y_i}{\theta} = \frac{(n-i+1)\{[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]^m - [(1+X_{(i-1)})^{1+c}-1]^m\}}{[K/(1+c)/dV_0^{1+c}]^m}, i = 1,2,\cdots,r,$$

相互独立且服从 EXP(1)．故可建立下列方程

$$\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{Y_i}{\theta} = 1 \tag{16}$$

从(16)式,得到 d 的估计

$$\hat{d}=\frac{K(1+\hat{c})}{V_0^{1+\hat{c}}}\{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}[(1+X_{(i)})^{1+\hat{c}}-1]^{\hat{m}}+(n-r)[(1+X_{(r)})^{1+\hat{c}}-1]^{\hat{m}}\}^{-\frac{1}{\hat{m}}} \tag{17}$$

从上面的讨论可以知道,由序加试验所得的定数截尾样本或完全样本,可从(12),(15)和(17)得到参数 c, m 和 d 的估计. 从而可以得到所需工作应力 V_w 下的各种可靠性特征量的估计,特别可以得到加速系数的估计. 记 $\tau_{V\sim V_w}$ 为应力 V 相对于工作应力 V_w 的加速系数,根据定义

$$\tau_{V\sim V_w}=(\frac{V}{V_0})^{c}, \tag{18}$$

其估计为

$$\hat{\tau}_{V\sim V_w}=(\frac{V}{V_0})^{\hat{c}}, \tag{19}$$

其中 $\hat{c}$ 可从(12)式得到.

3 区间估计

3.1 c 的区间估计

由(11)式知道 $F\sim F(2(k-1),2(r-k))$, 若记 $F_p(2(k-1),2(r-k))$ 为 F 分布的下侧 p 分位数,取置信水平为 $1-\alpha$,于是

$$P[F_{\frac{\alpha}{2}}(2(k-1),2(r-k))\leq F\leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2(k-1),2(r-k))]=1-\alpha \tag{20}$$

由引理 2 和(20),容易得到 c 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$(c_L,c_U) \tag{21}$$

3.2 c 和 m 的联合置信域

记

$$F_{c,m}=2m\sum_{i=2}^{r}\frac{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]}{EH_i}, \tag{22}$$

根据引理 5, $F_{c,m}\sim\chi^2(2(r-2))$,并且 F_c 与 $F_{c,m}$ 近似地相互独立. 由 F 和 $F_{c,m}$ 可以得到 (c,m) 的联合置信域[11].

3.3 c,m,d 的联合置信域

为了获得 c,m,d 和联合置信域,我们取

$$F_c=\frac{k^*-k_0}{K_0-1}\frac{\sum_{i=2}^{k}\frac{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]}{EH_i}}{\sum_{i=k_0+1}^{k^*}\frac{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]}{EH_i}}, \tag{23}$$

其中 $2\leqslant k_0<k^*\leqslant r-1$, 可知 $F_c\sim F(2(k_0-1),2(k^*-k_0))$,

$$F_{c,m}=2m\sum_{i=2}^{k^*}\frac{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]-\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]}{EH_i}, \tag{24}$$

$$F_{c,m,d}=2\sum_{i=k^*+1}^{r}(n-i+1)\frac{\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]^{m}-\ln[(1+X_{(i)})^{1+c}-1]^{m}}{[K(1+c)/dV_0^{1+c}]^{m}}, \tag{25}$$

容易知道, $F_c\sim F(2(k_0-1),2(k^*-k_0))$, $F_{c,m}\sim\chi^2(2(k^*-1))$, $F_{c,m,d}\sim\chi^2(2(r-k^*))$, 且 $F_c,F_{c,m},F_{c,m,d}$ 近似相独立[11].

由 $F_c, F_{c,m}, F_{c,m,d}$ 可以获得 (c, m, d) 的联合置信域，其中 K^*，k_0 可适当选取，例如一种简单的方法将 k^* 取为 $r-1$，$k_0 = \left[\frac{r-1}{2}\right]$.

在实际应用中，通常通过加速寿命试验来获得加速系数的估计，特别是区间估计，而加速系数是由 c 决定的，故只要通过(20)式便可求得.

参 考 文 献

[1] Zhengning Lin., Heliang Fei., Statistical inference from progressie stress accelerated life tests., *Reliaility Theory and Applications*, ,eds. S, Osaki and J. H. Cao. world Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 1987, 229～236

[2] Zhengning Lin., Heliang Fei., A nonparametric approach to progressive stress accelerated lift testing., *IEEE Trans. Reliability*, R-40, 1991: 173～176

[3] Xiangkang Yin., Baozhong Sheng., Some aspects of accelerated life testing by progressive stress., *IEEE Trans Reliability*, R-36, 1987: 150～155

[4] 费鹤良、冷时铭、苏德清，固体钽电解电容器序进应力加速寿命试验及其统计分析，应用概率统计，1991，7(3)：330～335

[5] Nelson, W. B, Accelerated life testing-step-stress models and data analysis, *IEEE Trans. Reliability*, R-29, 1980: 103～108

[6] Bain, L. J., Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, Marcel Dekker Inc. 1978

[7] Suprier, J. D., An overview of tests for exponentiality., *Commun. Statist. Theory Meth.* 1984, 13(13)

[8] Van Montfort, M. A. J., On testing that the distribution of extreme is type Ⅰ When type Ⅱ is the alternative, *Journal of Hgdrology*, 1970, 11: 421～427

[9] Mann, N. R., K. W. Fertig., A goodness of fit test for the two-parameter *Vs*. three-parameter Weibull: Confidence bounds for the threshold. *Technometrics*, 1975b, 19: 87～93

[10] 王炳兴，Weibull 分布的统计推断，应用概率统计，1992，8(4)，357～364

[11] 费鹤良、徐晓岭，三参数威布尔分布参数的联合置信域，应用概率统计，1992，8(4)：398～402

Statistical Analysis of Progressive-Stress Accelerated Life Testing in the Weibull Distribution Situation

Fei Heliang
(Department of Mathematics)

Abstract

A statistical analysis method is proposed to deal with the problem of life date collected from the most general progressive-stress accelerated life testing under an inverse power law model when life distribution is the Weibull distribution.

Keywords Weibull distribution; progressive-stress accelerated life testing; inverse power law; estimate of parameter