弱总体维数为1的局部环

喻志德

提　要　讨论了具有弱总体维数为1的局部环的一些性质,并证明了一类环是弱总体维数为1的局部环.

关键词　局部环;弱投射模;弱总体维数
中图法分类号　O153.3

0　引　言

众所周知,一个交换 Noether 环的正则性可以通过投射分解刻划. Serre J P 证明了一个局部环 (A,m) 是正则的充要条件为 A/m 具有有限投射维数. 正则局部环具有很好的性质,在代数几何中对应于某个点处的光滑性,因此对正则局部环进行合适地推广是十分有意义的.

在文[1]中,作者引进了弱投射模等概念,定义了弱总体维数,证明了具有有限弱总体维数的局部 Noether 环具有孤立奇点,下面回顾一下文[1]中的一些概念.

设 (A,m) 是正则局部环,P 是一个 A- 模,k 是正整数,称 P 是 k- 投射模,如果任给满同态 $g:M\to N$,任给 $x\in m^k$,以及同态 $f:P\to N$ 均存在同态映射 $f':M\to N$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "xf"] \\
M & N \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

这里 M,N 均为 A- 模.

设 M 是 A- 模,如果存在正合序列

$$0\to P_S\to F_{S-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0, \tag{1}$$

其中 $F_0, F_1, \cdots, F_{S-1}$ 为自由 A- 模,P_S 为 k- 投射模,则称 M 具有有限 k- 投射分解. 若 M 具有有限的 k- 投射分解,用 $pd_k(M)$ 表示(1)中最小的 S,称之为 M 的 k- 投射维数. 若 M 没有

收稿日期: 1998-03-30
作者喻志德,男,讲师,上海师范大学数学科学学院,上海,200234

(1) 中的分解,则记为 $pd_k(M) = \infty$,下面定义弱总体维数.

定义 设 (A, m) 是局部环,称

$$wD_k(A) = \{pd_k(M) \mid M \text{ 是有限生成 } A\text{-模}\}$$

为 A 的 k- 弱总体维数.

在文[1]中,作者刻划了 $wD_1(A)=0$ 的局部环 A,对 $wD_1(A)<\infty$ 有大量的问题值得进一步研究,本文将讨论 $wD_1(A)=1$ 的一些基本性质,并给出 $wD_1(A)=1$ 的一类局部环,重要结果为:

定理 设(A,m)是一维的局部环,且 $m^2=(x^2)$对某个 $x\in m$,则 $wD_1(A)=1$.

1 $wD_1(A)=1$ 的基本性质

这一节讨论 $wD_1(A)=1$ 的情形,因此对于任何自由模,均为弱投射模.

引理 若 $wD_1(A)=1$,$c\in A$ 是幂零元,则有 $c^3=0$.

证明 先证若 $c^n=0$,且 $n>3$,则 $c^{n-1}=0$. 用归纳法由 $c^n=0$,考虑交换图

$$\begin{tikzcd} & Ac^{n-2} \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "c"] \\ A & Ac^{n-2} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

使得 $f(c^{n-2})=c'$,显然 $c'c^2=0$. 因此 $c^{n-1}=c'c^{n-2}$,由 $n-2\geqslant 2$,知 $c^{n-1}=0$,由归纳法知道 $c^3=0$. □

命题 若 $wD_1(A)=1$,则$(0:m^2)=(0:m^3)$.

证明 由 $wD_1(A)=1$,知 $\dim A\leqslant 1$,因此$(0:m^n)$中的元素均由幂零元素组成,由此只需证明对于任意幂零元 c,有 $m^2c=0$ 即可.

先考虑交换图

$$\begin{tikzcd} & Ac^2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "x_1"] \\ A & Ac^2 \arrow[l, "c^2"] \end{tikzcd}$$

这里 x_1 是任意取定的 m 中元素,c 是任意幂零元,使 $f(c^2)=c'$,由 2.1 知 $cc'=0$,由交换图易知 $x_1c^2=0$.

对于任给 $x_1, x_2\in m$,以及任意幂零元 c,再考虑交换图

$$\begin{tikzcd} & Ax_1c \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "x_2"] \\ A & Ax_1c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

使得 $g(x_1c)=c''$，由前面一步得知 $x_1cc''=0$．因而交换图给出了 $x_1x_2c=0$．

因此 $(0:m^2)=(0:m^3)$．　□

推论　若 $wD_1(A)=1$ 且 $\dim A=1$，则 A 是 cM 的充要条件为 A 不含幂零元．

证明　若 A 是 cM 的，任给参数元 x，$\because (0:x^2)>\mathrm{nil}A$（由 2.2 的证明），$\therefore \mathrm{nil}A=0$．反之，$(0:x)<(0:m^2)<\mathrm{nil}A$．由此得 $(0:x)=0$．　□

定理　若 $wD_1(A)=\mathrm{depth}A=1$，则 A 的任何两个极小素因子之和为极大理想 m．

证明　由推论，A 是约化的环．设其极小素因子为 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n\geqslant 2)$，令 $x_1\in P_1\backslash P_2\cup\cdots\cup P_n$，对任意 $x\in m\backslash P_1$，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
 & Ax_1 \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "x"] \\
A & Ax_1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

这里 $g(x_1)=c_1$，从而有 $(x-c_1)x_1=0$，$(x-c_1)c_1=0$，因而 $x-c_1\in P_2\cap\cdots\cap P_n$．若 $x-c_1\in P_1$，则有 $x-c_1=0$．取 $x_i\in P_i\backslash P_1\cup\cdots\cup\hat{P}_i\cup\cdots\cup P_n$．由于 $x_1x_2\cdots x_n=0$，有

$$cx_2\cdots x_n=0\Rightarrow c_1\in P_1,$$

矛盾．因而总有 $x-c_1\notin P_1$，而 $c_1\in P_1$．从而 $x\in P_1+P_2\cap\cdots\cap P_n$，特别 $x\in P_1+P_2$，由 x 的任意选取性有 $m=P_1+P_2$．　□

猜测　设 (A,m) 是局部环，且 $\dim A=1$，若 $wD_1(A)=1$，则 A 是正则局部环．

2　主要结果

下面给出一类维数为 1 的环 A，使得 $wD_1(A)=1$．

引理　若 A 满足 $m^2=(x^2)$，$\dim A=1$，则 A 是 Buchsbaum 环．

证明　先证 $(0:x)=(0:x^2)$．对 $\forall\, c\in(0:x^2)$，若 $xc\neq 0$，则由 $m^2=(x^2)$，有 $xc=x^2a_1$，显然 $a_1\in m$，否则 $x^3=0$ 与 $\dim A=1$ 矛盾．

如此下去有 $a_i\in m$，使得

$$xc=x^2a_1=x^3a_2=\cdots\in m^n,\ n\geqslant 0,$$

因而 $xc\bigcap\limits_{n\geqslant 0}m^n$，所以 $xc=0$．

另一方面证明 $(0:m)=(0:x)$．$\forall\, c\in(0:x)$，且 $\forall\, x'\in m$．因而 $x'c=x^2a$，$a\in m$．故而 $xx'c=x^3a=0$，由第一步知 $a\in(0:x)$，进而 $x'c=0$．即

$$(0:x)=(0:m)=(0:m^2).$$

因而 A 是 Buchshaum 环，且 $m=(x)+(0:m)$．

引理　若 (A,m) 满足 $m^2=(x^2)$，$\dim A=1$，则对 A^s 的任意子模 $N\subseteq mA^s$，$mN\neq 0$，考虑它的投射复盖

$$0\to N'\to A^n\to N\to 0,$$

有 $N'\cong m\oplus m\oplus\cdots\oplus m\oplus(0:m)\oplus\cdots\oplus(0:m)$．

证明 令 $e_1,\cdots,e_n;e'_1,\cdots,e'_s$ 分别为 A^n,A^s 的标准基，首先由 $(0:m)\cap Ax_1=0$，每一个 m 中的元素均可唯一表示成 ax^k+c 的形式，这里 $a=0$ 或 $a\notin m,c\in(0:m)$. 选取 N 的极小生成子

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{s}(a_{ij}x^{n_{ij}}+c_{ij})e'_j(i=1,2,\cdots,n)$$

这里 $a_{ij}=0$ 或 $a_{ij}\notin m,c_{ij}\in(0:m)$，使得 $a_{ij}\notin m$ 出现的个数为极小(这个极小值显然非零，因为 $mN\neq0$)，且前 k 个 β_i 中的 a_{ij} 均为 0，后 $n-k$ 个 β_i 中至少有一个 a_{ij} 不为零，考虑同态

$$\varphi:A^n\to N,\varphi:e_i\to\beta_i(1\leqslant i\leqslant n).$$

因为 A^n 是 N 的投射复盖，知 $N'\subseteq mA^n$. 如果 $\sum_{i=1}^{n}(a_ix^{n_i}+c_i)e_i\in N'$，可以断定当 $i>k$ 时，$a_i=0$ (这里 $a_i=0$ 或 $a_i\notin m$). 若不然存在 $i_0>k,a_{i_0}\neq0$，取所有使 $a_i\neq0$ $(i>k)$ 中的一个 i 使得 n_i 最小，不妨设 n_{k+1}，$i_0=k+1$，这时 $\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n_i}\beta_i=0$，进而

$$a_{k+1}x^{n_{k+1}}(\bar{\beta}_{k+1}+\sum_{i=k+2}^{n}a_ix^{n_i-n_{k+1}}\bar{\beta}_i)=0,$$

这里 $\bar{\beta}_{k+1},\cdots,\bar{\beta}_n$ 表示 $\beta_{k+1},\cdots,\beta_n$ 中去掉 $(0:m)$ 中的那些项，由于 $(0:m)\cap Ax_1=0$，有

$$\bar{\beta}_{k+1}=-\sum_{i=k+2}^{n}a_ix^{n_i-n_{k+1}}\bar{\beta}_i,$$

故而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可以变成如下形式的生成子

$$\beta_1,\cdots,\beta_k,\beta'_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n.$$

这里

$$\beta'_{k+1}=(c_{k+1,1},\cdots,c_{k+1,s})+\sum_{\substack{i=k+2\\n_i=n_{k+1}}}^{n}a_i(c_{i1},\cdots,c_{is}),$$

它显然不含有 $a_{k+1,j}\neq0$，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可通过 $\beta_1,\cdots,\beta_k,\beta_{k+1},\beta'_{k+2},\cdots,\beta_n$ 表示出，这与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的选择矛盾.

对于前 k 个 a_i，显然任取均可，所以 N' 中的元素具有形式

$$\sum_{i=1}^{k}(a_ix^{n_i}+c_i)e_i+\sum_{i=k+1}^{k}c_ie_i,$$

即

$$N'\cong\underbrace{m\oplus m\oplus\cdots\oplus m}_{k}\oplus\underbrace{(0:m)\oplus\cdots\oplus(0:m)}_{n-k}.$$ □

定理 若 (A,m) 满足 $m^2=(x^2)$，$\dim A=1$，则 $wD_1(A)=1$.

证明 因为 $\dim A=1$，知 $wD_1(A)\geqslant1$，由文[1]中定理 5.6，只需证明对于任意有限生成 A-模有：$Tor_2^A(M,M')$ 满足

$$mTor_2^A(M,N)=0,$$

考虑 M 的投射复盖

$$0\to N\to A^s\to M\to0,$$

这里 $N\subseteq mA^s$，若 $mN=0$，则对任意 M' 有 $mTor_2^A(M,M')$，若 $mN\neq0$，考虑引理中的结果，知有短正合序列

$$0\to N'\to A^n\to N\to0,$$

其中 N' 具有形式

$$N \cong m \oplus \cdots \oplus m \oplus (0:m) \oplus \cdots \oplus (0:m),$$

因而

$$N' \cong A/m \oplus \cdots \oplus A/m \oplus A/(0:m) \oplus \cdots \oplus A/(0:m).$$

由于 $A/m, A/(0:m)$ 是弱投射模，故 $wD_1(A) \leqslant 1$，从而 $wD_1(A)=1$. □

存在定理中所考虑的环，例如任给维数为2的正则局部环，其极大理想为 (x_1, x_2). 令 A 为 $A=B/(x_2^2, x_1x_2)$，显然，B 满足定理的条件，且 B 不是 cM 环.

参 考 文 献

1 Zhou C. On weak resolutions. Communications in Algebra, 1996, 24(2): 659～676

2 Matsuura H. Commutative ring theory. Camb stud Adv Math 8, Cambridge: Cambridge Univ Press, 1986

3 Rotman J. An introduction to homological algebra. Pure Appl Math, New York: Academic Press, 1979

4 Strooker J R. Homological Questions in local Algebra. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1990

Local Rings with Weak Global Dimension One

Yu Zhide

(College of Mathematical Science)

Abstract Some properties of local rings with weak global dimension one are discussed and a class of rings are shown to be such local rings.

Key words local ring; weakly projective module; weak global dimension