# 2-连通简单MCD图边数的一个新的下界

方　影
(第二军医大学数理教研室)

**提　要**　设 $G$ 是具有 $n$ 个顶点的 2-连通简单MCD图，$f_2(n)$ 表示 $G$ 的边数．本文证明了当 $n\geqslant 8$ 时，

$$f_2(n)\geqslant\begin{cases}n+m-4,\ x_m+2\leqslant n<x_{m+1}+2, & n\neq x_{2l}+3,\ m\geqslant 6,\\ n+2l-5, & n\neq x_{2l}+3,\ l\geqslant 4.\end{cases}$$

其中 $x_m=u_m-2u_{m-5}$，$u_m$ 是 Fibonacci 数．

**关键词**　圈；圈分布图；2-连通简单CD图

**中图法分类号**　O157.5

本文所考虑的图都是有限无向图．未给出的记号和定义见[1]和[2].

设 $G$ 是一个图(2-连通简单图)，若 $G$ 中没有两个等长圈，则称 $G$ 为圈分布图(2-连通简单圈分布图)，简称CD图(2-连通简单CD图). 若 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点和最大可能边数的CD图(2-连通简单CD图)，则称 $G$ 为最大圈分布图(最大2-连通简单圈分布图)，简称MCD图(2-连通简单MCD图). 令 $f_2(n)$ 表示具有 $n$ 个顶点的2-连通简单MCD图的边数，施永兵在[2]中给出了 $f_2(n)$ 的两个下界：

**定理** $A$[2]

对每个整数 $n\geqslant 3$，$f_2(n)\geqslant n+[log_2\frac{n-2}{3}+1]$.

**定理** $B$[2]

设 k，n 为整数，$k\geqslant 4$，$u_k\leqslant n<u_{k+1}$，则 $f_2(n)\geqslant n+k-4$，其中 $u_k$ 是 *Fibonacci* 数，见[3].

在[2]中已证明了定理 $B$ 的结果比定理 $A$ 要好，还证明了当 $3\leqslant n\leqslant 11$ 时，

$$f_2(n)=n+[\frac{1}{2}(\sqrt{8n-15}-3)].$$

本文的主要结果是：

**定理1**　当 $n\geqslant 8$ 时，

$$f_2(n)\geqslant\begin{cases}n+m-4,\ x_m+2\leqslant n<x_{m+1}+2, & n\neq x_{2l}+3,\ m\geqslant 6,\\ n+2l-5, & n=x_{2l}+3,\ l\geqslant 4.\end{cases}$$

---

本文于1994年1月7日收到．

其中 $x_m=u_m-2u_{m-5}$，$u_m$ 是 Fibonacci.

**定理 2**　对 $n\geqslant 8$，令 $g(n)$ 为定理 B 中的 $n+k-4$，

$$h(n)=\begin{cases} n+m-4,\ x_m+2\leqslant n<x_{m+1}+2, & n\neq x_{2l}+3,\ m\geqslant 6, \\ n+2l-5, & n=x_{2l}+3,\ l\geqslant 4. \end{cases}$$

则

$$h(n)=\begin{cases} g(n)+1, & x_k+2\leqslant n<u_k,\ n\neq x_{2l}+3,\ k\geqslant 8,\ l\geqslant 4, \\ g(n), & \text{其他情形}. \end{cases}$$

**定理的证明**

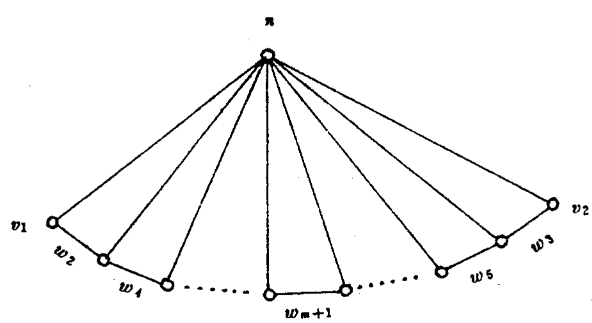
在证明定理 1 之前，我们先由 $u_m$ 来构作一系列新的数 $x_m$：

$$x_1=u_1=1,$$
$$x_2=u_2=1,$$
$$x_3=u_3=2,$$
$$x_4=u_4=3,$$
$$x_5=u_5=5,$$
$$x_m=u_m-2u_{m-5}(m\geqslant 6),$$

则

$$\begin{aligned} x_{m+1}&=u_{m+1}-2u_{m-4}=u_m+u_{m-1}-2(u_{m-5}+u_{m-6}) \\ &=u_m-2u_{m-5}+u_{m-1}-2u_{m-6}=x_m+x_{m-1}(m\geqslant 6). \end{aligned}$$

利用数 $x_2$，$x_3$，…，$x_{m+1}$，我们构作图 $G_m$：




其中 $l(uv_1)=l(uv_2)=1$，$w_k$ 是一条长为 $x_k$ 的道路($k=2$，…，$m+1$)，($m\geqslant 1$). 可以证明 $G_m$ 是一个 2-连通简单圈分布图，为了证明 $G_m$ 是一个 2-连通简单圈分布图及定理 1，我们引进下面 3 个引理.

**引理 1**　对任意的 $l\geqslant 3$，$l\in N$，有

(1) $x_{2l+1}>x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2>x_{2l-1}+\cdots+x_5+x_3$；

(2) $x_{2l+2}>x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2$.

**证明**　(1) 因为 $x_3>x_2$，并且对 $l\geqslant 3$，有

$$\begin{aligned} x_{2l+1}&=x_{2l}+x_{2l-1}=x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2+x_1 \\ &>x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2 \end{aligned}$$

又因为，对任 $l\geqslant 2$，有 $x_{2l}>x_{2l-1}$

所以

$$x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2>x_{2l-1}+\cdots+x_5+x_3.$$

(2) 因为

$$x_{2l+2}=x_{2l+1}+x_{2l}(l\geqslant 3),$$

由(1)得

$$x_{2l+2}>x_{2l+1}>x_{2l}+x_{2l-2}+\cdots+x_4+x_2.$$

**引理 2** 对任意的 $l\geqslant 3$，有

(1) $x_{2l+1}+\cdots+x_7+x_5<x_{2l+2}<x_{2l+1}+\cdots+x_5+x_3$;

(2) $x_{2l+2}+x_{2l+1}>x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_5+x_3$;

(3) $x_{2l+2}+x_{2l}>x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_5+x_3$.

**证明** (1) 因为

$$\begin{aligned}x_{2l+2}&=x_{2l+1}+x_{2l}=x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_7+x_6\\&=x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_7+x_5+x_2,\end{aligned}$$

$$(x_6=6,\ x_5=5,\ x_2=1,\text{故 } x_6=x_5+x_2).$$

而 $0<x_2<x_3$

所以

$$x_{2l+1}+\cdots+x_7+x_5<x_{2l+2}<x_{2l+1}+\cdots+x_5+x_3.$$

(2) 由(1)且

$$x_{2l+1}>x_3(l\geqslant 3),$$

所以

$$x_{2l+2}+x_{2l+1}>x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_5+x_3.$$

(3) 因为 $l\geqslant 3$，所以 $x_{2l}\geqslant 6$，而 $x_3=2$，由(1)可得

$$x_{2l+2}+x_{2l}>x_{2l+1}+x_{2l-1}+\cdots+x_7+x_5+x_3.$$

**引理 3** 对 $m\geqslant 8$，有

$$u_{m-1}<x_m+2<u_m-1.$$

**证明** 当 $m=8$ 时，

$$x_m+2=x_8+2=19,$$

$$u_m=u_8=21,$$

$$u_{m-1}=u_7=13.$$

所以

$$u_7<u_8+2<u_8-1.$$

归纳假设，当 $m=k(k\geqslant 8)$ 时，有

$$u_{k-1}<x_k+2<u_k-1.$$

则当 $m=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}x_{k+1}+2&=u_{k+1}-2u_{k-4}+2\\&=u_{k+1}-1-(2u_{k-4}-3)\end{aligned}$$

因为 $k\geqslant 8$，故 $u_{k-4}>2$，所以 $2u_{k-4}-3>0$，

从而推得

$$x_{k+1}+2<u_{k+1}-1;$$

又因为

$$\begin{aligned}x_{k+1}+2&=u_{k+1}-2u_{k-4}+2\\&=u_k+u_{k-1}-2u_{k-4}+2\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}u_{k-1}&=u_{k-2}+u_{k-3}=u_{k-3}+u_{k-4}+u_{k-4}+u_{k-5}\\&=u_{k-4}+u_{k-5}+2u_{k-4}+u_{k-5}\\&=3u_{k-4}+2u_{k-5}>2u_{k-4},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}x_{k+1}+2&=u_k+3u_{k-4}+2u_{k-5}-2u_{k-4}+2\\&=u_k+(u_{k-4}+2u_{k-5}+2)>u_k\end{aligned}$$

即

$$u_k<x_{k+1}+2<u_{k+1}-1.$$

由归纳法知，对 $m\geqslant 8$，有

$$u_{m-1}<x_m+2<u_m-1.$$

**命题**　$G_m$ 是一个 2-连通简单圈分布图.

**证明**　直接验证可知 $G_m(m\leqslant 5)$是圈分布图.

假设 $G_{m-1}$也是圈分布图，由 $G_m$ 的构作法知 $G_m$ 是在 $G_{m-1}$ 中两条道路 $w_{m-1}$和 $w_m$ 之间添加一条道路 $w_{m+1}$，并且使 $w_{m+1}$的两个端点都恰有一条边与顶点 $u$ 连接构作而成的. 现在，在 $G_m$ 中任取两个不同的圈 $C_1$ 和 $C_2$，如果 $C_1$ 和 $C_2$ 均不含道路 $w_{m+1}$，则 $C_1$ 和 $C_2$ 可看成是 $G_{m-1}$ 的两个不同的圈，由归纳假设知 $G_{m-1}$是圈分布图，故 $C_1$ 和 $C_2$ 不等长；如果 $C_1$ 和 $C_2$ 均含路 $w_{m+1}$，则将 $C_1$ 和 $C_2$ 均收缩掉道路 $w_{m+1}$后所得到的圈 $\overline{C}_1$ 和 $\overline{C}_2$ 是 $G_{m-1}$中不同的圈，那么 $\overline{C}_1$ 和 $\overline{C}_2$ 不等长，从而推得 $C_1$ 和 $C_2$ 不等长；最后，不妨设 $C_1$ 含 $w_{m+1}$而 $C_2$ 不含 $w_{m+1}$，分两种情形讨论：

**情形 I**，$m=2l$，那么 $C_2$ 仅含道路 $w_{2i}$，$w_{2i+2}$，…，$w_{2j}$或仅含道路 $w_{2s+1}$，$w_{2s+3}$，…，$w_{2t-1}$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant l,\ 1\leqslant s<t\leqslant l)$，由引理 1 (1)

$$x_{2l+1}>x_{2i}+x_{2i+2}+\cdots+x_{2j},$$

并且

$$x_{2l+1}>x_{2s+1}+x_{2s+3}+\cdots+x_{2t-1},$$

从而

$$l(C_1)>l(C_2).$$

**情形 II**，$m=2l+1$，那么$(a)$ $C_2$ 仅含道路 $w_{2i}$，$w_{2i+2}$，…$+w_{2j}(1\leqslant i\leqslant j\leqslant l)$或者$(b)$ $C_2$ 仅含 $w_{2s+1}$，$w_{2s+3}$，…，$w_{2t+1}(1\leqslant s\leqslant t\leqslant l)$. 对于情形$(a)$，同样地，由引理 1 (2)得出 $l(C_1)>l(C_2)$；如果是情形$(b)$，那么当 $C_2$ 不含某一条道路 $w_{2s+1}(1\leqslant s\leqslant l)$时，由引理 2 (1)可得 $l(C_1)>l(C_2)$，如果 $C_2$ 含所有的道路 $w_3$，$w_5$，…，$w_{2l+1}$时，此时，对 $C_2$ 再分两种情形讨论：

第一种情形，当 $C_1$ 仅含道路 $w_{2l+2}$时，由引理 2 (1)得到 $l(C_1)<l(C_2)$；

第二种情形，当 $C_1$ 还含其它道路时，则 $C_1$ 必含 $w_{2l}$或 $w_{2l+1}$，那么由引理 2 的(2)或(3)可得$l(C_1)>l(C_2)$，故 $C_1$ 和 $C_2$ 不等长.

综上所述，$G_m$ 是圈分布图．由归纳法知：对任意 $m\in N$，$G_m$ 是圈分布图．而 $G_m$ 是 2-连通简单图这是很显然的，所以，$G_m$ 是 2-连通简单圈分布图．

定理 1 的证明

(1) 当 $n=x_m+2$ 时，取 $G$ 为 $G_{m-3}$，$m\geqslant 6$，则

$$\begin{aligned}\nu(G_{m-3}) &= x_2 + x_3 + \cdots + x_{m-2} + 2 \\ &= 1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + (u_6 - 2u_1) + \cdots + (u_{m-2} - 2u_{m-7}) \\ &= 1 + u_1 + \cdots + u_{m-2} - 2(1 + u_1 + \cdots + u_{m-7}) + 2 \\ &= u_m - 2u_{m-5} + 2 = x_m + 2.\end{aligned}$$

而

$$\varepsilon(G_{m-3}) = n + m - 4.$$

(2) $x_m+2<n<x_{m+1}+2$，$n\neq x_{2l}+3$ 时，令 $p=n-(x_m+2)$，则 $p\geqslant 1$，特别在 $m=2l$ 时，由于 $n\neq x_{2l}+3$，故此时 $p\geqslant 2$. 在 $G_{m-3}$的道路 $w_{m-2}$中添加一条长为 $p$ 的道路，使之成为一条长为 $x_{m-2}+p$ 的道路 $w'_{m-2}$，将所得到的图记作 $G'_{m-3}$，则由引理 1 及引理 2 采用命题的归纳证明方法，可证得 $G'_{m-3}$是一个 2-连通简单圈分布图，只要取 $G$ 为 $G'_{m-3}$，并且

$$\nu(G) = \nu(G'_{m-3}) = \nu(G_{m-3}) + p = x_m + 2 + p = n,$$

而

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G'_{m-3}) = \varepsilon(G_{m-3}) + p = x_m + 2 + m - 4 + p = n + m - 4.$$

(3) $n=x_{2l+3}$，$l\geqslant 4$，在 $G_{2l-3}$中，设 $w_{2l-3}$与 $w_{2l-2}$两交点为 $u'$，则在 $G_{2l-3}$中去掉边 $uu'$，然后再在 $w_{2l-2}$中添加一条边，使之成为一条长为 $x_{2l-2}+1$ 的道路，由此而得到的图视为 $G'_{2l-3}$，则 $G'_{2l-3}$为 2-连通简单圈分布图，取 $G$ 为 $G'_{2l-3}$，则

$$\nu(G) = \nu(G'_{2l-3}) = \nu(G_{2l-3}) + 1 = x_{2l} + 3 = n,$$

而

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G'_{2l-3}) = \varepsilon(G_{2l-3}) = x_{2l} + 2 + 2l - 4 = n + 2l - 5.$$

由于 $G$ 是 2-连通简单圈分布图，故

$$f_2(n) \geqslant \varepsilon(G).$$

定理 2 的证明

按 $G$ 的构作方法可知，在 $8\leqslant n<x_8+2=19$ 时，有

$$g(n) = h(n).$$

在 $n=x_{2l}+3$ 时，由定理 1 知

$$h(n) = \varepsilon(G) = n + 2l - 5,$$

由引理 3

$$u_{2l-1} < x_{2l} + 3 < u_{2l},$$

故

$$g(n) = n + (2l - 1) - 4 = h(n).$$

当 $u_{k-1}<x_k+2\leqslant n<u_k(k\geqslant 8)$，$n\neq x_{2l}+3$ 时，按定理 1

$$h(n) = \varepsilon(G) = n + k - 4,$$

而

$$g(n) = n + (k - 1) - 4 = n + k - 5.$$

故

$$h(n)=g(n)+1,$$

而当 $u_k \leqslant n < x_{k+1}+2$ 时，显然有

$$h(n)=n+k-4=g(n).$$

## 参 考 文 献


[1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Application, 1976

[2] Yongbing Shi, The Number of Edges in a Maximum Cycle-Distributed Graph, *Discreate Math.*, 1992, **104**:205～209

[3] Z. Wu, Fibonacci Sequences (in Chinese), Liaoning Education Press, 1986: 84～89


# A New Lower Bound of the Numbers of Edges in 2-Connected Simple Cycle-Distributed Graphs


*Fang Ying*

(The Second Military Medical University)



### Abstract

Let $f_2(n)$ be the maximum possible number of edges in a 2-connected simple graph on $n$ vertices in which no two cycles have the same length. In this paper, we prove that: For every integer $n\geqslant 8$, $f_2(n)\geqslant\begin{cases} n+m-4, & x_m+2\leqslant n<x_{m+1}+2, \quad n\neq x_{2l}+3,\ m\geqslant 6 \\ n+2l-5, & n\neq x_{2l}+3,\ l\geqslant 4. \end{cases}$ where $x_m=u_m-2u_{m-5}$, and $u_m$ is the $m$th Fibonacci number.



**Keywords** cycle; cycle-distributed graph; 2-connected simple CD graph