

圈长分布确定的偶图 $K_{n,n} - A_3$

陆宗元
(数学系)

摘要 阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 (c_1, c_2, \dots, c_n) , 其中 c_i 是图 G 中圈长为 i 的圈数. 本文得到了如下结果: 设 $A_3 \subseteq E(K_{n,n})$, $|A_3| = 3$ 且 $n \geq |A_3| + 2$ 则 $K_{n,n} - A_3$ 是由它的圈长分布确定的. 并给出了 $K_{n,n} - A_3$ 在各种情形下的圈数计算公式.

关键词 图; 圈长分布; 偶图; 圈长分布确定的偶图
中图法分类号 O157.5

阶为 n 的图 G 的圈长分布是序列 (c_1, c_2, \dots, c_n) , 其中 c_i 是图 G 中圈长为 i 的圈数. 圈长分布的概念是由施永兵在文[1]中提出的. 一般来说满足圈长分布 (c_1, c_2, \dots, c_n) 的图 G 不是唯一的. 若对应于圈长分布 (c_1, c_2, \dots, c_n) 的图 G 是唯一的, 则称此图 G 是由它的圈长分布确定的.

作者在文[4]中已证明了 $A_k \subseteq E(K_{n,n})$, $|A_k| = k$ 且 $n \geq k + 2$ 则 $K_{n,n} - A_k$ ($k = 1, 2$) 及 $K_{n,n}$ 是由它的圈长分布确定的. 本文将证明当 $k = 3$ 且 $n \geq 5$ 时 $K_{n,n} - A_3$ 也是由它的圈长分布确定的.

为了方便起见, 本文中 Hamilton 图简称为 H 圈; 将长为奇数的路称为奇路; 将长为偶数的路称为偶路.

引理 1 设 S 为 H_j 中不连通的奇路数, t 为 H_j 中不连通的偶路数, $\mu(H_j)$ 是 $K_{n,n}$ 中经过 H_j 的所有的 H 图数, $r = n - \frac{1}{2}(|E(H_j)| + s)$, 则

(i)

$$\mu(H_j) = \begin{cases} 2^{t-1} \cdot r [(r-1)!]^2 & \text{当 } s = 0 \text{ 时} \\ 2^{t(r)} & \text{当 } s = 1 \text{ 时} \\ 2^t \left[\sum_{i=1}^{t-1} \binom{s-2}{i-1} \binom{2r+1}{i} \right] (s-1)! (r!)^2 & \text{当 } s \geq 2 \text{ 时} \end{cases}$$

(ii) 当 $\Delta(H_j) \geq 3$ 或 H_j 含有阶小于 $2n$ 的圈时, $\mu(H_j) = 0$

(iii) 当 H_j 是阶为 $2n$ 的圈时, $\mu(H_j) = 1$

其中规定当 $s = 1$ 且 $t = 0$ 时 $0! = 1$; 当 $s = 1$ 且 $t \neq 0$ 时 $0! = 0$ (作者注)

本文于 1992 年 10 月 23 日收到

证 见文[2]

定理 1 设 $A_3 \subseteq E(K_{n,n})$, $|A_3| = 3$ 且 $n \geq 5$ 则 $K_{n,n} - A_3$ 中的 i 圈数 $C_{3,i}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 分别为

(i) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中只含 1 度点时(如图 1(1)):

$$C_{3,i}^{(1)} = \begin{cases} c + 3(2p-3)[(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2} & \text{当 } i=4, p=2 \text{ 时} \\ c + 3(2p-3)[(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2} - \binom{n-3}{p-3} \binom{2p-4}{2} 2! [(p-3)!]^2 & \text{当 } i=2p, p=3, 4, \dots, n \text{ 时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

(ii) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中只含一个 3 度点时(如图 1(2)):

$$C_{3,i}^{(2)} = \begin{cases} c + 3 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 & \text{当 } i=2p, p=2, 3, \dots, n \text{ 时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

(iii) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中只含一个 2 度点时(如图 1(3)):

$$C_{3,i}^{(3)} = \begin{cases} c + 2 \binom{n-2}{p-2} (2p-3) [(p-2)!]^2 + \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 & \text{当 } i=4, p=2 \text{ 时} \\ c + 2 \binom{n-2}{p-2} (2p-3) [(p-2)!]^2 + \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 & \text{当 } i=2p, p=3, 4, \dots, n \text{ 时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

(iv) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中含两个 2 度点时(如图 1(4)):

$$C_{3,i}^{(4)} = \begin{cases} c + \binom{n-2}{p-2} (2p-3) [(p-2)!]^2 + 2 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 - [(p-2)!]^2 & \text{当 } i=2p, p=2, 3, \dots, n \text{ 时} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$c = \frac{1}{2} \binom{n}{p} p [(p-1)!]^2 - 3 \binom{n-1}{p-1} [(p-1)!]^2$$

证 因为 $K_{n,n} - A_3$ 是偶图, 所以 $c_1 = c_2 = 0$ 且 $c_i = 0$ ($i = 2p+1, p = 1, 2, \dots, n-1$).

对每个 $i = 2p$ ($p = 2, 3, \dots, n$); $K_{n,n}$ 中阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n}{p}^2$ 个. 而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数为 $\frac{1}{2} p [(p-1)!]^2$, 因此在 $K_{n,n}$ 中所含的 i 圈数为

$$\frac{1}{2} \binom{n}{p}^2 p [(p-1)!]^2 \quad (5)$$

因为在 $K_{n,n}$ 中含 A_3 的某一条边的阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-1}{p-1}^2$ 个, 而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数, 由引理 1 得 $[(p-1)!]^2$, 所以在 $K_{n,n}$ 中含 A_3 中某一条边的 i 圈数为 $\binom{n-1}{p-1}^2 [(p-1)!]^2$. 又因为 $|A_3| = 3$, 所以 $K_{n,n}$ 中含 A_3 中一条边的 i 圈数为

$$3 \binom{n-1}{p-1}^2 [(p-1)!]^2 \tag{6}$$

因为 $K_{n,n}[A_3]$ 仅有图 1 中所示的 4 种情形, 所以下面分 4 种情形来计算 $K_{n,n}$ 中含 A_3 的两条边的 i 圈数和含 A_3 的 3 条边的 i 圈数. 为了方便起见, 将图 1 中 $K_{n,n}[A_3]$ 的第 (j) 种情形记为 $K_{n,n}[A_3^{(j)}]$, 相应的 A_3 记为 $A_3^{(j)}$, 相应为 $K_{n,n} - A_3$ 记为 $K_{n,n} - A_3^{(j)}$, $K_{n,n} - A_3^{(j)}$ 中的 i 圈数记为 $C_{3,i}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

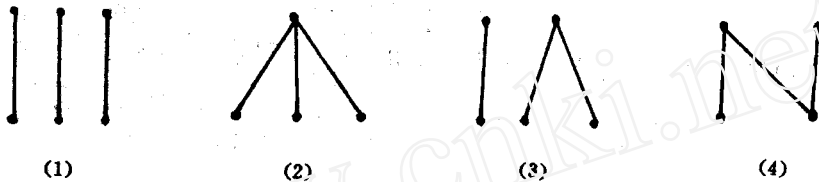


图 1 Fig. 1

(1) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中只含 1 度点, 即 $K_{n,n}[A_3^{(1)}]$ (如图 1(1))

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(2)}$ 中某两条边的阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-2}{p-2}^2$ 个, 而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数由引理 1 得 $(2p-3)[(p-2)!]^2$, 又因为 A_3 中含两条边的情形共有 3 种, 所以在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(2)}$ 的两条边的 i 圈数为

$$3(2p-3)[(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2}^2 \tag{7}$$

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的 3 条边的阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-3}{p-3}^2$ 个, 而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数由引理 1 得

$$\left[\binom{2p-5}{1} + \binom{2p-5}{2} \right] 2! [(p-3)!]^2 = \binom{2p-4}{2} 2! [(p-3)!]^2$$

所以在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 中 3 条边的 i 圈数为

$$\begin{cases} 0 & p = 2 \\ \binom{n-3}{p-3}^2 \binom{2p-4}{2} 2! [(p-3)!]^2 & p \geq 3 \end{cases} \tag{8}$$

因此由(5)~(8)式及容斥原理(见文[3])得 $K_{n,n} - A_3^{(j)}$ 中的 i 圈数为

$$C_{3,i}^{(1)} = \frac{1}{2} \binom{n}{p}^2 p [(p-1)!]^2 - 3 \binom{n-1}{p-1}^2 [(p-1)!]^2 + 3(2p-3)[(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2}^2$$

$$- \binom{n-3}{p-3} \binom{2p-4}{2} 2! [(p-3)!]^2 \quad (9)$$

注:当 $i=4, p=2$ 时(9)式中最后一项为 0.

(2) 在 $K_{n,n}[A_3^{(2)}]$ 中含一个 3 度点即 $K_{n,n}[A_3^{(2)}]$ (如图 1(2)).

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(2)}$ 的某两条边的阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2}$ 个,而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数由引理 1 得 $(p-1)[(p-2)!]^2$,又因为 $A_3^{(2)}$ 中含两条边的情形有 3 种,所以在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(2)}$ 的两条边的 i 圈数为

$$3 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1)[(p-2)!]^2 \quad (10)$$

又因为在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(2)}$ 中 3 条边的 i 圈数为 0,所以由(5),(6),(10)式及容斥原理得 $K_{n,n} - A_3^{(2)}$ 中的 i 圈数为

$$\begin{aligned} C_{3,i}^{(2)} &= \frac{1}{2} \binom{n}{p}^2 p [(p-1)!]^2 - 3 \binom{n-1}{p-1}^2 [(p-1)!]^2 \\ &\quad + 3 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1)[(p-2)!]^2 \end{aligned} \quad (11)$$

(3) 在 $K_{n,n}[A_3^{(3)}]$ 中只含一个 2 度点即 $K_{n,n}[A_3^{(3)}]$ (如图 1(3)).

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的某两条不相邻的边的情形. 此时阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-2}{p-2}$ 个,而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数由引理 1 得 $(2p-3)[(p-2)!]^2$,所以在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的某两条不相邻的边的 i 圈数为

$$(2p-3)[(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2} \quad (12)$$

又因为 $A_3^{(3)}$ 中含两条不相邻的边的情形有 2 种,所以在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的两条不相邻的边的 i 圈数为

$$2 \binom{n-2}{p-2}^2 (2p-3)[(p-2)!]^2 \quad (13)$$

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的某两条相邻的边的情形. 此时阶为 i 的完全偶子图 $K_{p,p}$ 有 $\binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2}$ 个,而每个这样的完全偶子图所含的 i 圈数由引理 1 得 $(p-1)[(p-2)!]^2$,所以 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 中两条相邻的边的 i 圈数为

$$\binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1)[(p-2)!]^2 \quad (14)$$

由(13),(14)式得 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 中两条边的 i 圈数为

$$2 \binom{n-2}{p-2}^2 (2p-3)[(p-2)!]^2 + \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1)[(p-2)!]^2 \quad (15)$$

又因为 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 中 3 条边的 i 圈数由引理 1 得

$$\begin{cases} 0 & \text{当 } p=2 \text{ 时} \\ 2[(p-2)!]^2 & \text{当 } p \geq 3 \text{ 时} \end{cases} \quad (16)$$

所以由(5),(6),(15)和(16)式及容斥原理得 $K_{n,n} - A_3^{(3)}$ 中的 i 圈数为

$$C_{3,i}^{(3)} = \frac{1}{2} \binom{n}{p}^2 p [(p-1)!]^2 - 3 \binom{n-1}{p-1} [(p-1)!]^2 + 2 \binom{n-2}{p-2}^2 (2p-3) [(p-2)!]^2 + \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 - 2 [(p-2)!]^2 \quad (17)$$

注: 当 $i = 4, p = 2$ 时, (17) 式中最后一项为 0.

(4) 在 $K_{n,n}[A_3]$ 中含两个 2 度点即 $K_{n,n}[A_3^{(4)}]$ (如图 1(4))

在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(4)}$ 的两条不相邻的边的 i 圈数为(12)式. 在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(4)}$ 的某两条相邻的边的 i 圈数为(14)式. 又因为 $A_3^{(4)}$ 中含两条相邻的边的情形有 2 种, 所以 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(4)}$ 的两条相邻的边的 i 圈数为

$$2 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 \quad (18)$$

因此 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(4)}$ 中两条边的 i 圈数由(12)和(18)式得

$$(2p-3) [(p-2)!]^2 \binom{n-2}{p-2}^2 + 2 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 \quad (19)$$

又因为在 $K_{n,n}$ 中含 $A_3^{(3)}$ 的 3 条边的 i 圈数由引理 1 得

$$[(p-2)!]^2 \quad (20)$$

所以由(5),(6),(19)和(20)式及容斥原理得 $K_{n,n} - A_3^{(4)}$ 中的 i 圈数为

$$C_{3,i}^{(4)} = \frac{1}{2} \binom{n}{p}^2 p [(p-1)!]^2 - 3 \binom{n-1}{p-1} [(p-1)!]^2 + \binom{n-2}{p-2}^2 (2p-3) [(p-2)!]^2 + 2 \binom{n-1}{p-1} \binom{n-2}{p-2} (p-1) [(p-2)!]^2 - [(p-2)!]^2 \quad (21)$$

证毕

定理 2 设 $A_3 \subseteq E(K_{n,n}), |A_3| = 3$ 且 $n \geq 5$ 则 $K_{n,n} - A_3$ 是由它的圈长分布确定的.

证 先证必要性. $K_{n,n} - A_3$ 的圈长分布为 $(C_{3,1}^{(1)}, C_{3,2}^{(1)}, \dots, C_{3,2n}^{(1)})$, 其中 $C_{3,i}^{(1)}$ 可由定理 1 中相应的公式得到. 且由表 1 可知当 $n \geq 5$ 时 $C_{3,6}^{(1)} < C_{3,6}^{(3)} < C_{3,6}^{(4)} < C_{3,6}^{(2)}$, 因此 $K_{n,n} - A_3$ 中 4 种情形下的圈长分布是不同的.

表 1 Tab. 1

情形	$K_{n,n} - A_3^{(i)}$ 的 6 圈数 $C_{3,6}^{(i)}$
$A_3^{(1)}$	$6 \binom{n}{3}^2 - 12 \binom{n-1}{2}^2 + 9(n-2)^2 - 2$
$A_3^{(2)}$	$6 \binom{n}{3}^2 - 12 \binom{n-1}{2}^2 + 3(n-1)(n-2)^2$
$A_3^{(3)}$	$6 \binom{n}{3}^2 - 12 \binom{n-1}{2}^2 + (n+5)(n-2)^2 - 2$
$A_3^{(4)}$	$6 \binom{n}{3}^2 - 12 \binom{n-1}{2}^2 + (2n+1)(n-2)^2 - 1$

再证充分性. 设 G 的圈长分布为 $(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ 其中 $c_i = C_{3,i}^{(j)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$), 即所有的

c_i 同时满足定理 1 中的某一式. 则 G 显然是简单偶图. 设 $V(G) = X \cup Y$ 使 G 的每条边的一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中. 由于

$$\begin{aligned} C_{3,2n}^{(1)} &= \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 3[(n-1)!]^2 + 3(2n-3)[(n-2)!]^2 \\ &\quad - \binom{2n-4}{2} \cdot 2 \cdot [(n-3)!]^2 \\ C_{3,2n}^{(2)} &= \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 3[(n-1)!]^2 + 3(n-1)[(n-2)!]^2 \\ C_{3,2n}^{(3)} &= \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 3[(n-1)!]^2 + 2(2n-3)[(n-2)!]^2 \\ &\quad + (n-1)[(n-2)!]^2 - 2[(n-2)!]^2 \\ C_{3,2n}^{(4)} &= \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 3[(n-1)!]^2 + (2n-3)[(n-2)!]^2 \\ &\quad + 2(n-1)[(n-2)!]^2 - 2[(n-2)!]^2 \end{aligned}$$

显然当 $n \geq 5$ 时有

$$C_{3,2n}^{(1)} > C_{3,2n}^{(3)} > C_{3,2n}^{(4)} > C_{3,2n}^{(2)} > 0 \quad (22)$$

又因为 G 中 $2n$ 圈数 C_n 必为 $C_{3,2n}^{(1)} \sim C_{3,2n}^{(4)}$ 之一, 所以 G 中 $2n$ 圈数大于 0, 因此 $|X| = |Y| = n$ 且 G 是二连通图.

又因为 $K_{n,n} - A_2$ 中所含的 $2n$ 圈数由容斥原理及引理 1 得

(i) A_2 中两边在 $K_{n,n}$ 中不相邻时为

$$C_{2,2n}^{(1)} = \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 2[(n-1)!]^2 + (2n-3)[(n-2)!]^2$$

(ii) A_2 中两边在 $K_{n,n}$ 中相邻时为

$$C_{2,2n}^{(2)} = \frac{1}{2}n[(n-1)!]^2 - 2[(n-1)!]^2 + (n-1)[(n-2)!]^2$$

显然当 $n \geq 5$ 时有

$$C_{2,2n}^{(1)} > C_{2,2n}^{(2)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } C_{2,2n}^{(2)} - C_{3,2n}^{(1)} &= \left\{ \frac{1}{2}n(n-1)!^2 - 2[(n-1)!]^2 + (n-1)[(n-2)!]^2 \right\} \\ &- \left\{ \frac{1}{2}n(n-1)!^2 - 3[(n-1)!]^2 + 3(2n-3)[(n-2)!]^2 - \binom{2n-4}{2} \cdot 2 \cdot [(n-3)!]^2 \right\} \\ &= (n^2 - 7n + 13 - \frac{2}{n-2})[(n-2)!]^2 > 0 \quad (\text{当 } n \geq 5 \text{ 时}) \end{aligned}$$

即

$$C_{2,2n}^{(2)} > C_{3,2n}^{(1)} \quad (24)$$

所以由(22), (23)和(24)式得 $G \neq K_{n,n} - A_2$ 显然 $G \neq K_{n,n} - A_1, G \neq K_{n,n}$.

若 $G \neq K_{n,n} - A_3$ 则 $G \in \{K_{n,n} - A_k | k \geq 4\}$, 设 G 的最大可能的 6 圈数为 M , 显然具有最大 6 圈数 M 的图 G 必满足 $G = K_{n,n} - A_4$. 又因为 A_4 在 $K_{n,n}$ 中的导出子图 $K_{n,n}[A_4]$ 仅有如下 10 种情形(图 2).

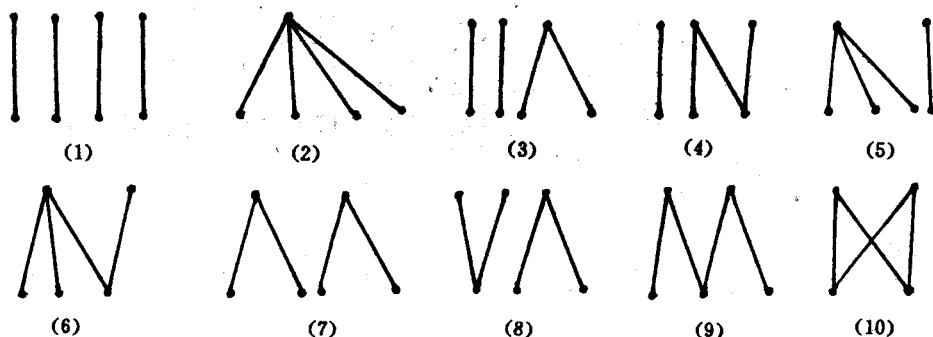


图2 Fig. 2

为了方便起见,将 $K_{n,n}[A_j]$ 中第(j)种情形记为 $K_{n,n}[A_j^{(j)}]$, 对应的 A_j 记为 $A_j^{(j)}$, $K_{n,n}$ 中含 $A_j^{(j)}$ 的 k 条边的 6 圈数记为 $a_{k,6}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, 10$). 由容斥原理可知 $K_{n,n} - A_j^{(j)}$ 中所含的 6 圈数为

$$C_{k,6}^{(j)} = a_{k,6}^{(j)} - a_{k-1,6}^{(j)} + a_{k-2,6}^{(j)} - a_{k-3,6}^{(j)} + a_{k-4,6}^{(j)}$$

再类似于定理 1 的证明,利用引理 1 可求得 $C_{k,6}^{(j)}$ (如表 2 所示). 表 2 中 $b = a_{0,6}^{(j)} - a_{1,6}^{(j)} = 6 \binom{n}{3} - 4 \binom{n-2}{2} \cdot (2!)^2$

表2 Tab. 2

情形	$K_{n,n} - A_j^{(j)}$ 的 6 圈数 $C_{k,6}^{(j)}$
$A_1^{(1)}$	$b + 3 \binom{n-2}{1} \binom{4}{2} - a_{2,6}^{(1)}$
$A_1^{(2)}$	$b + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \binom{4}{2}$
$A_1^{(3)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 5 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1}] - a_{2,6}^{(3)}$
$A_1^{(4)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 4 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 2] - a_{2,6}^{(4)} + 1$
$A_1^{(5)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 3 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 3] - a_{2,6}^{(5)}$
$A_1^{(6)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 2 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 4] - a_{2,6}^{(6)}$
$A_1^{(7)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 4 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 2] - a_{2,6}^{(7)}$
$A_1^{(8)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 4 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 2] - a_{2,6}^{(8)} + 2$
$A_1^{(9)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 3 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 3] - a_{2,6}^{(9)} + 1$
$A_1^{(10)}$	$b + [3 \binom{n-2}{1} \cdot 2 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \cdot 4] - a_{2,6}^{(10)}$

显然有

$$a_{2,6}^{(2)} > a_{2,6}^{(j)} > a_{4,6}^{(2)} \quad \forall j \neq 2$$

所以

$$C_{4,6}^{(2)} > C_{4,6}^{(j)} \quad \forall j \neq 2$$

因此 G 的最大可能的 6 圈数 $M = C_{4,6}^{(2)}$. 但 G 的 i 圈数应满足定理 1 中某公式, 因此 G 的 6 圈数必为表 1 中某个 $C_{3,6}^{(j)}$.

又因为

$$\begin{aligned} C_{3,6}^{(1)} - C_{4,6}^{(2)} &= \left[6 \binom{n}{3}^2 - 12 \binom{n-1}{2}^2 + 9(n-2)^2 - 2 \right] \\ &- \left[6 \binom{n}{3}^2 - 4 \binom{n-1}{2}^2 \cdot (2!)^2 + 2 \binom{n-1}{2} \binom{n-2}{1} \binom{4}{2} \right] \\ &= (n-4)^2(n-2)^2 - 2 > 0 \quad (n \geq 5) \end{aligned}$$

且当 $n \geq 5$ 时

$$C_{3,6}^{(1)} < C_{3,6}^{(j)} \quad (j = 2, 3, 4)$$

因此

$$C_{3,6}^{(j)} > M \quad (j = 1, 2, 3, 4) \text{ 矛盾.}$$

故

$$G = K_{n,n} - A_j^6 \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

证毕

参 考 文 献

- [1] 施永兵, Some problems of cycle length distribution, 南京大学学报(图论专辑), 1991, 27: 233~234
 [2] 施永兵, 关于给定偶图的 Hamilton 圈数的计算, 上海师范大学学报(自然科学版), 1987, 4
 [3] 卢开澄, 组合数学算法与分析(上册), 清华大学出版社, 1983, 149
 [4] 陆宗元, 几类由圈长分布确定的偶图, 上海师范大学学报(自然科学版), 1992, 4

Bipartite Graphs $K_{n,n} - A_3$ Determined by Their Cycle Length Distributions

Lu Zongyuan

(Department of Mathematics)

Abstract

The cycle length distribution of a graph G of order n is (c_1, c_2, \dots, c_n) , where c_i is the number of cycles of length i . In this paper, the following result is introduced: If $A_3 \subseteq E(K_{n,n})$, $|A_3| = 3$ and $n \geq |A_3| + 2$, then $K_{n,n} - A_3$ is determined by its cycle length distribution. In addition, a formula is given to calculate the cycle numbers for different situations in $K_{n,n} - A_3$.

Keywords cycle; cycle length distribution; bipartite graph; a bipartite graph determined by its cycle length distribution