第32卷第2期
2003年6月
上海师范大学学报(自然科学版)
Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences)
Vol. 32, No. 2
Jun. 2003

热传导方程辐射系数及初始条件反问题的数值求解

贾春霞[1]，谭永基[2]

(1. 上海师范大学 数理信息学院，上海 200234；2. 复旦大学 数学研究所，上海 200433)

摘　要：讨论用某一时刻的温度测量值及某一子区域中各时刻的温度测量值同时重构热传导方程的辐射系数和初始条件这一反问题的数值求解方法. 用最小二乘法，将此反问题化为一个变分问题，且将此变分问题离散化为一个非线性规划问题，其目标函数值依赖于热传导方程正问题的数值解. 同时用差分法和径向基函数(RBF)方法求正问题的数值解并导出相应目标函数的梯度公式，在此基础上用拟牛顿方法实现一般情形下的数值重构. 数值实验表明，这一方法是可行的.

关键词：反问题；拟牛顿法；RBF

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2003)02-0028-05

1 问题介绍

考察具有辐射项的热传导方程的初—边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + p(x)u & \text{在 } \Omega \times (0,T) \text{ 中} \qquad (1.1)\\
u(x,0) = \mu(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中} \qquad (1.2)\\
u(x,t) = \eta(x,t), & \text{在 } \partial\Omega \times (0,T) \text{ 中} \qquad (1.3)
\end{cases}
$$

其中 $u = u(x,t)$ 为未知温度函数，$p(x)$ 为辐射系数，Ω 为 $R^d(d = 1,2,3)$ 中的有界开集，其边界 $\partial\Omega$ 为分片光滑的.

下面研究同时确定上述初－边值问题(1.1)～(1.3)中的辐射系数 $p(x)$ 和初始温度 $\mu(x)$ 这一反问题的数值解法. 众所周知，用某个时刻 $\tau(>0)$ 的温度测量值确定初始温度是一个不稳定的问题，是严重病态的，因此更不能指望仅用时刻 τ 的温度测量值去同时确定初始温度和辐射系数. M. Yamamoto 等提出了用时刻 τ 的温度测量值加上 Ω 的一个子区域 ω 上各个时刻的温度测量值来同时重构 $\mu(x)$ 和 $p(x)$ 的想法，并证明了这一问题的条件稳定性，并化为变分问题用有限元离散化并用梯度法实现了数值重构.

令 $\psi_\tau(x)$ 为 $u(x,\tau)$ 的测量值，$\psi(x,t)$ 为 $u(x,t)$ 在 $\omega \times (0,\tau)$ 的测量值. 同时确定 $p(x)$ 和 $\mu(x)$ 的问题可以归结为求 $(p(x),\mu(x),u(x,t))$ 使其满足(1.1),(1.2),(1.3)并成立

收稿日期：2002-10-29

作者简介：贾春霞(1976-)，女，上海师范大学数理信息学院助教. 谭永基(1943-)，男，复旦大学数学研究所教授，博士生导师。

$$\begin{cases} u(x,\tau) = \psi_\tau(x), & x \in \Omega \quad (1.4) \\ u(x,t) = \psi(x,t), & (x,t) \in \omega \times (0,\tau) \quad (1.5) \end{cases}$$

由最小二乘法，问题可进一步化为在约束条件(1.1) ~ (1.3)下，极小化泛函

$$Q(p(x),\mu(x)) = \int_\Omega (u(x,\tau) - \psi_\tau(x))^2 \mathrm{d}x + \int_0^\tau \int_\Omega (u(x,t) - \psi(x,t))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{1.6}$$

在本文中，对于给定的离散化的 $p(x)$ 和 $\mu(x)$，分别用差分法和 RBF 方法数值求解边值问题(1.1) ~ (1.3)从而获得 $Q(p,\mu)$ 的离散值. 在推导了离散 $Q(p,\mu)$ 的梯度公式后用拟牛顿法实现了对 p 和 μ 的重构.

2 用拟牛顿法求离散泛函的极小值

考察 $p(x)$ 和 $\mu(x)$ 在 Ω 上离散节点集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 上的近似值 $p_i = p(x_i),\mu_i = \mu(x_i)$. 当 p_i, $\mu_i(i=1,2,\cdots,N)$ 给定后，通过数值求解得到在各节点在离散时间点 t_j 上的温度值 $u(x_i,t_j)$，从而可求出泛函 $Q(p,\mu)$ 的近似值. 因此 $Q(p,\mu)$ 可以表示为 $Q(p_1,p_2,\cdots,p_N,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)$. 令

$$\rho = (p_1,p_2,\cdots,p_N,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_N)'$$

极小化的目标函数可写为

$$Q = Q(\rho) \tag{2.1}$$

拟牛顿方法[2]为通过一系列的迭代 $\rho^0,\rho^1,\cdots$ 逼近 $Q(\rho)$ 的极小值点. 在 k 次迭代时选取的下降方向为

$$d^k = -[\nabla^2 Q(\rho^k)]^{-1} \nabla Q(\rho^k) \tag{2.2}$$

其中 $\nabla^2 Q(\rho^k)$ 为 $Q(\rho)$ 的 Hesse 矩阵在 ρ^k 处的值. 用 H^k 来近似 $\nabla^2 Q(\rho^k)$，而 H^k 可用 BFGS 公式进行迭代修正:

$$H^k = H^{k-1} + \frac{(s_{k-1} - H^{k-1}y_{k-1})(s_{k-1} - H^{k-1}y_{k-1})'}{(s_{k-1} - H^{k-1}y_{k-1})'y_{k-1}} \tag{2.3}$$

其中

$$s_k = \rho^{k+1} - \rho^k,\ y_k = \nabla Q(\rho^{k+1}) - \nabla Q(\rho^k) \tag{2.4}$$

这样,拟牛顿法的主要计算步骤为:

(1) 初始化:选取适当的初始点 $\rho^0 \in R^N$，令 $H^0 = I$, $k=0$，计算 $Q(\rho^0)$ 和 $\nabla Q(\rho^0)$;

(2) 计算最速下降方向 $d^k = -H^k \nabla Q(\rho^k)$;

(3) 一维搜索: 解一维最优化问题

$$\min_{t>0} Q(\rho^k + td^k)$$

求出 $t = t^k$,令 $\rho^{k+1} = \rho^k + t^k d^k$;

(4) 更新矩阵 H^k:用 BFGS 公式(2.3)修正 H^k，得到 H^{k+1};

(5) 计算 $\nabla Q(\rho^{k+1})$，若 $\| \nabla Q(\rho^{k+1}) \| < \varepsilon$(给定的小量),计算结束,否则转向2.

为实现上述计算，主要是计算 $Q(\rho^k)$ 和 $\nabla Q(\rho^k)$. 特别是 $\nabla Q(\rho^k)$ 的计算工作量较大，例如用有限元法，$\nabla Q(\rho^k)$ 的计算通常用灵敏系数法或伴随算子法实现,但需求解多个线性代数方程组，但用差分法或 RBF，梯度的计算就简单的多了.

3 目标函数及其梯度的计算

3.1 RBF 方法

设 $g(x)$ 是一个给定的一元函数，取

$$g_j(x) = g(\|x - x_j\|) \quad j = 1,\cdots,N \tag{3.1}$$

为一组径向基，其中 $x_1,\cdots,x_N$ 是一组给定的节点. 令

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t) g_j(x) \tag{3.2}$$

将其代入(1.1),(1.3),(1.5)式，并将 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,n\triangle t)$ 离散为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\triangle t} = \frac{u(x_i,(n+1)\triangle t) - u(x_i,n\triangle t)}{\triangle t} \tag{3.3}$$

则(1.1),(1.3),(1.5)式化为

$$u_i^{n+1} = \triangle t \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \triangle g_j(x_i) + (1 + \triangle t\, p_i) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \triangle g_j(x_i), \tag{3.4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n g_j(x_i) = \eta(x_i,n\triangle t), \quad x_i \in \partial\Omega, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n g_j(x_i) = \psi(x_i,n\triangle t), \quad x_i \in \Omega. \tag{3.6}$$

(3.2)可离散为

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n g_j(x_i) = u_i^n \tag{3.7}$$

由(3.5)~(3.7)式确定 α_j^n，然后再由(3.4)式推出 u_i^{n+1}. (3.5)~(3.7)式可写成矩阵形式

$$\tilde{A}\alpha^n = R^n \tag{3.8}$$

其中

$$\alpha^n = (\alpha_1^n,\alpha_2^n,\cdots,\alpha_N^n) \tag{3.9}$$

(3.4)式的矩阵形式为

$$U^{n+1} = \triangle t \cdot B \cdot \alpha^n + G \cdot A \cdot \alpha^n \tag{3.10}$$

其中

$$U^n = (u_1^n,u_2^n,\cdots,u_N^n)' \tag{3.11}$$

u_j^n 为递推 n 次后 u 在第 j 个节点的值，$\tilde{A}$ 与 B 均为只与节点坐标有关的矩阵. G 为对角阵，对角元素 $G(j,j) = 1 + \triangle t \cdot p_j$.

由上可以循环推出 U^{n+1} 关于参数的导数，再由 $\frac{\partial Q}{\partial \rho_j} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (u_i^c(\rho) - u_i^m) \frac{\partial u_i}{\partial \rho_j}$ 就可以求出 $\nabla Q(\rho)$.

3.2 差分法

以一维热传导方程为例，给出显式差分离散时梯度的表达式，为方便起见，取 $\Omega = (0,1)$，边界条件(1.3)成为

$$u(0,t) = \eta_1(t),\ u(1,t) = \eta_2(t)$$

方程(1.1)的差分格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{k^2} + p_j u_j^n$$

所以:

$$u_j^{n+1} = Au_{j-1}^n + Bu_j^n + Cu_{j+1}^n, \tag{3.12}$$

其中: $A = \frac{h}{k^2}$, $B = 1 + hp_j - \frac{2h}{k^2}$, $C = \frac{h}{k^2}$. 设内部节点数为 N，由上面公式，易得

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & B & C & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{N-1}^n \\ u_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\,u_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C\,u_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

记为

$$U^{n+1} = D(p)U^n + R^n \tag{3.13}$$

其中

$$D(p) = \begin{bmatrix} B & C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A & B & C & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & C \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A & B \end{bmatrix}, \quad R^n = \begin{bmatrix} Au_0^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Cu_{N+1}^n \end{bmatrix}, \quad U^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \\ u_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

由(3.13)很容易写出：

$$U^s = D^s(p)U^0 + D^{s-1}(p)R^1 + \cdots + D(p)R^{s-1} + R^s \tag{3.14}$$

从(3.14)可以看出，$\frac{\partial U^s}{\partial p_j} = \frac{\partial U^s}{\partial D(p)} \cdot \frac{\partial D(p)}{\partial p_j}$，其中 $\frac{\partial U^s}{\partial D(p)}$ 与 $\frac{\partial D(p)}{\partial p_j}$ 都很容易由 U^s 及 $D(p)$ 的表达式求解出来；在 U^s 的表达式中，只有 U^0 与初始值有关，故 U^s 关于初值的导数也易求出，从而可以求出 Q 的梯度.

4　数值结果

本小节将给出用前述方法求解反问题的数值实例. 本节考虑一维的情形，取 $\Omega = (0,1)$, $\omega = (0.4, 0.6)$

例　p 为常数的情形. 设 $\eta_1(t) = \exp(4t)$, $\eta_2(t) = \exp(1+4t)$，此时方程的精确解为 $u = \exp(x+4t)$. 由解的表达式可知：

$$\psi(x,t) = \exp(x+4t), \quad \psi_\tau(x) = \exp(x+4\tau)$$

表1　差分法的结果

	精确值	初值	计算结果	相对误差
p	3	10.5	3.0189	0.0063
μ_2	1.1052	10	1.1049	0.0003
μ_3	1.2214	10	1.2214	0
μ_4	1.3499	10	1.3495	0.0003
μ_8	2.0138	14	2.0127	0.0005
μ_9	2.2255	14	2.2264	0.0004
μ_{10}	2.4596	14	2.4583	0.0005

表 2 配置法的结果

	精确值	初值	计算结果	相对误差
p	3	10	3.0710	0.0237
u_2	1.1052	-10	1.0991	0.0055
u_3	1.2214	-13	1.1755	0.0376
u_4	1.3499	-9.6	1.3334	0.0122
u_8	2.0138	-7.3	1.9581	0.0277
u_9	2.2255	-17.2	2.2872	0.0277
u_{10}	2.4596	-21.8	2.3419	0.0479

表 1 和表 2 分别给出了利用差分格式和配置法所得到的结果.

5 结束语

对数理方程反问题的研究是一门新兴的数学分枝,本文主要讨论分别利用差分格式和径向基方法求解非线性抛物方程的反问题,获得了较为满意的结果.

当然反问题的研究还有许多尚待完善的地方,如反问题的存在性、唯一性和稳定性等.

参考文献:

[1] PILANT M S, RUNDELL W. An inverse problem for a nonlinear parabolic equation[J]. Commun Partial Differ Equations, 1986,11: 445-457.

[2] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社.

[3] 谭永基,张建峰,李晶. 多电极成像测井反演问题的数学模型和数学方法[J]. 高校应用数学学报 A 辑,2000,15(3):317-325.

[4] 李功胜, 马逸尘. 热传导反问题中非线性热源的存在性[J]. 物理数学学报, 2000, 20(1): 48-57.

Inverse Problem of Reconstructing the Heat-conduction Equation's Initial Value and the Radiative Coefficient

JIA Chun-xia[1], TAN Yong-ji[2]

(1. Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;

2. Department of Mathematics, Fundan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: A numerical method of reconstructing the radiative coefficient and initial condition simultaneously by measuring the domain temperature at a fixed time and the temperature of a subdomain all the time is studied. By the least-square technique, this inverse problem can be transformed into a variational problem and discretized into a nonlinear programming problem with the cost function depending on the numerical solution of the corresponding direct problem of heat equation. The numerical solution of the direct problem is obtained by the finite difference method and the radial basis function(RBF) method respectively and the gradient formula for cost function is derived. Then the numerical reconstruction is realized by the quasi-Newton technique. Numerical results show that this method is available.

Key words: inverse problem; quasi-Newton method; RBF