第23卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 23, No. 2
1997年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA March, 1997

短文

多变量传递函数矩阵辨识的二级 QR 分解快速递推算法

孟晓风 王行仁
(北京航空航天大学自动控制系 北京 100083)

摘 要 提出一种多变量传递函数矩阵辨识的二级 QR 分解算法，避免了子系统辨识方法对可测数据的重复处理；在不扩大维数的条件下，获得使总体损失函数最小的估计值. 该算法与 HOUSEHOLDER 变换的快速递推算法结合，不仅大大地减少了辨识所需的运算量，而且可减少 LS 算法中增益矩阵计算的误差积累和传递，提高辨识精度.

关键词 多变量系统，系统辨识，参数估计，QR 分解，快速递推算法，传递函数矩阵.

1 引言

用传递函数矩阵描述的多变量过程为

$$A(z^{-1})Z(k) = B(z^{-1})U(k) + V(k) \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a(1)z^{-1} + \cdots + a(n)z^{-n}, \\ B(z^{-1}) = (B_{ij}(z^{-1})) = b_{ij}(1)z^{-1} + \cdots + b_{ij}(n)z^{-n}, \\ Z(k) = [z_1(k)\cdots z_m(k)]^\tau, \quad U(k) = [u_1(k)\cdots u_r(k)]^\tau, \\ V(k) = A(z^{-1})W(k), \quad W(k) = [w_1(k)\cdots w_m(k)]^\tau, \end{cases} \tag{2}$$

$w_i(k)(i=1,2\cdots,m)$是均值为零，方差为 σ_w^2的互不相关测量噪声. 由于传递函数矩阵可以直接利用可测的输入输出数据进行辨识，并可根据需要转换对应的状态方程模型，因此是多变量过程辨识中经常采用的模型之一. 目前，传递函数矩阵的辨识大多采用子系统辨识方法，即令

$$\begin{cases} a = [a(1)\cdots a(n)]^\tau, \quad b_{ij} = [b_{ij}(1)\cdots b_{ij}(n)]^\tau, \\ \psi_i = [b_{i1}^\tau\cdots b_{ir}^\tau]^\tau, \quad \theta_i = [\psi_i^\tau, a^\tau]^\tau, \\ U_j(k) = [u_j(k-1)\cdots u_j(k-n)]^\tau, \\ \overline{U}(k) = [U_1^\tau(k)\cdots U_r^\tau(k)]^\tau, \\ Z_i(k) = [-z_i(k-1)\cdots -z_i(k-n)]^\tau, \end{cases} \tag{3}$$

将(1)式分解成 m 个子系统来描述

收稿日期：1994-12-15

$$\begin{cases} z_i(k) = \overline{U}^{\tau}(k)\psi_i + Z_i^{\tau}(k)a + v_i(k), \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{4}$$

并且视它们为相互独立的,以各子系统的损失函数分别达最小为目标进行辨识.这种方法的主要优点是,可直接利用各种单变量过程的辨识算法.然而,各子系统分别处理,不可避免地存在可测量信息的重复处理,计算量很大.另外,由于每个子系统的待估计参数中都包含有多项式参数 a,是相关的;各子系统的估计值不相等,最后的结果只好取平均.显然,这种方法估计出的参数值不是最好的结果.通过对子系统维数的扩大,(4)式可改写为[1]

$$Z(k) = H(k)\cdot\theta + v(k), \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} H(k) = \begin{bmatrix} Z_1^{\tau}(k) & \overline{U}^{\tau}(k) & 0 & \cdots & 0 \\ Z_2^{\tau}(k) & 0 & \overline{U}^{\tau}(k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_m^{\tau}(k) & 0 & 0 & \cdots & \overline{U}^{\tau}(k) \end{bmatrix} \\ \theta = [a^{\tau},\psi_1^{\tau},\psi_2^{\tau},\cdots\psi_m^{\tau}]^{\tau} \end{cases} \tag{6}$$

根据最小二乘原理,模型参数 θ 的最小二乘估计递推算法为[1—3]

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)[Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)], \\ K(k) = P(k-1)H^{\tau}(k)[H(k)P(k-1)H^{\tau}(k) + I_m]^{-1}, \\ P(k) = [I_{m(mr+1)} - K(k)H(k)]P(k-1). \end{cases} \tag{7}$$

一种按子系统依次递推的方法[3]可以避免上式中的 m 维矩阵求逆.这种方法直接以总体损失函数

$$J(\theta,L) = \sum_{i=1}^{m} J_i(\theta_i,L) \tag{8}$$

最小为目标(其中,$J_i(\theta_i,L)$是第 i 个子系统的最小二乘估计的损失函数,L 是测量数据长度),一次获得所有模型参数的估计值.然而,由于子系统维数的扩大,计算量将进一步增加.

本文将研究多变量传递函数阵辨识的 QR 分解算法,以在不扩大子系统维数、无可测量信息的重复处理的条件下,获得使总体损失函数最小的参数估计值.

2 二级 QR 分解算法原理

根据(3)式的定义,令

$$\begin{cases} Q(k) = (\overline{U}(1),\overline{U}(2),\cdots,\overline{U}(k))^{\tau}, \\ \begin{cases} \overline{Z}_i(k) = (Z_i(1),Z_i(2),\cdots,Z_i(k))^{\tau}, \\ Y_i(k) = (-z_i(1), -z_i(2),\cdots, -z_i(k))^{\tau}, \\ \chi_i = (\psi_i^{\tau},a^{\tau},1)^{\tau}, \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

$(k>nr+n)$,则第 i 个子系统最小二乘估计的损失函数为

$$\begin{cases} J_i(\theta_i,k) = \|(Q(k),\overline{Z}_i(k),Y_i(k))\chi_i\|_2^2, \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{10}$$

总体损失函数为

$$J(\theta,k) = \sum_{i=1}^{m}\|(Q(k),\overline{Z}_i(k),Y_i(k))\chi_i\|_2^2, \tag{11}$$

对于过程输入信息阵 $Q(k)$,存在正交变换阵 $T_u(k)$,使其上三角化,即

$$T_u(k)Q(k) = (R_u^\tau(k),O)^\tau, \tag{12}$$

式中 $R_u(k)\in R^{nr\times nr}$为上三角阵,$O$ 是零矩阵.

令

$$\begin{cases} T_u(k)\overline{Z}_i(k) = (C_{i11}^\tau(k),D_{i21}^\tau(k))^\tau, \\ T_u(k)Y_i(k) = (C_{i12}^\tau(k),D_{i22}^\tau(k))^\tau, \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $C_{i11}(k)\in R^{nr\times n}$,$D_{i21}(k)\in R^{(k-nr)\times n}$,$C_{i12}(k)\in R^{nr\times 1}$, $C_{i22}(k)\in R^{(k-nr)\times 1}$.

根据第一级 QR 分解运算的结果,构造矩阵

$$\begin{cases} \overline{D}_1(k) = (D_{121}^\tau(k),\cdots,D_{m21}^\tau(k))^\tau, \\ \overline{D}_2(k) = (D_{122}^\tau(k),\cdots,D_{m22}^\tau(k))^\tau, \\ \overline{D}(k) = (\overline{D}_1(k),\overline{D}_2(k)). \end{cases} \tag{14}$$

对于信息阵 $\overline{D}(k)$,存在正交变换阵 $T_d(k)$,使其上三角化,即

$$T_d(k)\overline{D}(k) = \begin{bmatrix} R_c(k) & e(k) \\ 0 & \varepsilon(k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

式中 $R_c(k)\in R^{n\times n}$,$e(k)\in R^{n\times 1}$,$\varepsilon(k)\in R^{1\times 1}$.

定理1. 若按 (9),(12)—(15)式定义信息阵及其相应的正交变换,则总体损失函数可化为

$$\begin{aligned} J(\theta,k) =& \sum_{i=1}^{m}\|R_u(k)\psi_i + C_{i11}(k)a + C_{i12}(k)\|_2^2 \\ &+ \|R_c(k)a + e(k)\|_2^2 + \varepsilon^2(k), \end{aligned} \tag{16}$$

并且使其最小的解为

$$\begin{cases} \hat{a}(k) = - R_a^{-1}(k)e(k), \\ \begin{cases} \hat{\psi}_i(k) = - R_u^{-1}(k)(C_{i11}(k)\hat{a}(k) + C_{i12}(k)), \\ i = 1,2,\cdots,m, \end{cases} \\ \hat{J}(\hat{\theta},k) = \varepsilon^2(k). \end{cases} \tag{17}$$

限于篇幅,证明略.

显然,按定理1提供的方法处理(4)式所描述的多输出最小二乘问题,对各子系统公有的信息矩阵 $Q(K)$只做一次处理,而不是 m 次,避免了子系统辨识算法对该部分信息的重复处理,可大大减少辨识所需的运算量;并且,没有扩大子系统维数就获得了使总体损失函数最小的参数估计值.

3　二级 QR 分解递推算法

当新添数据时，总体损失函数

$$J(\theta,k+1)=J(\theta,k)+\sum_{i=1}^{m}\|(\bar{U}_{\tau}(k+1)\quad Z_i^{\tau}(k+1)-z_i(k+1))\chi_i\|_2^2,\tag{18}$$

构造矩阵

$$\begin{cases}F_u(k+1)=(R_u^{\tau}(k),\bar{U}(k+1))^{\tau},\\ \begin{cases}F_{zi}(k+1)=(C_{i11}^{\tau}(k),Z_i(k+1))^{\tau},\\ E_{zi}(k+1)=(C_{i12}^{\tau}(k),-z_i(k+1))\tau,\\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}\end{cases}\tag{19}$$

对于 $F_u(k+1)$，有正交变换阵 $T_u(k+1)$，使其上三角化，即

$$F_u(k+1)F_u(k+1)=(R_u^{\tau}(k+1),O)^{\tau}.\tag{20}$$

令

$$\begin{cases}T_u(k+1)F_{zi}(k+1)=(C_{i11}^{\tau}(k+1),C_{i21}^{\tau}(k+1))^{\tau},\\ T_u(k+1)E_{zi}(k+1)=(C_{i12}^{\tau}(k+1),C_{i22}^{\tau}(k+1))^{\tau},\\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}\tag{21}$$

其中 $C_{i21}(k+1)\in R^{1\times n}$、$C_{i22}(k+1)\in R^{1\times 1}$.

根据第一级 QR 分解运算的结果，构造矩阵

$$\begin{cases}\bar{C}_1(k+1)=(C_{121}^{\tau}(k+1),\cdots,C_{m21}^{\tau}(k+1))^{\tau},\\ \bar{C}_2(k+1)=(C_{122}(k+1),\cdots,C_{m22}(k+1))^{\tau},\\ F_c(k+1)=\begin{bmatrix}R_c(k) & e(k)\\ \bar{C}_1(k+1) & \bar{C}_2(k+1)\end{bmatrix}.\end{cases}\tag{22}$$

对于信息阵 $F_c(k+1)$，存在正交变换阵 $T_c(k+1)$，使其上三角化，即

$$T_c(k+1)F_c(k+1)=\begin{bmatrix}R_c(k+1) & e(k+1)\\ 0 & \varepsilon(k+1)\\ 0 & 0\end{bmatrix}\tag{23}$$

定理2. 若按(19)—(23)式定义信息阵及其相应的正交变换，则总体损失函数可化为

$$\begin{aligned}J(\theta,k+1)=&\sum_{i=1}^{m}\|R_u(k+1)\psi_i+C_{i11}(k+1)a+C_{i12}(k+1)\|_2^2\\ &+\|R_c(k+1)a+e(k+1)\|_2^2+\varepsilon^2(k+1)+\hat{J}(\hat{\theta},k),\end{aligned}\tag{24}$$

并且使其最小的解为

$$\begin{cases}\hat{a}(k+1)=-R_e^{-1}(k+1)e(k+1),\\ \begin{cases}\hat{\psi}_i(k+1)=-R_u^{-1}(k+1)(C_{i11}(k+1)\hat{a}(k+1)+C_{i12}(k+1)),\\ i=1,2,\cdots,m,\end{cases}\\ \hat{J}(\hat{\theta},k+1)=\varepsilon^2(k+1)+\hat{J}(\hat{\theta},k).\end{cases}\tag{25}$$

限于篇幅，证明略.

综合上述，(4)式所描述的多输出最小二乘问题的二级 QR 分解递推算法表达为(简称 TFM-TQRRA)：

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{F}_u(k+1)=\begin{bmatrix} R_u(k) & C_{111}(k) & \cdots & C_{m11}(k) & C_{112}(k) & \cdots & C_{m12}(k) \\ \overline{U}^\tau(k+1) & Z_1^\tau(k+1) & \cdots & Z_m^\tau(k+1) & -z_1(k+1) & \cdots & -z_m(k+1)\end{bmatrix},\\
&T_u(k+1)\overline{F}_u(k+1)=\begin{bmatrix} R_u(k+1) & C_{111}(k+1)\cdots C_{m11}(k+1) & C_{112}(k+1)\cdots C_{m12}(k+1) \\ 0 & C_{121}(k+1)\cdots C_{m21}(k+1) & C_{122}(k+1)\cdots C_{m22}(k+1)\end{bmatrix},\\
&T_c(k+1)\begin{bmatrix} R_c(k) & e(k) \\ C_{121}(k+1) & C_{122}(k+1) \\ C_{221}(k+1) & C_{222}(k+1) \\ \vdots & \vdots \\ C_{m21}(k+1) & C_{m22}(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_c(k+1) & e(k+1) \\ 0 & \varepsilon(k+1) \\ 0 & 0\end{bmatrix},\\
&(25)\text{式}.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

递推初值 $R_u(0)=\beta^2 I_{nr}$,$R_c(0)=\beta^2 I_n$,$C_{i11}(0)=0$,$C_{i12}(0)=0$,$e(0)=0$,β 为充分小的实数.

TFM-TQRRA 算法表明,(4)式所描述的多输出最小二乘问题的递推算法可通过二级 QR 分解来实现:第1级 QR 分解对各个子系统公有的新添数据进行处理,使包括全部可测数据的信息矩阵 $\overline{F}_u(k+1)$的前 nr 列上三角化;第2级 QR 分解对各个子系统公有的多项式参数 a 进行估计,相当于用 QR 分解法求解一个低维的多输出过程的最小二乘问题

$$\begin{cases} J(a,k) = \|R_c(k)a + e(k)\|_2^2 + \hat{J}(\hat{\theta},k), \\ J(a,k+1) = J(a,k) + \|\overline{C}_1(k+1)a + \overline{C}_2(k+1)\|_2^2, \end{cases} \tag{27}$$

测量新数据$\{u_i(k+1),i=1,2,\cdots,r;\quad z_j(k+1),j=1,2,\cdots,m\}$通过中间数据 $\{C_{i21}(k+1),C_{i22}(k+1),i=1,2,\cdots,m.\}$影响参数 a 的估计值.

4　二级 QR 分解递推算法的 H-变换实现

TFM-TQRRA 算法中第1级 QR 分解所需的正交变换 $T_u(k+1)$可直接采用文献[4]提出的 H-变换快速递推公式,只需用信息矩阵 $\overline{F}_u(k+1)$ 的实际行、列数替换原公式中的行、列数. 第1级正交变换过程引入行公因子后,产生的中间数据$\{C_{i21}(k+1),C_{i22}(k+1)\}$带有公因子 $w_{nr+1}^{1/2}(k+1)$. 因此,第2级求解过程相当于求解一个低维的带权因子 $w_{nr+1}^{1/2}(k+1)$ 的多输出最小二乘问题,即

$$\begin{cases} J(a,k) = \|R_c(k)a + e(k)\|_2^2 + \hat{J}(\hat{\theta},k), \\ J(a,k+1) = J(a,k) + w_{nr+1}(k+1)\|\overline{C}_1(k+1)a + \overline{C}_2(k+1)\|_2^2. \end{cases} \tag{28}$$

第2级 QR 分解所需的正交变换 $T_c(k+1)$可通过使用 m 次 H-变换快速递推公式来实现(限于篇幅,详细推导与具体公式略).

5　性能比较

采用 H- 变换快速递推公式,TFM-TQRRA 算法所需的运算量如表1所示.

表1 TFM-TQRRA(26)算法的运算量

	加、减法	乘、除法
第1级 QR 分解	$nr(1+nr+2nm+2m)$	$nr(6+nr+2nm+2m)$
第2级 QR 分解	$mn(3+n)$	$mn(8+n)$

采用常规的 RLS 算法递推计算增益矩阵的运算量如表2所示.

表2 RLS 算法的运算量

	加、减法	乘、除法
子系统损失函数最小	$mn(r+1)(2nr+2n+1)$	$2mn(r+1)(nr+n+1)$
按子系统递推算法[3]	$mn(rm+1)[2nrm+2n+1]$	$2mn(rm+1)(nrm+n+1)$

显然,TFM-TQRRA 算法的运算量大大少于常规的 RLS 算法. 例如,$m=3$、$r=3$、$n=4$ 时,按子系统递推的 RLS 算法所需的乘法运算量为 9840,TFM-TQRRA 算法所需的乘法运算量为 720,后者比前者减少 92.68%. 另外,TFM-TQRRA 算法是基于正交变换,其数值稳定性也优于常规的 RLS 算法.

参 考 文 献

[1] Sen A, Sinha N K. On-line estimation of the parameters of a multivariable system using matix pseudo-inverse, *Int. J. Syst. Sci.*, 1976, **7**: 461—471.

[2] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive Filtering, Prediction And Control. Prentice-Hall, New Jersey; INC, Englewood Cliffs, 1984, 94—97.

[3] 方崇智,萧德云. 过程辨识. 北京:清华大学出版社,1989. 424—430.

[4] 孟晓风,王行仁,黄俊钦. 最小二乘估计的 HOUSEHOLDER 变换快速递推算法. 自动化学报. 1994, **20**. (1): 20—27.

A FAST RECURSIVE ALGORITHM WITH TWO-GRADE QR EDCOMPOSITION FOR MULTIVARIABLE TRANSFER FRNCTION MATRIX IDENTIFICATION

MENG XIAOFENG WANG XINGREN

(*Dept. of Automatic Control, Beijing University of Aero. and Astro.*, *Beijing* 100083)

Abstract In this paper, a fast recursive algorithm with two-grade QR decomposition for multivarible transfer function matrix identification is presented. By using the algorithm, repeatedly processing of the measured data of subsystems identification algorithms can be avoided, and without expanding of parameter vector dimension, a parameter estimation that minimizes the overall cost function can be obtained by using this algorithm. Combined with the fast HOUSEHOLDER transformation, this algorithm has better numerical stability and can enhance the estimation accuracy.

Key words Multivariable system, system identification, parameter estimation, QR decomposition, fast recursive algorithm, multivariable transfer function matrix.