第19卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 5
1993 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1993

短 文

多变量系统传输零点的计算[1)]

叶 庆 凯
(北京大学力学系, 100871)

摘 要

本文使用奇异值分解和 QR 分解方法来计算多变量系统的传输零点,给出了具体算法以及算例.

关键词: 传输零点,奇异值分解, QR 分解.

一、前 言

在多变量线性系统的分析中,传输零点的计算是一个重要课题.

设所考虑的线性系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}. \tag{2}$$

它的传递函数矩阵是

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \tag{3}$$

此系统的传输零点定义为 $G(s)$ 的零点, 即它的麦克米伦型的分子多项式的零点[1]. 还可以证明,此系统的零点即多项式矩阵

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \tag{4}$$

的史密斯型的零点[1],或简称多项式矩阵 $S(\lambda)$ 的零点.

在矩阵D为非奇异时,为求系统(1),(2)的传输零点, 可以求它的逆系统的极点. 众所周知,这就是求矩阵

$$A - BD^{-1}C \tag{5}$$

的特征值. 一般说来,这没有特殊困难. 但是,很多情况下,矩阵D是奇异的. 文献[2,3]中用选主元素的 QR 算法以及 QZ 算法来进行处理, 计算比较复杂. 本文采用奇异值分解和 QR 分解来处理. 算例表明,同样取得了较好的结果.

本文于1992年5月22日收到
1) 国家自然科学基金资助课题

二、多项式矩阵的等价变换

定义：对于两个多项式矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$，若存在单模矩阵 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 使得

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 是等价的。

定理 1[4]. 等价的多项式矩阵有相同的史密斯型，因而有相同的零点。

定理 2. 若多项式矩阵中有一些全为零的行或列，将这些行或列删去不会改变它的零点。

推论 1. 多项式矩阵(4)与下列矩阵

$$\begin{bmatrix} I & O \\ O & U \end{bmatrix} S(\lambda) \begin{bmatrix} I & O \\ O & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - A & BV \\ -UC & UDV \end{bmatrix}$$

有相同的零点，其中 U,V 为正交矩阵。这称为用正交矩阵 U,V 对多项式矩阵 $S(\lambda)$ 进行第一类等价变换。

推论 2. 多项式矩阵(4)与下列矩阵

$$\begin{bmatrix} T & O \\ O & I \end{bmatrix} S(\lambda) \begin{bmatrix} T' & O \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - TAT' & TB \\ -CT' & D \end{bmatrix}$$

有相同的零点，其中 T 为正交矩阵。这称为用正交矩阵 T 对多项式矩阵 $S(\lambda)$ 进行第二类等价变换。

推论 3. 适当交换多项式矩阵 $S(\lambda)$ 的一些行或列不改变它的零点。

推论 4. 多项式矩阵 $S(\lambda)$ 与它的转置 $S'(\lambda)$（其对应的系统为原系统的对偶系统 (A', C', B', D')）有相同的零点。

推论 5. 若多项式矩阵 $S(\lambda)$ 的第 m 列为 e_i（即除第 i 个元素外其余元素均为零），则可删去第 m 列及第 i 行而不改变矩阵的零点。

三、算　　法

1）确定矩阵 A 的维数 n，矩阵 B 的列数 m 以及矩阵 C 的行数 p。

2）若 p 为零或 m 为零，置 $r=0$；否则，对矩阵 D 进行奇异值分解，即求得正交矩阵 U 及 V 使得

$$D_1 = U'DV = \begin{bmatrix} D_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

其中 D_r 为 r 维对角矩阵，其秩为 r。用正交矩阵 U' 及 V 对多项式矩阵 $S(\lambda)$ 进行第一类等价变换，得到多项式矩阵 $S_1(\lambda)$，记相应的系统为 (A, B_1, C_1, D_1)。

3）若 $r=m$ 且 $p=m$，进行 9；若 $r=m$ 但 $p>m$，进行 8；否则，继续。

4）将矩阵 B_1 分成两块，即

$$B_1=(B_{11}, B_{12}),$$

其中 B_{11} 为 $n\times r$ 矩阵，B_{12} 为 $n\times(m-r)$ 矩阵。

5）对矩阵 B_{12} 进行 QR 分解，即求得正交矩阵 Q 使得

$$QB_{12}=\begin{bmatrix}R\\O\end{bmatrix},$$

其中 R 为上三角阵。以正交矩阵 Q 对多项式矩阵 $S_1(\lambda)$ 进行第二类等价变换，得到多项式矩阵 $S_2(\lambda)$，记相应的系统为 (A_2, B_2, C_2, D_2)，其中

$$B_2=\begin{bmatrix}QB_{11} & \begin{bmatrix}R\\O\end{bmatrix}\end{bmatrix}.$$

6）依次检查 R 的对角线元素。若它为零，在 $S_2(\lambda)$ 中除去它所在的列；否则，在 $S_2(\lambda)$ 中除去它所在的行与列，得到多项式矩阵 $S_3(\lambda)$。

7）适当交换多项式矩阵 $S_3(\lambda)$ 的行与列，使其具有式(4)的形式。将对应的系统仍记为 (A, B, C, D)，返回 1。

8）构成系统 (A, B_1, C_1, D_1) 的对偶系统，将它记为 (A, B, C, D)，返回 1。

9）若 $p=0$，系统的传输零点为矩阵 A 的特征值；否则，系统的传输零点为 $A+B_1D_1^{-1}C_1$ 的特征值。求出这些特征值后结束。

四、算　　例

例 1. 设

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$
$$C=[\,0\quad -1\quad 0\,],\quad D=0,$$

这是一个退化系统，用程序求出该系统的有限传输零点为 2。

例 2. 设

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 3 & -7 & 6\\0 & -5 & 4 & -4 & 8\\0 & 2 & 0 & 2 & -2\\0 & 6 & -3 & 5 & -6\\0 & -2 & 2 & -2 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 7\\-8 & -5\\-3 & 0\\1 & -5\\-8 & 0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2 & -1 & -1\\1 & 1 & 1 & 0 & -1\\0 & 3 & -2 & 3 & -1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},$$

这是一个非方系统，用程序求出该系统有两个有限传输零点为

$$4-4e^{-15},\quad -3-3e^{-15}.$$

例 3. 设

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

用程序求出该系统有四个有限传输零点为

$$-0.6823278038280188,\ 1-3e^{-16},$$

$$0.3411639019140096\pm j1.161541399997253.$$

上述结果的精度均略优于文献[3]的结果.

参　考　文　献

[1] 叶庆凯,线性系统与多变量控制,国防工业出版社, 1989.

[2] Laub, A. J. and B. C. Moore, Calculation of transmission Zeros using QZ techniques, *Automatica*, **14**(1978), 557.

[3] Emami-Naeini, A. and P. V. Dooren, Computation of Zeros of linear multivariable systems, *Automatica*, **18**(1982), 415—430.

[4] 黄琳,系统与控制理论中的线性代数,科学出版社, 1984.

THE CALCULATION OF TRANSMISSION ZEROS OF MUITIVARIABLE SYSTEMS

Ye Qingkai

(*Dept. of Mechanics, Peking University, Beijing* 100871)

Abstract

In this paper, we calculate the transmission zeros of multivariable systems by the methods of singular value decomposition and QR decomposition. The algorithm and numerical examples are given.

Key words: Transmission zero; singular value decomposition; QR decomposition.