

环形加速器中的一种消色散方法

方 守 贤

(中国科学院高能物理研究所, 北京)

本文对环形加速器聚焦结构中插入消色散区的机制从理论上作了较全面的探讨, 从而指出了一套特别适合于中小型环形加速器采用的消色散办法。根据文中给出的方法, 大大缩小计算机的搜索范围, 找出所需之解。此法已被成功地用于北京正负电子对撞机及西欧新反质子储存环的设计。

关键词 消色散, 包络函数, 色散函数。

一、问题的提出

在对撞机储存环、反质子积累环以及一些同步辐射装置等环形加速器中, 经常为了达到某种特殊目的, 如粒子的对撞、冷却、注入等而要求其环形的某些部分的色散函数值等于零, 即达到所谓消色散。文献^[1,2]中介绍了典型的消色散方法, 其中一种最简单的办法是当该加速器正规单元的自由振荡相移 $\mu=60^\circ$ 时, 只要抽掉两个相邻正规单元中前一个单元的两块偏转磁铁, 则在其出口处的色散函数就自然等于零。然而, 一个加速器的自由振荡相移 μ 取决于很多因素, 往往不能严格等于 60° , 这就必需按照文献^[1,2]中指出的采用不同强度的偏转磁铁来达到, 从而使偏转磁铁的制造复杂化或者使控制复杂化, 这是实际所不希望的。文献[3]曾指出, 当 $\mu \neq 60^\circ$ 时, 只要适当地调整上述两个抽掉偏转磁铁处的直线节长度, 也可十分简单地达到消色散的目的。但是对于小加速器, 如 BEPC 及 CERN 的 AC* 等来说, 即使不必要地略去过多的偏转磁铁也是不希望的, 而且对于何处抽偏转磁铁为合适也有一定的要求, 因此在设计加速器时, 往往不得不寻求另外较为复杂的消色散办法, 例如, 除了略掉必要的偏转磁铁外, 尚需增加额外的电源来调节消色散区附近的聚焦磁铁参数, 以达到消色散。一般地说, 为了使包络函数及色散函数均不因消色散而失去匹配, 必须要六个调节变量, 这不但增加投资, 也给机器建成后的运行带来了不方便, 所以, 人们自然会问, 是否存在其它的消色散方法?

本文从理论上对消色散的机制作了探讨, 从而指出了另一类消色散的办法。由于所采用的方法图象清晰, 可以大大缩小计算机的搜索范围, 找到所需的解, 在 AC 及 BEPC 的设计过程中已得到了证实。

二、色散函数的转移矩阵

在加速器环上任何两点 s_0, s_1 之间的有关色散函数的转移矩阵 $M(s_0/s_1)$ 可写成:

* BEPC 指北京正负电子对撞机; AC 指反质子收集器。

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}}(C + \alpha_0 S) & \sqrt{\beta_0 \beta_1} S & -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}}(C + \alpha_0 S)D_0 - \sqrt{\beta_0 \beta_1} S D'_0 + D_1 \\ -\frac{1 + \alpha_0 \alpha_1}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} S - \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} C & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}}(C - \alpha_1 S) \left(\frac{1 + \alpha_0 \alpha_1}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} S + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\sqrt{\beta_0 \beta_1}} C \right) & D_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

在此， D, D' 为包络函数及其导数；“.”表示对弧长 s 的微分，即 $\frac{d}{ds}$ ； β 为包络函数， $\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$ ；下标 0、1 分别表示在 s_0, s_1 所相应之值；而 $C = \cos \Delta\psi, S = \sin \Delta\psi$ 和 $\Delta\psi = \psi(s_1) - \psi(s_0)$ 为自由振荡从 $s_0 \rightarrow s_1$ 时发生之相移。

如果环是由一系列相同的聚焦单元组成，即所谓均匀结构，而 s_0 到 s_1 恰为一周期，则 (1) 式变为文献 [2] 中的 (1) 式。

为讨论方便起见，我们引入“规一化”坐标 ξ 及 $\dot{\xi}$ ，它与粒子的坐标 x, x' 有如下的关系：

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\beta}}, \quad (2a)$$

$$\dot{\xi} = Q \left[\sqrt{\beta} x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} x \right], \quad (2b)$$

在此“.”表示 $\frac{d}{d\phi}$ ； $\phi = \frac{1}{Q} \int \frac{ds}{\beta}$ ； Q 为自由振荡在一圈内的振荡次数。

在 $\xi, \dot{\xi}$ 空间，转移矩阵 (1) 变为：

$$\begin{bmatrix} C & \frac{1}{Q} S & -C D_{\xi,0} - \frac{1}{Q} S \dot{D}_{\xi,0} + D_{\xi,1} \\ -Q S & C & Q S D_{\xi,0} - C \dot{D}_{\xi,0} + D_{\xi,1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

在此， $D_{\xi} = \frac{D}{\sqrt{\beta}}, \dot{D}_{\xi} = Q \left[\sqrt{\beta} D'_{\xi} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} D_{\xi} \right]$ (4)

引入色散矢量 $\vec{D}_{\xi} = (D_{\xi}, \dot{D}_{\xi})$ ，由上式显而易见，如果入口处的色散矢量为 $\vec{D}_{\xi,0}$ ，则转移到 s_1 点为 $\vec{D}_{\xi,1}$ ，通常称这种情况为匹配，但如果入口处为另一值 $\vec{D}_{\xi,in}$ ，则在 s_1 点之色散矢量 $\vec{\xi}$ 将由下式决定：

$$(\xi - D_{\xi,1}) = C(D_{\xi,in} - D_{\xi,0}) + \frac{S}{Q}(\dot{D}_{\xi,in} - \dot{D}_{\xi,0}), \quad (5a)$$

$$(\dot{\xi} - \dot{D}_{\xi,1}) = QS(D_{\xi,in} - D_{\xi,0}) + C(\dot{D}_{\xi,in} - \dot{D}_{\xi,0}), \quad (5b)$$

由(5)式可知:

$$(\xi - D_{\xi,1})^2 + \frac{1}{Q^2}(\dot{\xi} - \dot{D}_{\xi,1})^2 = (D_{\xi,in} - D_{\xi,0})^2 + \frac{1}{Q^2}(\dot{D}_{\xi,in} - \dot{D}_{\xi,0})^2, \quad (6)$$

(5), (6) 两式在 $\xi - \dot{\xi}$ 相平面中, 给出了一个清晰的图象, 由图 1 可知, 在 s_1 处的色散值, 可以容易地用作图法求得, 即以 $D_{\xi,1}, \dot{D}_{\xi,1}$ 为圆心, 以 $|\vec{D}_{\xi,in} - \vec{D}_{\xi,0}|$ 为半径, 并以 $\vec{D}_{\xi,in} - \vec{D}_{\xi,0}$ 为起始方向旋转 $\Delta\psi$ 角即得。

如果 s_0, s_1 两点之间恰好为一个周期, 则 $\vec{D}_{\xi,0} = \vec{D}_{\xi,1}$, 图 1 中 1 点与 0 点相重, $\vec{\xi}$ 可直接由 $\vec{D}_{\xi,in} = \vec{D}_{\xi,0}$ 旋转 $\Delta\psi = \mu$ 得到。在此 μ 为正规单元 (即一周) 的相移。下面分三种情况论述。

1. 当正规单元的相移恰为 2π 之分数倍时的色散情况

对于均匀聚焦结构, 色散函数保持严格的周期性, 此时如果沿环仅观察每一聚焦单元中某一相对应点上的色散函数, 则发现在 $\xi - \dot{\xi}$ 平面上为一不变的点。如果单研究该点的变化规律, 将会使讨论简化。

今以“FCDO”型的正规聚焦单元 (即具有 $\frac{F}{2} \text{ OBO } \frac{D}{2} \frac{D}{2} \text{ OBO } \frac{F}{2}$ 的形式, 此处 F、D、B 分别表示聚焦、散焦、偏转磁铁, O 表示直线节) 为例, 并选定 F 中心为观察点, 此时色散矢量为 $\vec{D}_{\xi,F} = (D_{\xi,F}, 0)$, 今设想在均匀聚焦结构中, 在正规单元间插入一没有 B 铁但聚焦参数相同的“缺 B 单元” ($\frac{F}{2}, \text{O}, \frac{D}{2} \frac{D}{2}, \text{O}, \frac{F}{2}$), 则整个环在 F 中心点的色散函数将不再保持常数, 而受到调制。今研究能否在该缺 B 单元中达到消色散及其所需的条件。

为讨论方便起见, 先设在该缺 B 单元中已得到消色散, 故在该单元出口的 F 中心 $\vec{D} \equiv 0$, 即处于 $\xi - \dot{\xi}$ 图中的原点。根据上节可知, 经过一个正规单元后, 色散矢量的端点将位于以 $D_{F,\xi}$ 为半径, 以 $(D_{F,\xi}, 0)$ 为原点, 旋转 μ 角的圆周上 (即图 2 的点 1 上)。显

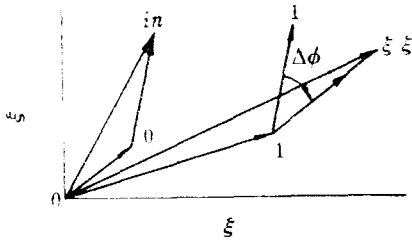


图 1 $\xi - \dot{\xi}$ 相平面

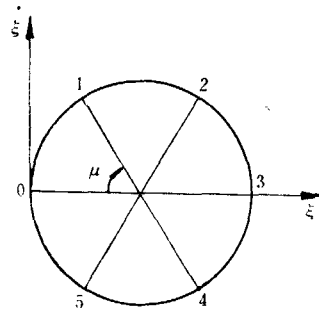


图 2 μ 为 2π 之分数倍时的 $\xi - \dot{\xi}$ 相平面

然, 以后每增加一周, 矢量的端点也就沿圆周增加一 μ 角。如果正规单元的相移满足 $m\mu = 360^\circ$ (m 为正整数) 则经过 m 周期后, 色散矢量将恢复到零。如果沿加速器环形一周, 回到上缺 B 单元前所有正规单元所产生的总相移恰恰等于 $n m \mu = n 360^\circ$ (n 也为任意正整数), 那么在缺 B 单元中确实可以得到消色散。显而易见, 凡是在那些 $m \cdot \mu = 360^\circ$ 的正规单元端点, 插入任意个缺 B 单元, 则均可在该区中达到消色散的目的。

这种消色散法，只要在设计时，适当选择正规单元的相移，使之等于 2π 的分数倍。它不需要增加任何调节参数，也不需引入不同强度的 B 铁。但也有一定的缺点：第一，正规单元的相移不容易做到恰巧等于 2π 的分数倍；第二，由于失匹，色散函数受到调制，其最大值由图 2 可知为 $2D_{\xi,r}$ ，即比原来的大一倍；第三，抽 B 铁的方式受到一定的限制，不能满足多方面的要求，所以要设法进一步改进。

2. 正规单元的相移不等于 2π 的分数倍时的消色散方法

我们知道，在环形加速器的聚焦结构中，如果某一聚焦磁铁的聚焦参量 K 改变一小量 ΔK 时，相应的包络函数及色散函数将受到调制，调制量 $\frac{\Delta\beta}{\beta}$ 及 ΔD_{ξ} 应满足如下的方程：

$$\Delta \dot{D}_{\xi} + Q^2 \Delta D_{\xi} = -\Delta K Q^2 \beta_0^2 D_{\xi,0}, \tag{6 a}$$

$$\left(\frac{\Delta \dot{\beta}}{\beta}\right) + 4Q^2 \left(\frac{\Delta \beta}{\beta_0}\right) = -2 \Delta K Q^2 \beta_0^2, \tag{6 b}$$

在此 $\Delta\beta = \beta(\phi) - \beta_0(\phi)$ ， $\Delta D_{\xi} = D_{\xi}(\phi) - D_{\xi,0}(\phi)$ ， $\beta_0(\phi)$ 及 $D_{\xi,0}(\phi)$ 分别相应于无扰动时的包络函数及色散函数。通常一块聚焦磁铁的 ΔK 可以由 $-\delta(\phi - \phi_0)$ 函数来描述，即会引起 \dot{D}_{ξ} 及 $\dot{\beta}$ 的跳变。利用这种跳变，可以容易地改变 \vec{D}_{ξ} 矢量在相图中的位置，从而使 \vec{D}_{ξ} 在经过一定数目的正规单元后又回复到原点，这可以从图 3 清楚地看到。设经过 m_1 个正规单元后， \vec{D}_{ξ} 的端点离原点尚有一 θ_1 角 ($\theta_1 < \mu$)，如果在离起点 l 个正规单元的聚焦磁铁中引入 ΔK ， \vec{D}_{ξ} 将由 A 跳至 A' 。根据上述可知，在以后相继的周期中， \vec{D}_{ξ} 的端点将沿着一半径稍大一点的但仍以 $(D_{\xi,r}, 0)$ 为圆心的圆周运动；如果在对称的地方，即在第 $m_1 - l$ 个正规单元的聚焦铁中也引入一符号相同的 ΔK ，那么 \vec{D}_{ξ} 又由 B' 跳至原来圆上的一点 B 上。由图可见， \vec{D}_{ξ} 的跳跃同时也伴随着角度的改变，适当地选择 ΔK ，可使此角度的改变刚好补偿 θ_1 的不足，那么经过 m_1 周期后 D_{ξ} 又回到原点。由上可见，只要多添一个变量 ΔK 就可以成功地得到消色散。由 (6 a) 可知， $\Delta \dot{D}_{\xi} \propto \beta D_{\xi,0}$ ，所以利用水平方向聚焦的磁铁产生 ΔK 更为有效。

值得指出， ΔK 的引入会同时引起 $\Delta\beta$ 的调制(见 (6 b) 式)，而且会引起 ΔQ 的改变，所以在必要时，尚需在消色散区中，在特殊的相位上引入另一 $\Delta K'$ ，以抵消 ΔQ 及部份补偿 $\Delta\beta$ 。

下面将介绍两种比较有效的技巧：

(1) 当正规单元的 μ 在 90° 附近时 为了便于了解，先研究一系统，其 μ 恰巧等于 90° ，而且在 $2n\pi$ 外存在着消色散区(见图 4)，今在相隔 $(2n-1)\pi$ 的 A 及 A' 点上，引入两个

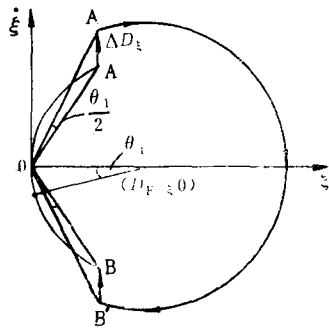


图 3 μ 不等于 2π 之分数倍的 $\xi\eta$ 相平面

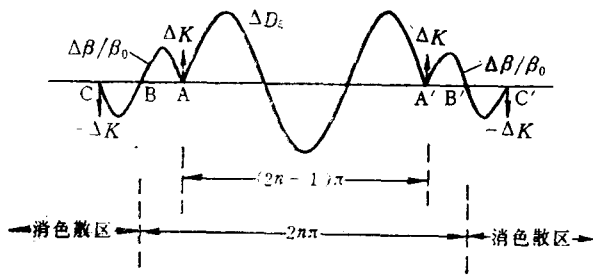


图 4 正规单元的 μ 在 90° 附近时的图形

正 ΔK ，而在距A及A'为 π 处的C及C'上引入两个负 ΔK ，那么所产生的 ΔD_ξ 将只出现在AA'区中，其它地方为零，而所引起的 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 将只出现在AC及A'C'区域中，其它地方为零。这是由于C及C'已处于消色散区域中，该处的 $D_{\xi 0} \equiv 0$ ，因此根据(6a)式，将不会对 D_ξ 产生扰动，而它对于 β 的扰动，将为A及A'的 ΔK 完全相抵消。这一点也可以利用 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 及 ΔD_ξ 的相图5来说明。

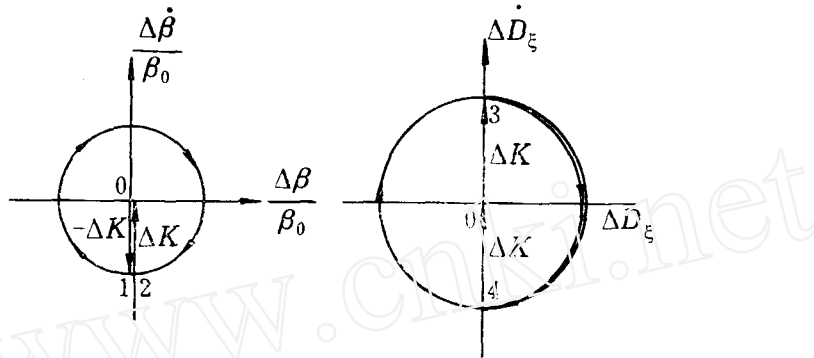


图5 $\mu = 90^\circ$ 时 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 和 ΔD_ξ 之相图

由图4可见， β 函数在C点受到一负 ΔK 的作用，则 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 由原点向下跳到1点(见图5)，由于 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 的振荡频率为自由振荡的两倍，所以经过相移 π ， $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 却旋转了 2π 到达2点，此时又受到一正 ΔK 的作用， $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 向上跳回原点，对于 ΔD_ξ 函数，在A点受到一正 ΔK 的作用， ΔD_ξ 由原点向上跳到3点，它以相同于自由振荡的频率作振荡，旋转 $(2n-1)\pi$ 后到达4点，此时又受到一正 ΔK 的作用，向上跳回原点。

现在再来研究当 μ 逐渐偏离 90° 的情况，由于 $m\mu \neq 360^\circ$ ， \vec{D}_ξ 就不可能恰巧回到原点，因此缺B单元中也剩余着一定的色散量。与此同时，也找不到严格相距 $(2n-1)\pi$ 的A、A'点，因此采用上述技巧所引起的 ΔD_ξ 也不能被限于AA'区域内，必然会延伸到缺B单元中去，但正是由于这一点，可以被用来抵消缺B单元中的剩余色散，使之为零。一般说来，这时一个 ΔK 并不能同时使两端的缺B单元达到消色散，故在A及A'上要用不同的 ΔK 值。

(2) 当正规单元的 μ 在 60° 附近时 同样对于正规单元的 μ 严格等于 60° 来说，只要按照图6中的安排，即利用三个相同的 ΔK ，相邻之间的相移为 120° ，那么就可以使 $\frac{\Delta\beta}{\beta_0}$ 及 ΔD_ξ 的调制集中在 240° 的区域内，在该区域外面为零。图7给出了它的相图描述。显然， ΔK 之间的相移为 $n \cdot 360^\circ + 120^\circ$ 也是可以的。

当 μ 偏离 60° 时，如同前述，可以利用此三个 ΔK 来使两端的缺B单元中达到消色散，不过通常要用两个不同的 ΔK 值。

3. 任意抽B铁情况下的消色散

有时候为了满足注入、引出或安装一些特殊的元件如扭摆磁铁等，要求按照一定的形式来抽掉正规单元中的B铁，所以必须研究在这种情况下，能否达到消色散。

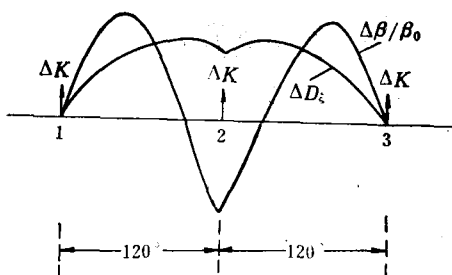


图 6 正规单元的 μ 在 60° 附近时的图形

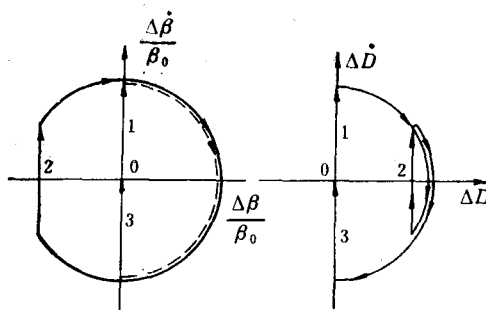


图 7 $\mu=60^\circ$ 时的相图

为此，我们来研究一下，一个端点由原点出发的 \vec{D}_i 矢量，经过一定的正规单元到达 1 点时(即 \vec{D}_1)，见图 8，突然遇到一个缺 B 单元的情况，根据(6) 式，在缺 B 单元出口，该矢量将位于以 $|\vec{D}_1|$ 为半径，以原点为圆心，旋转 μ 角后的点 2 上(即 \vec{D}_2)。如果以后又进入正规单元，那么该矢量的端点将沿一以 $|\vec{D}_2|$ 为半径， $(D_{xi}, 0)$ 为原点的小圆上运动，显然，如果不采取其它措施，当该矢量回到 ξ 轴时，将会远离原点，为此，可在接近对称的地方(如图 8 中点 3)，在某一正规单元之后再插入一缺 B 单元，从而使矢量在再经过一定的正规单元后，到达离原点不远的 5 点，在这基础上，再采用前面所介绍的技巧，引入适当的 ΔK ，即可达到消色散。

值得指出，如果在两个 μ 严格等于 60° 的正规单元之间，插入两个 $\mu=60^\circ$ 的缺 B 磁铁，那么在上述两块正规单元端点的色散函数自然为零。图 9 表示了这一机制。图中，OB 及 OB' 表示两正规单元的作用，BA 及 AB' 表示两缺 B 单元的作用。显然，如果在上述两块缺 B 单元间，再插入任意个正规单元，也不会影响上述系统两端的消色散，这就是文献[1] 中介绍的消色散办法。

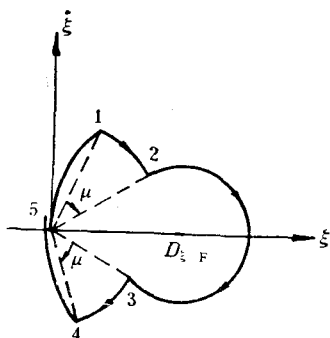


图 8 任意抽 B 铁情况下消色散图形

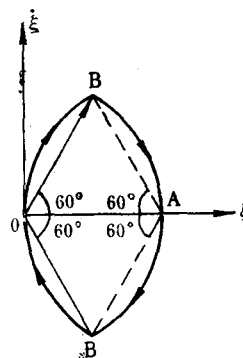


图 9 $\mu=60^\circ$ 缺 B 铁时消色散图形*

如果在图 8 中，到达 1 点后，遇到的不是上述抽掉两块 B 铁的缺 B 单元，而是只抽掉前半单元的一块 B 铁，这也是实际设计中经常遇到的一种情况，此时，在前半单元的出口处(即 D 铁中心)，矢量将位于 $\frac{\mu}{2}$ 的 2' 上(\vec{D}'_2)，而不是 2 上(见图 8)。在后半单元的出口，严格地说，矢量的位置应由图 1 所示的方法确定，但对于 FODO 系统的规一化坐标中，D 铁中心及 F 铁中心的 D_x 值近似相近($\mu \approx 60^\circ$ 时，两者相差 $<1\%$)，因此为讨论方便起见，可

(下转第 649 页)

* 校后注：图下部的 B 应为 B'

平面上的增长为 17.9 mm mrad。与均匀偏磁方案相比,发射度在 $(x, dx/dz)$ 平面略有增长。这是由于非均匀偏磁 H_x 对粒子在 x 方向扰动的结果。在 $(y, dy/dz)$ 平面上发射度反而有所下降,这说明非均匀偏磁对 y 方向的偏转略有补偿作用。

五、讨 论

上文表明,复合作用注入系统可以有效地将带电粒子的相位,在注入直线加速器之前,加以选择和压缩,从而改进加速器的能谱。虽然由于横向偏转,注入处粒子束的发射度会有所增长,但在后面加速管中与聚焦系统作用导致的发射度增长却将减少。如果对加速粒子束的能谱和发射度同时有较高的要求,则可在加速器入口处再用一共轭切割器(如图 1 中虚线所示),将粒子的横向动量抵消。这样的系统仍较切割器——群聚器——共轭切割器系统简单。文中提出的非均匀偏磁方案,可以显著地改进束流通过率,降低对电子枪流强的要求。

参 考 文 献

- [1] Fewell, N. et al., Proton Linac Conf., 54(1972).
- [2] Allison, P. W. et al., IEEE NS-18, 126 (1971).
- [3] Haimson, J., IEEE NS-9, 32 (1962).
- [4] Azam, G et al., IEEE NS-16, 304 (1969).
- [5] Ocmboxuse, E. K, П. Т. З., 22, 4 (1968).
- [6] 谢家麟,复合作用注入系统,中国科学院高能物理所报告,1975年。

(上接第 655 页)

以认为 $D_{t,r} = D_{t,d}$, 这样,在后半单元的出口,色散矢量的端点将位于一以 $(D_{t,r}, 0)$ 为圆心、以 $D_{t,r}$ 为半径旋转 $\mu/2$ 的点上。以后的讨论将与上面相类似,不再重复。

总之,利用上述方法,在计算机的配合下,不难求得 $m\mu \approx 360^\circ$ 时,特殊抽 B 铁方式下的两端为消色散的系统,这一点已在 AC 及 BEPC 的设计过程中充分得到证实。

本工作的一些思想,是作者在 CERN 工作设计 AC 中逐步形成的,曾经得到 W. Hardt, A. Hutton 及 E. J. N. Wilson 博士的帮助及有益的讨论,特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] Keil, E., CERN 77-13 (1977).
- [2] Delahaye, J. P., CERN PS/AA, long Term Note No. 26, 1982.
- [3] Fang, S. X., CERN PS/AA/Note, 83-1, 1983.