第34卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol.34, No.2
2005年6月 Journal of Shanghai Normal University(Natural Sciences) 2005, Jun.

两个完全图 K_n 和 K_m 关于 K_r - 粘合的色等价类

龚和林

(上海师范大学 数理信息学院, 上海 200234)

摘　要: 设 G 的色多项式为 $P(G,\lambda)=\lambda^{k_0}(\lambda-1)^{k_1}\cdots(\lambda-m+1)^{k_{m-1}}(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$, 其中, $m\leqslant n$, 且 $k_i=1$ 或 2 ($i=0,1,\cdots,m-1$), 且 $k_0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{m-1}$. 本文给出了几类由上述形式色多项式决定的广义树,并证明了 $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 是一个完全类当且仅当 $r=m-1$ 或 m.

关键词: 色多项式; 色唯一; 广义树; 完全类
中图分类号: O157　**文献标识码**: A　**文章编号**: 1000-5137(2005)02-0033-04

本文所涉及的图均为有限无向简单图, $v(G)$, $\varepsilon(G)$, $\omega(G)$, $\chi(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集、团数和色数. $N(u)$ 表示 u 在 G 中邻点集的导出子图, $G\cup H$ 表示 G 和 H 的并图, $G[S]$ 表示由顶点子集 S 导出的 G 的子图, $P(G,\lambda)$ 表示 G 的色多项式, 简记作 $P(G)$. 若 H 满足 $P(H)=P(G)$, 称 H 与 G 色等价. 如果由 $P(H)=P(G)$ 可推得 $H\cong G$, 则称 G 是色唯一的. 其它未见解释术语和概念见参考文献 [1],[2]. 设 C 是 G 的一个圈, $|v(C)|\geqslant 4$, 若 $G[v(C)]=C$, 称 C 是一个无弦圈. 若 G 没有无弦圈, 则称 G 是一个弦图. 设 $G_1=K_1$ 是一阶广义树, 对 $n\geqslant 2$, 设 $|v(G)|=n$, 归纳地定义 n 阶广义树, 若存在 $v\in v(G)$, 使 $G[N(v)]=K_q\subset G-v$, 并且 $G-v$ 是广义树, 则称 G 是 n 阶广义树, 简记为 G_n. 由[3] 广义树即连通弦图. 唐明元在 [4]中给出了广义树的色多项式, 并证明了有与广义树色等价的非广义树存在;下面引进色等价类和完全类的概念 [5], 设 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}=\{\{G_0, G_1,\cdots, G_p\}, \{K_{i_1}, K_{i_2},\cdots, K_{i_p}\}\}$, 则 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 表示由 $\{G_0, G_1,\cdots, G_p\}$ 用 $\{K_{i_1}, K_{i_2},\cdots, K_{i_p}\}$ 在不同位置以不同顺序粘合所得到的图的全体所成之集. 称 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 为由 $\mathscr{G}$和 $\mathscr{K}$所产生的色等价类. 显然,对任意的 $G\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$, $P(G)$ 是相同的. 若 H 与 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 中图色等价, 称 H 色等价于 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$. 若 H 色等价于 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$, 可得 $H\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$. 称 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 是一个完全类. Xu 在[5]中首先提出完全类的概念,将色唯一性问题的研究推广到更一般的情形. Chao, Li 和 Xu 在[6]中证明了 q - 树是由它的色多项式所决定的, 即 $\{\{mK_{q+1}\}, \{(m-1)K_q\}\}$ 是一个完全类; 方影在[7]中给出了广义树和相应的色等价类是完全类的等价关系,并证明了存在非广义树色等价于 $\{\{K_n, K_{r+2}\}, \{K_r\}\}$ ($3\leqslant r<n-1$)本文将其结论推广,给出了一类由色多项式决定的广义树; 获得并证明了色等价类 $\{\{K_n,K_m\}, \{K_r\}\}$ ($0\leqslant r\leqslant m\leqslant n$) ($r=0$ 时, 定义 $\{\{K_n,K_m\}, \{K_r\}\}=\{K_n\cup K_m\}$) 是一个完全类当且仅当 $r=m-1$ 或 m.

1　预备知识

定理 A[1]　每个 k- 色图都有 k- 临界子图 K, 且满足 $|v(K)|\geqslant k$, $\delta(K)\geqslant k-1$.

定理 B[2]　若 $P(H^1)=P(H^2)$, 则 $\Delta(H^1)=\Delta(H^2)$. 其中 $\Delta(H^1)$ 和 $\Delta(H^2)$ 分别表示 H^1 和 H^2 中的三角形个数.

收稿日期: 2004-04-01

作者简介: 龚和林(1980 -), 男, 上海师范大学硕士研究生.

定理 C[4] 设 G 的色多项式为 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)(\lambda-i)^3(\lambda-i-1)\cdots(\lambda-n+1)$ $(1 < i < n-1)$. 那么，当 $i = 2$ 时，G 为广义树，其它情况均存在非广义树 H，且 $\omega(H) = n$，使 $P(H) = P(G)$.

定理 D[7] 设 G 的色多项式为 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i-1)(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)^2\cdots(\lambda-n+1)$ $(1 \leqslant i < n-1)$. 则:(1)当 $1 \leqslant i \leqslant 3$ 时，G 是广义树.(2)当 $3 < i < n-1$ 时，存在非广义树 H，且 $\omega(H) = n$，使 $P(H) = P(G)$.

引理 1[3] 设 H_1 和 H_1 是两个广义树，$r \leqslant \min\{\omega(H_1), \omega(H_2)\}$，则 H_1 和 H_1 的 K_r - 粘合也是广义树.

引理 2 设 G 是连通图,且 G 不是广义树,则 G 和 K_{i+1} 的 K_i - 粘合也不是广义树.

证明 设 H 是 G 和 K_{i+1} 的 K_i - 粘合，G 不是广义树，由定理 A 知，G 含无弦圈 $C|(v(C)| \geqslant 4)$. 令 $N = |v(C) \cap v(K_i)|$ 则 $N \leqslant 2$，否则，若 $N \geqslant 3$，因这 N 个点彼此邻接，这样 C 含三角形,即 C 含弦，矛盾. 又当 $N = 0,1$ 或 2 时,任意两点在 G 中的邻接关系在 G 和 K_{i+1} 的 K_i - 粘合后没有发生改变，所以 H 也含无弦圈 C,由广义树定义，H 不是广义树.

引理 3 设 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)\cdots(\lambda-n+1)$ $(1 < i < n-1)$，则 G 必定是 K_n 和某个 K_{i+1} 关于 K_i 的粘合.

证明 由条件可知，$|v(G)| = n+1$，因 $P(G, n-1) = 0$，所以 G 是 n 可着色的. 设 $V_1, V_2, \cdots V_n$ 为 G 的一个色分类. 则 $|V_i| \geqslant 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 又 $|v(G)| = n+1$，所以必存在 $(n-1)$ 个色类是单点集，设 $V_i = \{v_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，$V_n = \{v_n, v_{n-1}\}$. 则 $G[\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}] = K_{n-1}$，否则，将不相邻的两点并成一类,便得到 G 的一个 n - 1 的色分类，即 G 是(n - 1) - 可着色的，与 $P(G, n-1) = 0$ 矛盾. 另外，V_n 中至少一点与 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 都相邻，否则，设 v_n，v_{n+1} 与 v_i，v_j 不相邻,那么由 $\{v_n, v_i\}$，$\{v_{n+1}, v_j\}$ 各自去替换原有的色类 $\{v_i\}$，$\{v_j\}$，可构成 G 的一个 $(n-1)$ 的色分类，矛盾. 于是，不妨设 v_n 与 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 都相邻，则 $G[\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}] = K_n$，由于 $N(v_{n+1}) \subset G[\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}] = K_n$，因而，$G[N(v_{n+1})]$ 是一个完全图,不妨设为 K_s，进而可知 $N(v_{n+1}) + v_{n+1}$ 是具有 $s+1$ 个顶点的完全图 K_{s+1} 那么，G 是 K_n 和 K_{s+1} 的 K_s - 粘合，则 $P(G) = P(K_n)P(K_{s+1})/P(K_s) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(\lambda-s)$，则 $s = i$. 由上述推导，引理得证.

引理 4 设 G 的色多项式为 $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2(\lambda-4)\cdots(\lambda-n+1)$ $(n \geqslant 4)$，则 G 是广义树.

证明 由已知条件，$|v(G)| = n+3$. 则 $\chi(G) = \min\{\lambda | P(G, \lambda) > 0\} = n$，即 G 是 n - 可着色的，G 含 n - 临界子图 K，由定理 A 知，$|v(K)| \geqslant n$，$\delta(K) \geqslant n-1$. 又 $(\lambda-1)^2 | P(G)$，但 $(\lambda-1)^3$ 不整除 $P(G)$，则 G 有且只有一个割点,不妨设为 u，因而 G 有且只有两个块，记为 B_1，B_2，则 $u \in v(B_i)$ $(i = 1, 2)$，即 G 是 B_1 和 B_2 的关于 u 粘合,不妨设 $K \subset B_2$，则 $|v(B_2)| \geqslant |v(K)| \geqslant n$，且 $|v(B_2)| \geqslant v(B_1)|$，否则，$|v(B_1)| \geqslant |v(B_2)| \geqslant n$，那么，$|v(G)| = |v(B_1)| + |v(B_2)| - 1 = n+3$，于是，$|v(B_1)| + |v(B_2)| = n+4 \geqslant (n+1) + n = 2n+1$，则 $n \leqslant 3$，矛盾. 从而 B_2 含有临界子图 K，这样，由定理 A 知，$|v(B_1)| = |v(G)| - |v(B_2)| + 1 \leqslant 4$，由于 B_1 是非平凡的块,因此，$|v(B_1)| \neq 1$. 下对 $|v(B_1)|$ 进行分类讨论:

(1)若 $|v(B_1)| = 2$，则 $B_1 = K_2$，其中 $u \in v(K_2)$，此时，G 由 B_2 和 K_2 作 K_1 粘合而得，其中 B_2 为具有 $n+2$ 个顶点的图，则 $P(G) = P(B_2)P(K_2)/P(K_1)$ 由已知条件及上式可推得 $P(B_2,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2(\lambda-4)\cdots(\lambda-n+1)$，由定理 D，$B_2$ 为广义树，又由引理 1，G 为广义树.

(2)若 $|v(B_1)| = 3$，由 B_1 是块，则 $B_1 = K_3$，G 是由 B_2 和 K_3 作 K_1 粘合而得到的图，其中 B_2 为具有 $n+1$ 个顶点的图，则 $P(G) = P(B_2)P(K_3)/P(K_1)$. 由条件推得，$P(B_2,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2(\lambda-4)\cdots(\lambda-n+1)$，由引理 3，$B_2$ 必是 K_n 和某个 K_5 关于 K_4 - 的粘合，因而，B_2 为广义树，又由引理 1，G 为广义树.

(3) 若 $|v(B_1)| = 4$，则 $\Delta(B_1) \leqslant 4$，设 G^0 是 K_n 和 K_4 的 K_1 - 粘合，则 $P(G^0) = P(K_n)P(K_4)/P(K_1)$. 由定理 B 知，$\Delta(G) = \Delta(G^0) = C_n^3 + C_4^3$，由于 $\Delta(G) = \Delta(B_1) + \Delta(B_2)$，及

$|v(B_2)| = n$, $\Delta(B_2) \leqslant C_n^2$,则 $B_1 = K_4$, $B_2 = K_n$, G 是 K_n 和 K_4 的 K_1 - 粘合,由引理1, G 是广义树.

综上所述,引理4结论成立.

2 色等价类 $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 的特征

定理1 设 G 的色多项式为 $P(G,\lambda) = \lambda^{k_0}(\lambda-1)^{k_1}\cdots(\lambda-m+1)^{k_{m-1}}(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$,其中, $m \leqslant n$, $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_{m-1}$,且 $k_i = 1$ 或 2 $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$.令 r 为序列 $\{k_i\}$ 中第一个为2的元素的下标,则:

(1) 当 $r = 0$ 时,存在非广义树 H ,使 $P(H) = P(G)$.

(2) 当 $1 \leqslant r \leqslant m-2$ 时,当 $m > 5$ 时,存在非广义树 H ,使 $P(H) = P(G)$;当 $2 < m \leqslant 5$ 时,且 $(r,m) \neq (1,5)$, $(2,5)$ 时, G 为广义树.

(3) 当 $r = m-1$ 时,并且 $r \geqslant 1$ 时, G 为广义树,并且 G 是色唯一.

证明 对 r 分类讨论:

(1) $r = 0$

当 $m \neq 1$ 时, $P(G,\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2\cdots(\lambda-m+1)^2(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$.令 $H = K_n \cup K_m$,显然, $P(H) = P(G)$. 但 H_0 不连通,所以 H_0 不是广义树;当 $m = 1$ 时, $P(G,\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$,则 G 的两个连通分支中有一个是 K_1 ,否则,将导致 $(\lambda-1)^2 | P(G)$ 矛盾,即 $G = K_n \cup K_1$.显然, G 为广义树.

(2) $1 \leqslant r \leqslant m-2$.

(2.1) 当 $m > 5$ 时,则 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1)(\lambda-r)^2\cdots(\lambda-m+1)^2\cdots(\lambda-n+1)$.若 $r = m-2$,由定理D知:存在非广义树 H ,并且 $\omega(H) = n$,使 $P(H) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+3)(\lambda-m+2)^2(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$,下证 $r < m-2$ 的情形,因为 $\omega(H) > n > m-1$,令 H^1 为 K_{m-2} 和的 K_{m-3} - 粘合,且 $P(H^1) = P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+3)(\lambda-m+2)^2(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$,由引理2, H^1 为非广义树,这样,当 $r = m-3$ 时,结论成立,依次类推,可得当 $1 \leqslant r \leqslant m-2$,并且 $m > 5$ 时,结论成立.

(2.2) 当 $2 < m \leqslant 5$ 时,当 $(m,r) = (5,3)$, $(4,2)$, $(3,1)$ 时,由定理D,结论成立. 当 $(m,r) = (4,1)$ 时,此时, $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2(\lambda-4)\cdots(\lambda-n+1)$.由引理4知, G 为广义树.

(3) $r = m-1$,且 $r \geqslant 1$

此时, $P(G,\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2)(\lambda-m+1)^2(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$. 由引理3, G 必定是 K_n 和 K_m 的 K_{m-1} - 的粘合,从而 G 是广义树,并且 G 是色唯一的.

综上所述,结论成立.

定理2 色等价类 $\{\{K_n, K_m\},\{K_r\}\}$ 是一个完全类当且仅当 $r = m-1$ 或 m .

证明 由色等价类概念得: $\forall\ G \in \{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$,由引理1, G 是一个广义树,并且 G 的色多项式 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1)(\lambda-r)^2\cdots(\lambda-m+1)^2\cdots(\lambda-n+1)$. 下对 r 分类讨论:

(1)当 $r = 0$ 且 $m \neq 1$ 时,由定理1,存在非广义树色等价于 G ,从而, $\{\{K_n,K_m\}, \{K_r\}\}$ 不是一个完全类.

(2)当 $1 \leqslant r \leqslant m-2$ 时,对 m 分类讨论:

(2.1)当 $m > 5$ 时,则 $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1)(\lambda-r)^2\cdots(\lambda-m+1)^2\cdots(\lambda-n+1)$,由定理1结论,存在非广义树 H ,使 $P(G) = P(H)$.因而 $\{\{K_n, K_m\},\{K_r\}\}$ 不是完全类.

(2.2)当 $m \leqslant 5$ 时, $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1)(\lambda-r)^2\cdots(\lambda-m+1)^2\cdots(\lambda-n+1)$,考虑到 $\forall\ Q \in \{\{K_n, K_{m+1}, K_m, \cdots, K_{r+1}\}, \{K_{m-1}, \cdots, K_{r+1}, K_r\}\}$,

$P(Q) = P(K_n)\prod\limits_{i=r+1}^{m+1} P(K_i) / \prod\limits_{i=r}^{m-1} P(K_i) = P(G)$. 显然, $\{\{K_n,K_m\}, \{K_r\}\} \subset \{\{K_n, K_{m+1}, K_m,$

$\cdots, K_{r+1}\}$, $\{K_{m-1}, \cdots, K_{r+1}, K_r\}\}$, $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 不是一个完全类.

(3)当 $r = m - 1$ 时, 对 m 分类讨论:

(3.1)当 $m \neq 1$ 时,此时, $P(G) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1)(\lambda-r)^2\cdots(\lambda-m+1)^2\cdots(\lambda-n+1)$, 由定理 1 知, G 是 K_n 和 K_m 关于 K_r 的粘合, $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 是一个完全类.

(3.2)当 $m = 1$ 时, 即 $r = 0$, $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\} = K_1 \cup K_n$, 由定理 1 的(1) $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 是一个完全类.

(4)当 $r = m$ 时, $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\} = \{K_n\}$, 由于 K_n 是色唯一的, $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ 是一个完全类.

推论 设色等价类 $\{\mathscr{G}, \mathscr{H}\} = \{\{K_n, K_m, K_k\}, \{K_j, K_i\}\}$ ($4 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant m \leqslant n$), 则 $\{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$ 是一个完全类的充要条件是 $i = k = m - 1$ 或 $i = k = m$.

证明 显然, $\forall\ G \in \{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$, 由广义树的定义和引理 1, G 是广义树, 且 G 的色多项式为 $P(G) = P(K_n)P(K_m)P(K_k)/P(K_j)P(K_i) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)(\lambda-i)^2\cdots(\lambda-j+1)^2(\lambda-j)^3\cdots(\lambda-k+1)^3(\lambda-k)^2\cdots(\lambda-m+1)^2(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$.

下对 $i(i \geqslant 4)$ 分类讨论: (1) 当 $i < j$ 时, $(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)^2 \mid P(G,\lambda)$. (2)当 $i = j < k$ 时, $(\lambda-k+1)^3 \mid P(G)$, 对于上面的(1)和(2)分别应用由定理 C 和定理 D, 均可构造非广义树 H, 使 $P(H) = P(G)$, 但 $H \notin \{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$, 所以 $\{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$ 不是一个完全类. (3)当 $i = j = k < m$ 时, $\{\{K_n, K_m, K_k\}, \{K_j, K_i\}\} = \{\{K_n, K_m\}, \{K_k\}\}$, 由定理 2 知, $\{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$ 是一个完全类当且仅当 $k = m - 1$. (4) 当 $i = j = k = m$ 时, 则 $\{\{K_n, K_m, K_k\}, \{K_j, K_i\}\} = \{K_n\}$, 显然, $\{\mathscr{G}, \mathscr{H}\}$ 是一个完全类.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application[M]. The Macmillan Press, 1976.

[2] KOH K M, TEO K L. The search for chromatically unique graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 1990, 6:259 - 285.

[3] 董峰明. 广义轮图的色多项式唯一性[J]. 数学研究与评论, 1990, 10(3):447 - 454.

[4] 唐明元. 广义树的色性[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 1999, 28(3):21 - 25.

[5] XU S J. Classes of chromatically equivalent graphs and polygon trees[J]. Discrete Math, 1994, 133:267 - 278.

[6] CHAO C Y, LI N Z, XU S J. On q- trees[J]. J Graph Theory, 1986, 10:129 - 136.

[7] 方影. 两个完全图 K_n 和 K_{r+2} 粘合关于 K_r - 粘合的色等价类[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2000, 29(2): 24 - 29.

The chromatically equivalent classes on the K_r -gluing of two complete graphs K_n and K_m

GONG He-lin

(Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let G is a finite, undirected, simple graph with the chromatic polynomial $P(G, \lambda) = \lambda^{k_0}(\lambda-1)^{k_1}\cdots(\lambda-m+1)^{k_{m-1}}(\lambda-m)\cdots(\lambda-n+1)$, where, $m \leqslant n$, $k_i = 1$ or 2, $k_0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_{m-1}$, This paper give sufficient conditions on which G is a generalized tree, Furthermore, this paper prove that the necessary and sufficient condition for that the chromatically Equivalent Class $\{\{K_n, K_m\}, \{K_r\}\}$ ($0 \leqslant r \leqslant m \leqslant n$) is a complete class if and only if $r = m - 1$ or m.

Key words: chromatical polynomialchromatic uniqueness; generalized tree; complete class