(5)

24-29

两个完全图 K_n 和 K_{r+2} 关于 K_r-粘合的色等价类

方　影

(第二军医大学,上海 200433)

摘　要：设 G_n 是 n 阶广义树,则 $P(G_n)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-m)^{r_m}$,其中 $1+r_1+\cdots+r_m=n$,且当 $n>1$ 时,$r_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,m)$. 设色等价类 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}=\{\{r_1K_2,r_2K_3,,r_mK_{m+1}\},\{(r-1)K_1,r_2K_2,,r_mK_m\}\}$. 证明了,如果 $P(G)=P(G_n)$,则 G 是一棵广义树当且仅当 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 是一个完全类. 在 $r_i=r_{i+1}=2,r_j=1(j\neq i,i+1)$ 时,同样证明了,如果 $1\leqslant i\leqslant 3$,则 G 是一棵广义树. 而当 $3<i<n-1$ 时,给出了 G 的两种类型:一种是广义树,另一种是非广义树.

关键词：色等价类;完全类;广义树　完全图

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2000)02-0024-06

0　引　言

设 G 是有限无向的简单图. $v(G)$(或 $|G|$),$\varepsilon(G)$ 和 $t(G)$ 分别表示 G 的顶点数、边数和 G 中三角形个数,$N(u)$ 表示顶点 u 在 G 中邻点集的导出子图. $G+H$ 表示 G 与 H 的联图. $G[S]$ 表示由顶点子集 S 导出的 G 的子图,$G-e$ 表示从 G 中删去边 e,$G\circ e$ 表示收缩边 e 所得到的图. $w(G)$ 表示 G 的团数,$P(G,\lambda)$ 表示 G 的色多项式,简记作 $P(G)$. 若图 H 满足 $P(H)=P(G)$,则称 H 与 G 色等价. 其他没有出现的术语见[1,2]. 设 $\mathscr{G}=\{G_0,G_1,\cdots,G_p\}$,$\mathscr{K}=\{K_{i_1}\cdots K_{i_p}\}$,则 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 表示由 $G_0,G_1,\cdots,G_p$ 用 $K_{i_1}\cdots K_{i_p}$ 在不同位置以不同顺序粘合所得到的图的全体所成之集. 称为由 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{K}$ 所产生的色等价类. 显然,对任意 $G\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$,$P(G)$ 是相同的. 若 H 与 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$ 中的图色等价,则称 H 色等价于 $\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$. 由 k 个图 G 作成的类 $\{G,\cdots,G\}$ 记作 $\{kG\}$. 设 G_n 是一棵 n 阶广义树,则 $P(G_n)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-m)^{r_m}$,这里 $1+r_1+\cdots+r_m=n$,并且当 $n>1$ 时,$r_i\geqslant 1\ (i=1,2,\cdots,m)$ ([3],定理1). 本文给出了广义树和完全类之间的联系,即若 $P(G)=P(G_n)$,则 G 是广义树当且仅当 $\{\{r_1K_2,r_2K_3,,r_mK_{m+1}\},$

收稿日期：2000-01-12

基金项目：上海市高等学校科技发展基金资助项目(99D01)

作者简介：方影(1965-),第二军医大学基础部讲师.

$\{(r_1-1)K_1, r_2K_2, , r_mK_m\}\}$ 是一个完全类. 并且对广义树的色多项式在 $r_i=r_{i+1}=2(1\leqslant i\leqslant n-1)$，其余 $r_j=1(j\neq i,i+1)$ 时，进行了研究. 当 $1\leqslant i\leqslant 3$ 时，G 是一棵广义树；当 $3<i<n-1$ 时，给出了 G 的两种类型.

1　广义树和完全类

定义1[4]　设 $G_1=K_1$ 是1阶广义树，对 $n\geqslant 2$，设 $v(G)=n$，归纳地定义 n 阶广义树，若存在 $v\in v(G)$，使 $N(v)=K_q\subseteq G-v(1\leqslant q\leqslant n-1)$，并且 $G-v$ 是一棵 $n-1$ 阶广义树，则称 G 是一棵 n 阶广义树，记作 G_n.

定义2[4]　设 C 是图 G 的一个圈，$|C|\geqslant 4$，若 $G[V(C)]=C$ 则称 C 是 G 的一个无弦圈. 若 G 没有无弦圈，则称 G 是一个弦图.

定理 A[4]　G 是一棵广义树当且仅当 G 是一个连通弦图.

定理3[5]　设 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是由 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{H}$ 所产生的色等价类，若对任意色等价于 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 的图 H，都有 $H\in\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$，则称 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是一个完全类.

由定理 A 即得下列引理1

引理1　H_1，H_2 是两棵广义树. $r\leqslant\min\{w(H_1),w(H_2)\}$ 则 H_1 与 H_2 关于 K_r 的粘合还是一棵广义树.

定理1　设 H 是一个具有 n 个顶点的简单图($n\geqslant 3$)，则下列条件等价：

(1)若 $P(H)=P(G_n)$，则 H 是一棵广义树.

(2) $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}=\{\{r_1K_2, r_2K_3, , r_mK_{m+1}\},\{(r_1-1)K_1, r_2K_2, , r_mK_m\}\}$ 是一个完全类.

证明　对 $n=1+r_1+\cdots+r_m$ 进行归纳，当 $n=3$，则 $r_1+\cdots+r_m=2$. 于是 $m\leqslant 2$. 有两种情形.

情形 I　$m=1, r_1=2$. 此时 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}=\{\{K_2,K_2\},\{K_1\}\}$ 仅含一个图 P_3，即长为2的一条路. 显然 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是完全类.

情形 II　$m=2$，则 $r_1=r_2=1$. 此时 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}=\{\{K_2,K_3\},\{K_2\}\}$ 仅含一个图 K_3，并且 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 也是完全类.

归纳假设 $n-1$ 时结论成立. 看 n 情形. 设 H 与 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 色等价，则 H 的色多项式为

$$P(H)=\frac{P(K_2)^{r_1}P(K_3)^{r_2}P(K_{m+1})^{r_m}}{P(K_1)^{r_1-1}P(K_2)^{r_2}P(K_m)^{r_m}}=\lambda(\lambda-1)^{r_1}(\lambda-2)^{r_2}\cdots(\lambda-m)^{r_m}.$$

按条件(1)，H 是一棵广义树，这样，存在 $v\in H$，使 $N(v)=K_q\subseteq G-v$，并且 $G-v$ 是一棵 $n-1$ 阶广义树. 而 H 是 $H-v$ 与 $K_{q+1}=N(v)+v$ 关于 $K_q=N(v)$ 的粘合，于是，$P(H)=P(H-v)(\lambda-q)$. 因此，$q=$ 某个 i，而 $P(H-v)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-i)^{r_i-1}\cdots(\lambda-m)^{r_m}$. 由于 H-v 是广义树，所以 $r_i-1\geqslant 1$. 相应的色等价类为 $\{\mathscr{G}_1,\mathscr{H}_1\}=\{\{r_1K_2,\cdots,r_{i-1}Ki,(r_i-1)K_{i+1},r_{i+1}K_{i+2},\cdots,r_mK_{m-1}\},\{(r_i-1)K_1,r_iK_2,\cdots,r_{i-1}K_{i-1},(r_i-1)K_i,r_{i+1}K_{i+1},\cdots,r_mK_m\}\}$. 而 $1+r_1+\cdots+(r_i-1)+\cdots+r_m=n-1$. 按归纳假设 $\{\mathscr{G}_1,\mathscr{H}_1\}$ 是一个完全类. 从而 H-$v\in\{\mathscr{G}_1,\mathscr{H}_1\}$，并且 $H\in\{\mathscr{G}_1\cup\{K_{q+1},\mathscr{H}_1\cup\{K_q\}\}$. 于是可在粘合 H-v 过程中，在适当时候先用 K_i 粘合 K_{i+1}，而使 $H\in\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$，这样 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是一个完全类.

(2)⇒(1)　设 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是一个完全类，并且 $P(H)=P(G_n)$. 对 $v(H)=n$ 进行归纳. 当 n

$=3$时，有 $m\leqslant 2$. 同样分两种情形讨论.

情形 I　$m=1$，则 $r_1=2$，即 $P(H)=\lambda(\lambda-1)^2$. 则 H 是一棵树，当然是广义树.

情形 II　$m=2$，则 $r_1=r_2=1$，此时 $P(H)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$，即 $H=K_3$. 故 H 是一棵广义树.

归纳假设 $v(H)<n$ 时结论成立，看 $v(H)=n$ 情形.

设 $P(H)=P(G_n)$. 由于对任意 $G\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$，有 $P(G)=P(G_n)$，故 H 与$\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$色等价. 又同$\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$是一个完全类. 所以 $H\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$. 由于每次粘合过程总是两个图关于某个完全图的粘合，因此，H 的最后一次粘合应是两个图 H_1和 H_2关于某个 K_r 的粘合. 于是可设 $H_1\in\{\{r_1K_2,r_2K_3,\cdots,(r_i-a)K_{i+1}\},\{(r_1-1)K_1,r_2K_2,\cdots,(r_i-a)K_i\}\}$，$H_2\in\{\{aK_{i+1},r_{i-1}K_{i+2},\cdots,r_mK_{m+1}\},\{(a-1)K_i,r_{i+1}K_{i+1},\cdots,r_mK_m\}\}$，并且 H 是 H_1和 H_2关于 K_i 的粘合. 显然，

$$P(H_1)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-i+1)^{r_{i-1}}(\lambda-i)^{r_i-a}.$$

由于$1+r_1+\cdots+r_{i-1}+(r_i-a)<1+r_1+\cdots+r_m=n$，按归纳假设，$H_1$是一棵广义树，并且

$$P(H_2)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)(\lambda-i)^a(\lambda-i-1)^{r_{i+1}}\cdots(\lambda-m)^{r_m}.$$

而$\overbrace{1+\cdots+1}^{i}+a+r_{i+1}+\cdots+r_m\leqslant 1+r_1+\cdots+r_m=n$. 等式成立当且仅当 $r_1=\cdots=r_{i-1}=1$，$r_i=a$. 当不等式成立时，按归纳假设，H_2是一棵广义树. 按引理1，H 是广义树，当等式成立时，则 $P(H_1)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$，故 $H_1=K_i$. 而 $H_2=H$，故此时 H_1是 H_2的子图. 从而 $H_2\in\{\mathscr{G},\mathscr{K}\}$，再对 H_2重复 H 的工作. 可得 H_2是两个图 H_3和 H_4关于 K_r 的粘合. 如此继续下去，最终必定只有两种情形，要么 H 是两棵广义树的 K_r-粘合. 从而 H 是广义树，要么 $P(H)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)(\lambda-m)^{r_m}$，则 H 是一棵 m-树，故 H 是一广义树.　□

2　K_n 与 K_{i+2}的 K_i-粘合

定理2　设图 G 的色多项式为

$$P(G)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)^2\cdots(\lambda-n+1)\ (1\leqslant i<n-1).$$

则 G 必定是下列两种类型之一.

(1)G 是通过先由 K_n 与 K_{i+1}作 K_i-粘合，再与 K_{i+2}作 K_{i+1}-粘合所得到，此时，G 是一棵广义树.

(2)设 $H_1=K_r+u$，$H_2=K_s+v$. 令 H 是 K_n 与 H_1的 K_r-粘合. 则 G 是先由 H 与 H_2作 K_t-粘合，然后再连接 u 与 v 得到，其中 r，s 和 t 满足下列条件：

$4(r-p)+1$，$4(s-p)+1$都是完全平方数，$s=r+1\pm\sqrt{4(r-p)+1}$，$t=r+\dfrac{1\pm\sqrt{4(r-p)+1}}{2}$. 而 $p=|(N(u)-v)\bigcap(N(v)-u)|$，使 s，$r>p$.

证明　由 $P(G)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)^2\cdots(\lambda-n+1)$ 可知，$v(G)=n+2$，$\varepsilon(G)=\binom{n}{2}+2i+1$，$t(G)=\binom{n}{3}+\binom{i}{2}+\binom{i+1}{2}=\binom{n}{3}+i^2$. 因 $P(G,n)>0$，所以 G 是 n-可着色的. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 是 G 的一个色分类，则 $|V_i|\geqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$. 因 $v(G)=n+2$，所以，必存

在 $n-2$ 个色类是单元集. 设 $V_i=\{v_i\}(i=1,2,\cdots,n-2)$. 下面分两种情况进行讨论.

情形 I $V_{n-1}=\{v_{n-1}\}$, $V_n=\{v_n,v_{n+1},v_{n+2}\}$. 因 $P(G,n-1)=0$, 所以 $G[v_1,\cdots,v_{n-1}]=K_{n-1}$. 否则, 将不相邻的两点合并成一类, 可得 G 的一个 $(n-1)$ 色分类. 这样, $P(G,n-1)>0$, 矛盾. 并且, 此时在 V_n 中存在一点与 $v_1,\cdots,v_{n-1}$ 都相邻, 否则, 设 v_n,v_{n+1},v_{n+2} 分别与 v_i,v_j,v_k 不相邻 $(1\leqslant i<j<k\leqslant n-1)$. 可作新的类 $V_i'=\{v_i,v_n\}$, $V_j'=\{v_j,v_{n+1}\}$, $V_k'=\{v_k,v_{n+2}\}$, 则可得 G 的一个 $(n-1)$ 色分类, 同样与 $P(G,n-1)=0$ 矛盾. 设 v_n 与 $v_1,\cdots,v_{n-1}$ 都相邻, 则 $G[v_1,\cdots,v_n]=K_n$. 于是, 可设 $|N(v_{n+1})|=r\geqslant 1$, $|N(v_{n+2})|=s\geqslant 1$, 则 $N(v_{n+1})+v_{n+1}=K_{r+1}$, $N(v_{n+2})+v_{n+2}=K_{s+1}$, 于是, 先将 K_n 与 K_{r+1} 作 K_r-粘合, 再与 K_{s+1} 作 K_s-粘合, 即得到 G, 并且 $P(G)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(\lambda-r)(\lambda-s)$. 这样, 要么 $r=i$, $s=i+1$; 或 $r=i+1$, $s=i$, 此时, G 为第(1)类型的图, 即 G 为一棵广义树.

情形 II $V_{n-1}=\{v_{n-1},v_{n+1}\}$, $V_n=\{v_n,v_{n+2}\}$.

因 $P(G,n-1)=0$, 故 V_{n-1} 和 V_n 中都至少有一点与 $v_1,\cdots,v_{n-2}$ 都相邻. 否则, 设 V_{n-1} 中点 v_{n-1},v_{n+1} 分别与 v_i,v_j 不相邻, 这样, 可作 $V_i'=\{v_i,v_{n-1}\}$, $V_j'=\{v_j,v_{n+1}\}$, 这是 G 的一个 $(n-1)$ 色分类, 与 $P(G,n-1)=0$ 矛盾. 设 v_{n-1} 和 v_n 分别与 $v_1,\cdots,v_{n-2}$ 都相邻, 即 $G[v_1,\cdots,v_{n-1}]$ 和 $G[v_1,\cdots,v_{n-2},v_n]$ 都是 K_{n-1}. 再分两种情况讨论.

情形1 若 v_{n-1} 与 v_n 相邻, 即 $G[v_1,\cdots,v_n]=K_n$.

此时, 再分两种子情况.

情形1.1 v_{n+1} 与 v_{n+2} 不相邻, 设 $|N(v_{n+1})|=r$, $|N(v_{n+2})|=s$, 那么, 先将 K_n 与 $K_{r+1}=N(v_{n+1})+v_{n+1}$ 作 $K_r=N(v_{n+1})$-粘合, 再与 $K_{s+1}=N(v_{n+2})+v_{n+2}$ 作 $K_s=N(v_{n+2})$-粘合, 即得到 G. 此时, G 也是第(1)类型图, 故 G 是一棵广义树.

情形1.2 v_{n+1} 与 v_{n+2} 相邻, 令 $N_1=N(v_{n+1})-v_{n+2}$, $N_2=N(v_{n+2})-v_{n+1}$, $|N_1|=r$, $|N_2|=s$. 此时还有两种情形.

情形1.2.1 $N_1\subseteq N_2$, 则 $r\leqslant s$. 此时, 先作 K_n 与 $K_{s+1}=N_2+v_{n+2}$ 的 $K_s=N_2$-粘合. 再与 $K_{r+2}=N(v_{n+1})+v_{n+1}$ 作 $K_{r+1}=N(v_{n+1})$-粘合, 即可得到 G. 这样 $P(G)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(\lambda-s)(\lambda-r-1)$, 因此, 要么 $s=r=i$, 要么 $s=i+1$, $r=i-1$, 所以 G 是第(1)类型图.

情形1.2.2 N_1 与 N_2 互相不包含.

令 $|N_1\cap N_2|=p$, $|N_1\cup N_2|=q=r+s-p$. 设 e 是 v_{n+1} 与 v_n 的连接边, 则 $G-e$ 是先由 K_n 与 K_{r+1} 作 K_r-粘合, 再与 K_{s+1} 作 K_s-粘合而得到. 因此 $P(G-e)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(\lambda-r)(\lambda-s)$. 而 $G\circ e$ 是 K_n 与 K_{q+1} 的 K_q-粘合, 其中 $K_{q+1}=(N_1\cup N_2)+v_{n-1}$, $K_q=N_1\cup N_2$, 并且 $P(G\circ e)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)(\lambda-q)$, 于是

$$P(G)=P(G-e)-P(G\circ e)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)[(\lambda-r)(\lambda-s)-(\lambda-q)].$$

因此, $(\lambda-r)(\lambda-s)-(\lambda-q)=(\lambda-s)(\lambda-i+1)$. 得到,

$$\lambda^2-(r+s+1)\lambda+rs+q=\lambda^2-(2i+1)\lambda+i(i+1).$$

再计算 G 现在的三角形个数 $t(G)=\binom{n}{3}+\binom{r}{2}+\binom{s}{2}+p$. 得到下列方程组

$$\begin{cases} r+s+1=2i+1 & ① \\ rs+r+s-p=i^2+i & ② \\ \dfrac{r(r-1)}{2}+\dfrac{s(s-1)}{2}+p=i^2 & ③ \end{cases}$$

由①可得

$$r+s=2i. \tag{①}$$

由③结合①及②可得 $r^2+s^2+2p=2i^2+r+s=2(i^2+i)=2(rs+r+s-p)$. 因而有 $r^2+s^2-2rs-2r-2s+4p=0$. 此式关于 $r+s$ 是对称的. 按 r 集项, 可得到 $r^2-2(s+1)r+s^2-2s+4p=0$. 这样, $r=s+1\pm\sqrt{4(s-p)+1}$. 同样也解出 $s=r+1\mp\sqrt{4(r-p)+1}$, 并且 $i=s+\frac{1\pm\sqrt{4(s-p)+1}}{2}$ 或 $i=r+\frac{1\mp\sqrt{4(r-p)+1}}{2}$. 反之, 若 $4(s-p)+1$, $4(r-p)+1$ 都是完全平方数, 且 $s=r+1\pm\sqrt{4(r-p)+1}$, $i=r+\frac{1\pm\sqrt{4(r-p)+1}}{2}$, 由 $i=\frac{r+s}{2}<n-1$, 并且 $rs+r+s-p=i(i+1)$. 从而 $(\lambda-r)(\lambda-s)-(\lambda-p)=(\lambda-i)(\lambda-i-1)$. 故此时 G 是第(2)类型图, 而 G 含无弦圈 $C_4=v_{n+1}v_{n+2}uvv_{n+1}$, 其中 $u\in N_2-N_1$, $v\in N_1-N_2$. 按定理 A, G 不是广义树.

情形2 v_{n-1} 与 v_n 不相邻, 则必有 v_{n-1} 与 v_{n+2}, v_n 与 v_{n+1} 都相邻. 否则, 令 $V_n'=\{v_{n-1},v_n,v_{n+2}\}$ 或 $V_{n-1}'=\{v_{n-1},v_n,v_{n+1}\}$ 则归结为情形(Ⅰ). 于是可设 v_{n-1} 与 v_{n+2}, v_n 与 v_{n+1} 都相邻. 并且, v_{n+1} 与 v_{n+2} 中至少有一点要与 $v_1,\cdots,v_{n-2}$ 都相邻, 否则, 设 v_{n-1} 与 v_i 不相邻, v_{n+2} 与 v_j 不相邻 $(1\leqslant i<j\leqslant n-2)$. 令 $V_i'=\{v_i,v_{n+1}\}$, $V_j'=\{v_j,v_{n+2}\}$, $V_{n-1}'=\{v_{n-1},v_n\}$, 则可得 G 的一个 $(n-1)$ 色分类, 与 $P(G,n-1)=0$ 矛盾. 于是可设 v_{n+1} 与 $v_1,\cdots,v_{n-2}$ 相邻, 即 $G[v_1,\cdots,v_{n-2},v_n,v_{n+1}]=K_n$, 并且, v_{n-1} 与 v_{n+2} 相邻, 归结为情形1.2. □

推论1 设 $P(G)=\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i)^2(\lambda-i-1)^2\cdots(\lambda-n+1)$. 则当 $1\leqslant i\leqslant 3$ 时, G 是一棵广义树. 其余情形都有非广义树存在.

证明 由定理2的证明可知. 当 G 不是一棵广义树, G 是第(2)类型图. 此时 $4(s-p)+1$ 和 $4(r-p)+1$ 都是完全平方数, 且 $r-p>0$, $s-p>0$. 从而 $s-p\geqslant 2$, $r-p\geqslant 2$. 因此 $4(s-p)+1\geqslant 9$, $4(r-p)+1\geqslant 9$. 于是 $r\geqslant p+2$, $s\geqslant p+2$. 并且 $i=\frac{s+r}{2}\geqslant p+2\geqslant 2$. 令 $4(r-p)+1=a^2$, 则必 $i\geqslant 4$. 若 $i=2$, 由 $\frac{s+r}{2}=i$ 以及 $s\geqslant 2$, $r\geqslant 2$, 可得 $r=s=2$, 再由 $r\geqslant p+2$, 就有 $p=0$, 这样 $a=3$, 所以 $i=r+\frac{1\pm a}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\neq 2$, 矛盾. 若 $i=3$, 则 $\frac{s+r}{2}=3$, 此时有两种情形.

情形(1) 若 $r=2$, 则 $s=4$, 且 $p=0$, 而 $a=3$, 于是 $i=r+\frac{1\pm a}{2}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\neq 3$, 矛盾. 按对称性, 对 $r=4$ 也是不可能的.

情形(2) 若 $r=3$, 则 $s=3$, 且 $p=1$, 而 $a=3$, 于是 $i=r+\frac{1\pm a}{2}=\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}\neq 3$, 矛盾. 故 $i\geqslant 4$, 即当 $1\leqslant i\leqslant 3$ 时 G 是一棵广义树.

取 $a=3$, 由 $r=p+2$, 并且 $s=r+1+a=p+6$, 或 $s=r+1-a=p$, 后式与 $s>p$ 矛盾. 从而 $i=p+4$, 于是可知 i 可取大于等于4的一切整数, 故知在 $i\geqslant 4$ 时, 有非广义树存在. □

推论2 设 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}=\{\{r_1K_2,r_2K_3,\cdots,r_mK_{m+1}\},\{(r_1-1)K_1,r_2K_2,\cdots,r_mK_m\}\}$. 若 $r_i=r_{i+1}=2(1\leqslant i\leqslant 3)$, 其余 $r_j=1(j\neq i,i+1)$. 则 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 是一个完全类.

证明 设 G 与 $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ 色等价. 则 $P(G)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-m)^{r_m}$. 其中, $r_i=r_{i+1}=2(1\leqslant i\leqslant 3)$, 其余 $r_j=1(j\neq i,i+1)$, 且 $1+r_1+\cdots+r_m=n$. 按推论1可知, G 是一棵广义树, 按定理1

可知$\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$是一个完全类. □

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. The Macmillan Press, 1976.

[2] HARARY F. Graph theroy[M]. Addison-Wesley, Roading, Ma, 1969.

[3] 唐明元. 广义树的色性[J]. 上海师范大学学报(自然科学版),1993(3):21-25.

[4] 董峰明. 广义轮图的色多项式唯一性[J]. 数学研究与评论,1990(10):447-454.

[5] XU S J. Classes of chromatically equivalent graphs and polygon trees[J]. Discrete Math, 1994,133: 267-278.

The Chromatically Equivalent Classes on the K_r-Gluing of Two Complete Graphs K_n and K_{r+2}

FANG Ying

(Second Military Medical University, Shanghai, 200433, China)

Abstract: Let G_n be a generalized tree of order n. Then $P(G_n)=\lambda(\lambda-1)^{r_1}\cdots(\lambda-m)^{r_m}$, where $1+r_1+\cdots+r_m=n$. Further, when $n>1, r_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,m)$. Let $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}=\{\{r_1K_2,r_2K_3,\cdots,r_mK_{m+1}\},\{(r_1-1)K_1,r_2K_2,\cdots,r_mK_m\}\}$. We prove that if $P(G)=P(G_n)$, then G is a generalized tree if and only if $\{\mathscr{G},\mathscr{H}\}$ is a complete class. we also prove that when $r_i=r_{i+1}=2$ $(1\leqslant i\leqslant 3), r_j=1(j\neq i,i+1)$, G is a generalized tree, and when $3<i<n-1$, we give two types of G: one type is a generalized tree, and the other is a non-generalized tree.

Key words: chromatically equivalant class; complete graph; generalized tree