第32卷第3期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 32, No. 3
2003年9月 Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences) Sep. 2003

满足5色 K_4 条件完全图的边着色

唐明元

(上海师范大学 数理信息学院,上海 200234)

摘　要: 设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图, $f(n)$ 是满足下列条件的最小正整数:对于任意的正整数 $m \geqslant f(n)$,存在 K_n 的一个 m 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含5种颜色. Erdōs 和 Gyárfás 给出了 $f(n)$ 的上下界: $\frac{2}{3}n < f(n) < n$; 并且证明了 $f(9) = 8$. 作者证明了 $f(10) = 9$; 并且改进了 $f(n)$ 的下界: $f(n) > \frac{2}{3}n + 1$.

关键词: 花形图;正规花形图;5色 K_4 条件

中图分类号: O157　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1000-5137(2003)03-0021-05

0 引　言

设 G 是一个有限、无向的简单图, $V(G)$ 表示 G 的顶点集, $E(G)$ 表示 G 的边集, $\nu(G)$ 和 $\varepsilon(G)$ 分别表示 G 的顶点数和边数. 如果图 H 满足: $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的一个子图;如果 $V(H) = V(G)$,则称 H 是 G 的一个生成子图. 如果 V_1 是 $V(G)$ 的一个非空子集,由 V_1 导出的 G 的子图记为 $G[V_1]$. 如果 E_1 是 $E(G)$ 的一个非空子集,由 E_1 导出的 G 的子图记为 $G[E_1]$. 其他没有出现的术语和记号参见[1]. Paul Erdōs 在[2]的问题12中提出下列问题:设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图, $f(n)$ 是满足下列条件的最小正整数:对于任意的正整数 $m \geqslant f(n)$,存在 K_n 的一个 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含5种颜色,求 $f(n)$. Erdōs 和 Gyárfás 给出了 $f(n)$ 的上下界: $\frac{2}{3}n < f(n) < n$,显然要求 n 满足: $n \geqslant 6$;并且指出,已经证明了 $f(9) = 8$. 本文证明了 $f(10) = 9$;同时改进了 $f(n)$ 的下界: $f(n) > \frac{2}{3}n + 1$, $(n \geqslant 7)$. 即文中的定理1和定理2.

1 基本概念和引理

定义1　设 K_n 是具有 n 个顶点的完全图, m 是一个正整数,如果存在 K_n 的一个 m 边着色,使得 K_n 中的任一个 K_4 至少含5种颜色,则称 K_n 关于 m 满足5色 K_4 条件,相应的 m 边着色称为满足5色 K_4 条件的 m 边着色.

按照定义1, $f(n)$ 即为使 K_n 满足5色 K_4 条件的最小正整数 m.

定义2　设图 G 有一个 m 边着色, $u \in V(G)$,如果存在 $v \in V(G)$,使得 $uv \in E(G)$,并且 uv 着色 i $(1 \leqslant i \leqslant m)$,则称色 i 在顶点 u 上表现,并记为 $uv = i$.

为了方便起见,我们引进花形图和正规花形图的概念.

收稿日期: 2002-12-30

基金项目: 上海市教委科技发展基金资助项目(02DK06)

作者简介: 唐明元(1953-),男,上海师范大学数理信息学院副教授.

定义 3 设 $T_i = uv_iw_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 个三角形，由上述 n 个三角形关于顶点 u 粘合而成的图，称为具有 n 片花瓣的花形图（简称为 n 瓣花形图），记为 F，顶点 u 称为花心，$T_i = uv_iw_i$ 称为花瓣，边 uv_i 和 uw_i 称为花的内边，简称为内边，边 v_iw_i 称为花的外边，简称为外边.

设 F 是具有 n 片花瓣的花形图，显然 $F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i, \nu(F) = 2n + 1, \varepsilon(F) = 3n$.

定义 4 设 $F = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$ 是具有 n 片花瓣的花形图，$T_i = uv_iw_i$ 是一片花瓣，如果 T_i 的两条内边都着相同的颜色，即 $uv_i = uw_i$，则称 T_i 是一片正规花瓣；如果对于 F 的每一片花瓣 $T_i(i = 1,2,\cdots,n)$，都是正规花瓣，则称 F 是一个正规花形图.

下面的结论是显然的.

引理 1 设 m 是一个正整数，K_n 是 n 个顶点的完全图，并进行了 m 边着色，如果 K_n 关于上述 m 边着色满足 5 色 K_4 条件，那么：

(1) 对于任一种颜色 i $(1 \leqslant i \leqslant m)$，在 K_n 的每一个顶点上至多表现两次.

(2) 对任意 $u \in V(K_n)$，$T = uvw$ 是一片以 u 为花心的正规花瓣，设 $uv = uw = i, vw = j$，则 $i \neq j$，并且 i 和 j 都不能再一次在 u,v,w 中的任意一个顶点上表现.

引理 2 设 m 是一个正整数，K_n 是 n 个顶点的完全图，并进行了 m 边着色，如果 K_n 关于上述 m 边着色满足 5 色 K_4 条件，那么：每一种颜色至多着色 K_n 的 $[\frac{2}{3}n]$ 条边.

证明 设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是 K_n 的一个 m 边色分类，其中 E_i 是 K_n 中着色 i 的边所成之集. 设 G_i 是 K_n 的恰含 i 色边的生成子图，$E(G_i)_i = E_i, V(G_i) = V(K_n)$. 任取 G_i 的一个连通分支 H，则对于任意的 $u \in V(H)$，按引理 1(1) 可知 $d_H(u) \leqslant 2$，从而 H 是一条路或者是一个圈，又因 K_n 关于 m 边着色满足 5 色 K_4 条件，则必有 $\nu(H) \leqslant 3$. 若不然，$\nu(H) \geqslant 4$，则 H 含一条长为 3 的路 P，使 $\nu(P) = 4$，由此构成的 K_4 至多含 4 种颜色，与 K_n 满足 5 色 K_4 条件矛盾. 下面分 3 种情况讨论：

(1) $n = 3k$，要使 $\varepsilon(G_i)$ 最大，当且仅当对 G_i 的每一个连通分支 H，都有 $\nu(H) = 3, \varepsilon(H) = 2$，因此 G_i 共有 k 个连通分支，并且此时 $\varepsilon(G_i) = 2k = \frac{2}{3}n$.

(2) $n = 3k + 1$，为使 $\varepsilon(G_i)$ 最大，此时或者 G_i 恰含一个孤立点，其余的 k 个分支均含 3 个顶点；或者 G_i 恰含两个具有两个顶点的分支，其余 $k - 1$ 个分支均含 3 个顶点. 无论何种情况，都有 $\varepsilon(G_i) = 2k = [\frac{2}{3}n]$.

(3) $n = 3k + 2$，为使 $\varepsilon(G_i)$ 最大，必有 G_i 恰含一个具有两个顶点的分支，其余的 k 个分支均含 3 个顶点. 此时 $\varepsilon(G_i) = 2k + 1 = [\frac{2}{3}n]$. □

引理 3 设 K_n 是 n 个顶点的完全图，m 是一个正整数（$m \leqslant n - 2$），那么对于 K_n 的任何一个满足 5 色 K_4 条件的 m 边着色，下列结论成立.

(1) 对于任意的 $u \in V(K_n)$，存在以 u 为花心的 2 瓣正规花形图，且 2 条外边具有相同的边着色.

(2) 设 F_1 和 F_2 是两个 2 瓣正规花形图，花心分别为 u_1 和 u_2 $(u_1 \neq u_2)$，并且 4 条外边具有相同的边着色，则 F_1 和 F_2 是不相交的.

证明 (1) 对于任意的 $u \in V(K_n)$，有 $d(u) = n - 1$，因为 $m \leqslant n - 2$，再结合引理 1，因此，至少有一种颜色在 u 上恰好表现两次，设 $uv_1 = uv_2 = 1$，以及 $v_1v_2 = 2$，由于 1 号色和 2 号色不能再在 u 上表现，且 u 的关联边还有 $n - 3$ 条，能用的颜色还有 $m - 2$ 种，而 $m - 2 \leqslant n - 4$，同样可设 $uv_3 = uv_4 = 3, v_3v_4 = 4$，如此继续下去，如果 $m = 2k$，那么到最后有 $uv_{2k-1} = uv_{2k} = 2k - 1$，此时还剩下最后一种颜色 m，且 u 的关联边至少还有 1 条，因此 $v_{2k-1}v_{2k}$ 必着某色 $2i$ $(1 \leqslant i < k)$. 因为，若 $v_{2k-1}v_{2k}$ 着色 $2i - 1$ $(1 \leqslant i < k)$，则与引理 1(2) 矛盾. 如果 $m = 2k - 1$，那么到最后将有 $uv_{2k-1} = uv_{2k} = 2k - 1$，此时 m 种颜色已用

完,因此仍将有 $v_{2k-1}v_{2k}$ 着某色 $2i$ $(1 \leq i < k)$. 于是(1)成立.

(2) 设 $F_1 = u_1v_1w_1 \cup u_1x_1y_1$, $F_2 = u_2v_2w_2 \cup u_2x_2y_2$,并且 $v_1w_1 = x_1y_1 = v_2w_2 = x_2y_2 = 1$. 如果 F_1 和 F_2 是相交的,设交图为 H. 按对称性,只有下列两种情况发生:要么 $u_1 \in V(H)$,因为 $u_1 \neq u_2$,所以可设 $u_1 = v_2$,考察 F_1 的正规花瓣 $u_1v_1w_1$,因为 $v_1w_1 = v_2w_2 = 1$,推出1号色在 u_1 上表现,与引理1(2)矛盾;要么,$v_1 \in V(H)$ 并且 $v_1 \neq u_2$,不妨设 $v_1 = v_2$,同样可得到与引理1(2)矛盾. □

2 主要结果

命题1 设 K_n 是 n 个顶点的完全图,$m = [\frac{2}{3}n+1]$,那么当 $n \geq 22$,或者 $n = 7,10,13,14,16,17,19,20$ 时,K_n 关于 m 不满足5色 K_4 条件,即有 $f(n) > \frac{2}{3}n+1$.

证明 考察 K_n 的任一 m 边着色,设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 是 K_n 的一个 m 边色分类. 如果 K_n 关于该 m 边着色满足5色 K_4 条件,按引理2,对每一个 E_i,都有 $|E_i| \leq [\frac{2}{3}n]$ $(i = 1,2,\cdots,m)$,从而 K_n 中最多可着色边数为 $m \times [\frac{2}{3}n]$,而 $\varepsilon(G) = \frac{n(n-1)}{2}$. 下面,对 n 分6种情况讨论:

(1) $n = 6k$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+1)4k$,$\varepsilon(G) = 3k(6k-1)$. 于是当 $k \geq 4$ 时,有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$,即满足5色 K_4 条件的 边着色不存在. 此时,$n = 24,30,\cdots$.

(2) $n = 6k+1$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+1)4k$,$\varepsilon(G) = 3k(6k+1)$. 总有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$. 所以,$n = 7,13,19,\cdots$.

(3) $n = 6k+2$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+2)(4k+1)$,$\varepsilon(G) = (3k+1)(6k+1)$. 于是当 $k \geq 2$ 时,有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$. 所以,$n = 14,20,\cdots$.

(4) $n = 6k+3$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+3)(4k+2)$,$\varepsilon(G) = (6k+3)(3k+1)$. 于是当 $k \geq 4$ 时,有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$. 所以,$n = 27,33,\cdots$.

(5) $n = 6k+4$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+3)(4k+2)$,$\varepsilon(G) = (3k+2)(6k+3)$. 总有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$. 所以,$n = 27,33,\cdots$.

(6) $n = 6k+5$,则 $m \times [\frac{2}{3}n] = (4k+4)(4k+3)$,$\varepsilon(G) = (6k+5)(3k+2)$. 于是当 $k \geq 2$ 时,有 $m \times [\frac{2}{3}n] < \varepsilon(G)$. 所以,$n = 17,23,\cdots$. □

定理1 对 $n = 7,8,9,10$,有 $f(n) = n-1$.

证明 $f(9) = 8$ 是已知的,由命题1,$f(7) > \frac{2}{3} \times 7 + 1$,所以 $f(7) \geq 6$,又因 $f(7) < 7$,故 $f(7) = 6$.

下面证 $f(10) = 9$. 假定 K_{10} 有一个满足5色 K_4 条件的8边着色,按引理3(1),对于 K_{10} 的10个顶点相应的有10个2瓣正规花形图,且每一个的外边都具相同的颜色. 由于是8边色的,所以至少有两个2瓣正规花形图的外边具相同的颜色,设为 F_1 和 F_2,它们的外边同着1号色,由引理3(2)知 F_1 和 F_2 是不相交的,所以 $\nu(F_1 \cup F_2) = 10$,再按引理1(2)可知,此时1号色只能着4条边. 由于还有8个外边同色的2瓣正规花形图,但只有7种颜色,因此必定还有2个外边同色的2瓣正规花形图,设为 F_3 和 F_4,它们的外边同着2号色,同样2号色也只能着4条边,还剩下6种颜色,按引理2,每种颜色至多可着 $[\frac{2}{3} \times 10] = 6$ 条边. 所以,K_{10} 的满足5色 K_4 条件的8边着色最多可为 K_{10} 着 $6 \times 6 \times + 2 \times 4 = 44$ 条边,但 K_{10}

有 45 条边,所以,K_{10} 不存在满足 5 色 K_4 条件的 8 边着色,即 $f(10) \geqslant 9$,而 $f(10) < 10$,故 $f(10) = 9$. 同样的方法可证 $f(8) = 7$. □

命题 2 对 $n = 8, 9, 11, 12, 15, 18, 21$,有 $f(n) > \frac{2}{3}n + 1$.

证明 当 $n = 8, 9, 10$ 时,因 $f(n) = n - 1$,故有 $f(n) > \frac{2}{3}n + 1$. 而 $f(11) \geqslant f(10) = 9$,所以,$f(11) > \frac{2}{3} \times 11 + 1$.

当 $n = 12$ 时,假定 K_{12} 有一个满足 5 色 K_4 条件的 9 边着色,按引理 3(1),对于 K_{12} 的 12 个顶点相应的共有 12 个 2 瓣正规花形图 $F_1, F_2, \cdots, F_{12}$,且每一个的外边都具相同的颜色. 由于是 9 边色的,再结合引理 3(2),则至少有 3 对 2 瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,设为 F_{2i-1} 和 F_{2i},它们的外边同着 i 号色($i = 1, 2, 3$),由于 F_{2i-1} 和 F_{2i} 是不相交的,所以 $\nu(F_{2i-1} \cup F_{2i}) = 10$,而 $n = 12$,再按引理 1(2) 和引理 2 可知,此时 i 号色最多只能着 5 条边($i = 1, 2, 3$). 剩下的 6 种颜色,按引理 2,每种颜色至多可着 $[\frac{2}{3} \times 12] = 8$ 条边. 所以,K_{12} 的满足 5 色 K_4 条件的 9 边着色最多可为 K_{12} 着 $6 \times 8 + 3 \times 5 = 63$ 条边,但 K_{12} 有 66 条边,所以,K_{12} 不存在满足 5 色 K_4 条件的 9 边着色,即 $f(12) > \frac{2}{3} \times 12 + 1$.

当 $n = 15$ 时,同样假定 K_{15} 有一个满足 5 色 K_4 条件的 11 边着色,按引理 3(1),对于 K_{15} 的 15 个顶点相应的共有 15 个 2 瓣正规花形图 $F_1, F_2, \cdots, F_{15}$,且每一个的外边都具相同的颜色. 由于是 11 边色的,再结合引理 3(2),则有下列 3 种情形发生:① 有两组 2 瓣正规花形图,每组有 3 个 2 瓣正规花形图,并且每组的外边都具相同的颜色,此时还剩下 9 种颜色,此种类型记为(3,3,9)型. ② 有一组 2 瓣正规花形图,该组有 3 个 2 瓣正规花形图,它们的外边都具相同的颜色,同时有 2 对 2 瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下 8 种颜色,此种类型记为(3,2,2,8)型. ③ 至少有 4 对 2 瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下 7 种颜色,此种类型记为(2,2,2,2,7)型. 在情形 ① 中,对于剩下的 9 种颜色,按引理 2,每种颜色最多可着色 10 条边,而按引理 1(2),对于每组外边着色相同的 3 个 2 瓣正规花形图,该色恰可着色 6 条边. 所以,K_{15} 最多可着色边数为 $9 \times 10 + 2 \times 6 = 102$. 类似的,在情形 ② 中,$K_{15}$ 最多可着色边数为 $8 \times 10 + 2 \times 7 + 1 \times 6 = 100$. 情形 ③ 中,$K_{15}$ 最多可着色边数为 $7 \times 10 + 4 \times 7 = 98$. 而 K_{15} 有 105 条边,故 $f(15) > \frac{2}{3} \times 15 + 1$.

利用同样的方法,对 $n = 18$ 和 $n = 21$ 的情形进行讨论.

当 $n = 18$ 时,设 K_{18} 有一个满足 5 色 K_4 条件的 13 边着色,按引理 3(1),对于 K_{18} 的 18 个顶点相应的共有 18 个 2 瓣正规花形图 $F_1, F_2, \cdots, F_{18}$,且每一个的外边都具相同的颜色. 由于是 13 边色的,再结合引理 3(2),则有下列 3 种情形发生:① 有两组 2 瓣正规花形图,每组有 3 个 2 瓣正规花形图,并且每组的外边都具相同的颜色,同时有 1 对 2 瓣正规花形图,外边也具相同的颜色,此时还剩下 10 种颜色,此种类型记为(3,3,2,10)型. ② 有一组 2 瓣正规花形图,该组有 3 个 2 瓣正规花形图,它们的外边具相同的颜色,同时有 3 对 2 瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下 9 种颜色,此种类型记为(3,2,2,2,9)型. ③ 至少有 5 对 2 瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下 8 种颜色,此种类型记为(2,2,2,2,2,8)型. 利用上述同样的方法进行计算可得,在情形 ① 中,K_{18} 最多可着色边数为 $10 \times 12 + 1 \times 9 + 2 \times 8 = 145$. 情形 ② 中,$K_{18}$ 最多可着色边数为 $9 \times 12 + 3 \times 9 + 1 \times 8 = 143$. 情形 ③ 中,$K_{18}$ 最多可着色边数为 $8 \times 12 + 5 \times 9 = 141$. 而 K_{18} 有 153 条边,故 $f(18) > \frac{2}{3} \times 18 + 1$.

当 $n = 21$ 时,设 K_{21} 有一个满足 5 色 K_4 条件的 15 边着色,按引理 3(1),对于 K_{21} 的 21 个顶点相应的共有 21 个 2 瓣正规花形图 $F_1, F_2, \cdots, F_{21}$,且每一个的外边都具相同的颜色. 由于是 15 边色的,再结合引理 3(2),则有下列 7 种情形发生:① 有两组 2 瓣正规花形图,每组有 4 个 2 瓣正规花形图,并且每组的外边都具相同的颜色,此时还剩下 13 种颜色,此种类型记为(4,4,13)型. ② 有一组 2 瓣正规花形图,该组有 4 个 2 瓣正规花形图,其外边都具相同的颜色,另有一组 2 瓣正规花形图,该组有 3 个 2 瓣正规花形

图,它们的外边也具相同的颜色,同时有1对2瓣正规花形图,外边同样具相同的颜色,此时还剩下12种颜色,此种类型记为(4,3,2,12)型. ③有一组2瓣正规花形图,该组有4个2瓣正规花形图,它们的外边都具相同的颜色,同时有3对2瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下11种颜色,此种类型记为(4,2,2,2,11)型. ④有三组2瓣正规花形图,每组有3个2瓣正规花形图,并且每组的外边都具相同的颜色,此时还剩下12种颜色,此种类型记为(3,3,3,12)型. ⑤有两组2瓣正规花形图,每组有3个2瓣正规花形图,并且它们的外边都具相同的颜色,同时有两对2瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下11种颜色,此种类型记为(3,3,2,2,11)型. ⑥有一组2瓣正规花形图,该组有3个2瓣正规花形图,它们的外边都具相同的颜色,同时有4对2瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下10种颜色,此种类型记为(3,2,2,2,2,10)型. ,⑦至少有6对2瓣正规花形图,使每一对的外边都具相同的颜色,此时还剩下9种颜色,此种类型记为(2,2,2,2,2,2,9)型. 采用同样的方法计算可得下述结果,在情形①中,K_{21}最多可着色边数为$13\times14+2\times8=198$. 情形②中,K_{21}最多可着色边数为$12\times14+1\times11+1\times10+1\times8=197$. 情形③中,$K_{21}$最多可着色边数为$11\times14+3\times11+1\times8=195$. 情形④中,$K_{21}$最多可着色边数为$12\times14+3\times10=198$. 情形⑤中,$K_{21}$最多可着色边数为$11\times14+2\times11+2\times10=196$. 情形⑥中,$K_{21}$最多可着色边数为$10\times14+4\times11+1\times10=194$. 情形⑦中,K21最多可着色边数为$9\times14+6\times11=192$. 而$K_{21}$有210条边,故$f(21)>\frac{2}{3}\times21+1$. □

由命题1和命题2即可得到下面的定理2.

定理2 $f(n)>\frac{2}{3}n+1$, $(n\geqslant7)$.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. The Macmillan Press, 1976.

[2] Erdös P. Some old and new problems in various branches of combinatorics[J]. Discrete Math, 1997, 165/166:227-231.

The Edge Coloring of the Complete Graph Satisfying the Five-Color K_4 Condition

TANG Ming-yuan

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let K_n be a complete graph with n vertices , $f(n)$ the smallest positive integer satisfying the following condition: For any positive integer $m\geqslant f(n)$, there is an m-edge coloring of K_n, such that every K_4 in K_n gets at least 5 colors . Erdös and Gyárfás gave the upper-lower bound of $f(n)$: $\frac{2}{3}n<f(n)<n$; and proved $f(9)=8$. In this paper , we prove $f(10)=9$, and improve the lower bound of $f(n)$: $f(n)>\frac{2}{3}n+1$.

Key words: flower graph; normal flower graph; five-color K_4 condition