

多变量系统敏感性及鲁棒性综合最优的 H^∞ 解耦设计方法¹⁾

徐冬玲 施颂椒 杨剑波

(上海交通大学自动控制系)

摘 要

本文利用 H^∞ 设计理论提出了一种多变量系统敏感性及鲁棒性综合最优的解耦设计方法,证明了单变量系统所能达到的最优敏感性及鲁棒性指标值仅由被控对象右半平面的零极点决定,而与左半平面的零极点无关。另外,本文对谱分解及模型匹配问题的求解算法作了改进,给出了一个算例。

关键词: H^∞ 设计理论,敏感性及鲁棒性,多变量控制系统。

一、引 言

在实际控制工程中往往要求控制系统能同时兼顾敏感性和鲁棒性两个互相矛盾的指标。由于 H^∞ 设计理论的优越性,许多学者已致力于用它来研究敏感性及鲁棒性综合最优设计问题。文献[1]提出了以 $\left\| \begin{matrix} SW \\ VT \end{matrix} \right\|_\infty$ 为优化指标的敏感性及鲁棒性综合最优设计(简称 WSVT 问题)的迭代算法。文献[2,3]对敏感性及鲁棒性综合最优问题提出了不同的性能指标,以不同的思路进行了研究。但这些方法都很复杂,特别是多变量系统。

本文也对多变量系统的 WSVT 问题进行研究,通过引进文献[5]解耦思想,提出了解耦设计方法,从而使该问题的求解大为简化。本文所述方法可推广到非方阵多变量系统^[4]。

二、WSVT 问 题

文中 \mathbf{RL}^∞ 为无虚轴上极点的有理分式阵函数空间; RHP 为开右半平面; RHPI 为闭右半平面; \mathbf{RH}^∞ 为稳定的有理真分式阵函数空间; $A^\sim(s) = A^T(-s)$; $\|H(s)\|_\infty$ 为 $H(s)$ 的 H^∞ 范数, $H(j\omega)$ 的最大奇异值; 内函数 $A(s)$ 满足 $A^\sim(s)A(s) = I$, $A(s) \in \mathbf{RH}^\infty$; 外函数 $A(s)$ 满足 $A(s) \in \mathbf{RH}^\infty$ 且 $A(s)$ 无 RHPI 零点。

如图 1 或图 2 所示反馈控制系统, $P(s) \in \mathbf{RL}^\infty$ 为 $r \times r$ 阶多变量系统的名义模

本文于 1988 年 12 月 20 日收到。

1) 本课题得到国家自然科学基金资助。

型, $P(I + \Delta P)$ 为实际模型, 摄动 ΔP 范围为

$$\lambda_i^{\frac{1}{2}}(\Delta P^*(j\omega) \cdot \Delta P(j\omega)) \leq |V_i(j\omega)|, i = 1, \dots, r. \quad (1)$$

其中 λ 表示特征值, $d = [d_1, \dots, d_r]^T$ 为干扰信号, 不确定范围为

$$\|W_i^{-1}(j\omega)d_i(j\omega)\|_2 \leq 1, i = 1, \dots, r. \quad (2)$$

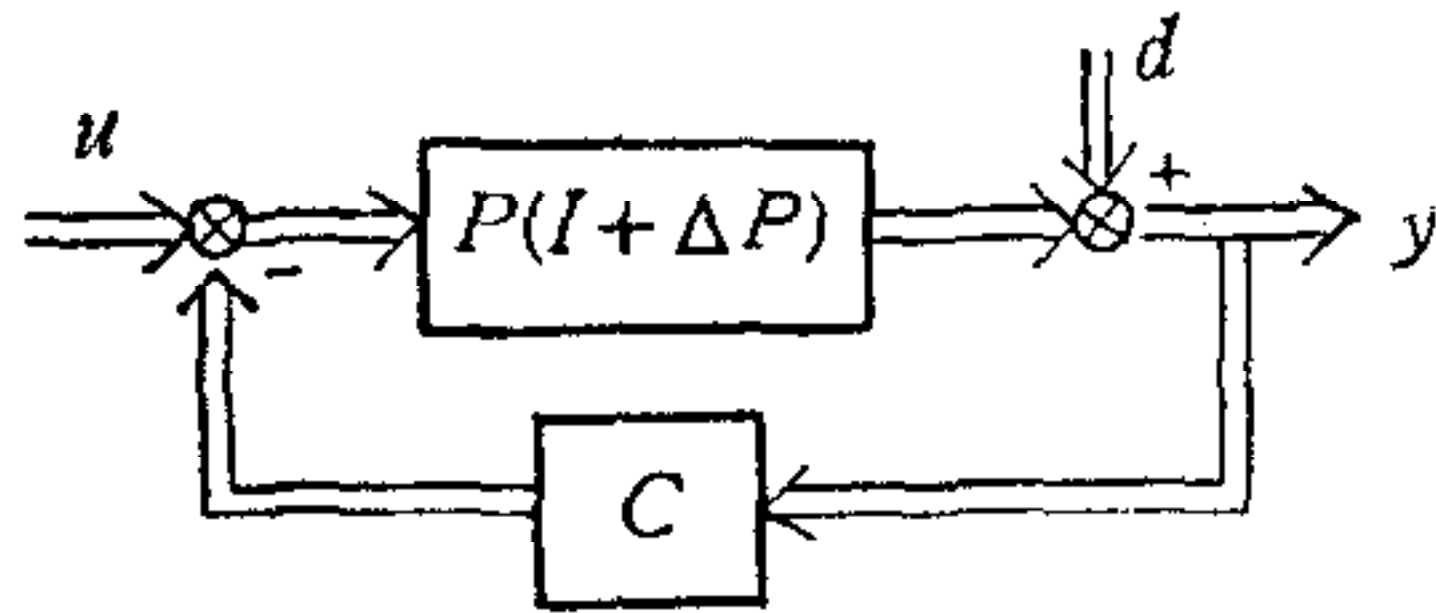


图1 反馈控制结构1

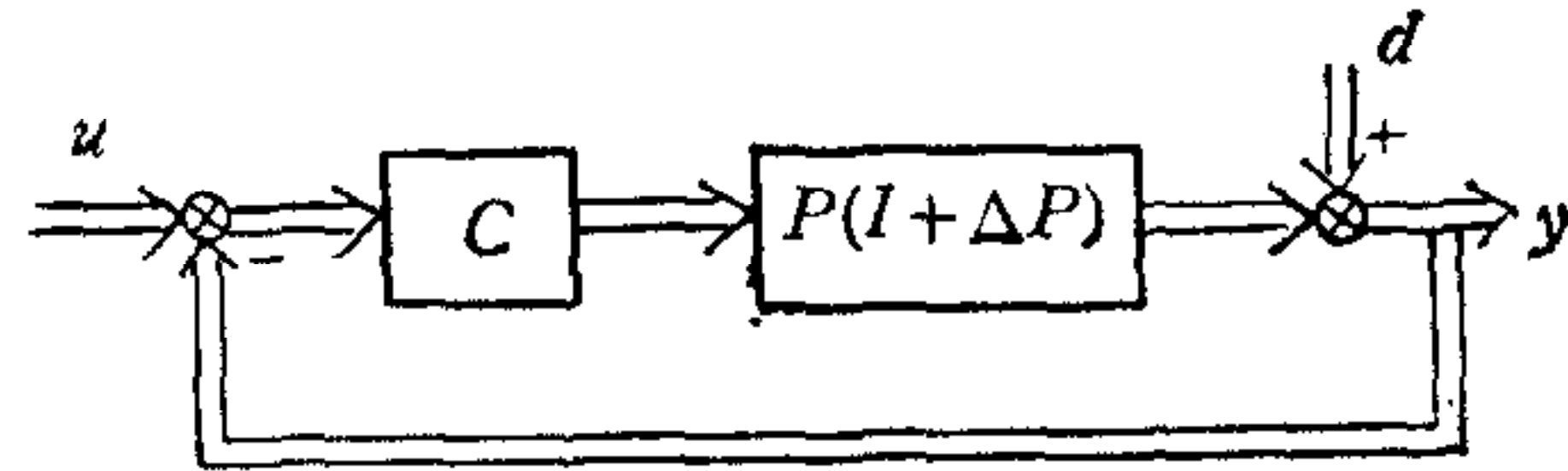


图2 反馈控制结构2

$V(s) = \text{diag} \{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ 为无 RHPI 零极点的有理函数阵, $W(s) = \text{diag} \{W_1(s), \dots, W_r(s)\}$ 为外函数阵. u 及 y 为输入输出向量. 定义敏感性函数 S 及补敏感性函数 T 为

$$\begin{aligned} S &= (I + PC)^{-1}, \\ T &= I - S = PC(I + PC)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

考虑到(1),(2)式扰动的范围, WSVT 问题可表述为^[1]

$$\min_s \left\| \begin{matrix} (I + PC)^{-1}W \\ VPC(I + PC)^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty = \min_s \left\| \begin{matrix} SW \\ VT \end{matrix} \right\|_\infty. \quad (4)$$

引进文献[5]解耦思想, 即要求 S 为对角形: $S = \text{diag} \{S_1, \dots, S_r\}$, 相应地 T 也成为对角形: $T = \text{diag} \{T_1, \dots, T_r\} = \text{diag} \{1 - S_1, \dots, 1 - S_r\}$. 在此假设下, 根据 H^∞ 范数定义可得如下引理(证明略).

引理 1. 设 $W = \text{diag} \{W_1, \dots, W_r\}$, $V = \text{diag} \{V_1, \dots, V_r\}$, $S = \text{diag} \{S_1, \dots, S_r\}$, 则

$$\min_s \left\| \begin{matrix} SW \\ VT \end{matrix} \right\|_\infty = \max_i \left\{ \min_{s_i} \left\| \begin{matrix} W_i S_i \\ V_i T_i \end{matrix} \right\|_\infty, i = 1, \dots, r \right\}. \quad (5)$$

三、问题求解

1. 约束条件

在优化(5)式右边各子问题时, S_i 受到的约束是因要求闭环系统稳定而引起的. 设 $P(s)$ 的多项式或 \mathbf{RH}^∞ 分式互质分解为^[6,7] $P(s) = N_r D_r^{-1} = D_r^{-1} N_l$, 且 N_r 可逆, 定义

$$\alpha_i(s) = \prod_{j=1}^{n_i} (s - p_{ij})^{m_{ij}}. \quad (6)$$

其中 n_i 是 D_r^{-1} 第 i 行中不同的 RHP 极点 p_{ij} 的数目; m_{ij} 是 p_{ij} 在该行各元素中所出现的最高重数. 再定义多项式

$$\beta_i(s) = \prod_{j=1}^{n_i} (s - z_{ij})^{m_{ij}}. \quad (7)$$

其中 n_i 是 N_r^{-1} 第 i 列中不同的 RHP 极点 z_{ij} 的数目; m_{ij} 是 z_{ij} 在该列各元素中所出现的最高重数。文献[5]指出在 S 解耦的假设下, 当且仅当 $S_i \neq 0$ 稳定, S_i 的分子含有因子 $\alpha_i(s)$ 及 $(1 - S_i)$ 的分子含有因子 $\beta_i(s)$ ($i = 1, \dots, r$) 时, 闭环系统是稳定的。满足这些条件的 S 及 S_i 称为可实现的。

为得到所有可实现的 S_i , 构造假设单变量系统 $p_i(s) = \frac{\beta_i}{\alpha_i} q_i$, 其中 q_i 是为使 $p_i(s)$ 为真分式而附加的任意外函数。在 \mathbf{RH}^∞ 空间中作 $p_i(s)$ 的互质分解及 Bezout 等式: $p_i(s) = n(s)/m(s)$, $mx + ny = 1$ 。其中 $\{m, n, x, y\} \in \mathbf{RH}^\infty$ 。则由文献[7] §5-2 知, 所有使 $p_i(s)$ 闭环稳定的控制器可表示为

$$c_i(s) = (y + mQ)/(x - nQ), Q \in \mathbf{RH}^\infty. \quad (8)$$

从而所有可实现的 $S_i = (1 + p_i c_i)^{-1}$ 及 $T_i = 1 - S_i$ 可由 Q 表示为

$$S_i = mx - mnQ, Q \in \mathbf{RH}^\infty, \quad (9)$$

$$T_i = 1 - S_i = ny + mnQ, Q \in \mathbf{RH}^\infty. \quad (10)$$

因此, (5) 式右边的子问题化为

$$\min_{S_i} \left\| \begin{matrix} W_i S_i \\ V_i T_i \end{matrix} \right\|_\infty = \min_{Q \in \mathbf{RH}^\infty} \left\| \begin{matrix} W_i (mx - mnQ) \\ V_i (ny + mnQ) \end{matrix} \right\|_\infty := \min_{Q \in \mathbf{RH}^\infty} \|L\|_\infty. \quad (11)$$

2. 问题求解及迭代算法

设 $W_i = H_1, -V_i = H_2$, 及

$$mn = M_3 \phi. \quad (12)$$

其中 M_3 为外函数; ϕ 为内函数。由内函数及 m, n 的定义知

$$\phi = \alpha_i(s)\beta_i(s)/[\alpha_i^{\sim}(s)\beta_i^{\sim}(s)]. \quad (13)$$

因 $\phi^{\sim}\phi = 1$, 由 H^∞ 范数定义易知 $\|L\|_\infty = \|L_1\|_\infty$, 其中

$$L_1 = L\phi^{-1} = \begin{bmatrix} W_i mx\phi^{-1} \\ V_i ny\phi^{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} Q M_3 = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} Y \quad (14)$$

这里 $K_1 = W_i mx\phi^{-1}$; $K_2 = V_i ny\phi^{-1}$; $Y = Q M_3 \in \mathbf{RH}^\infty$ 。令

$$M_1^{\sim} M_1 = H_1^{\sim} H_1 + H_2^{\sim} H_2, \quad (15)$$

$$K = M_1^{\sim} (H_1^{\sim} K_1 + H_2^{\sim} K_2). \quad (16)$$

其中 M_1 为外函数。由此不难推得

$$L_1^{\sim} L_1 = (K - M_1 Y)^{\sim} (K - M_1 Y) + F^{\sim} F = \begin{bmatrix} K - Z \\ F \end{bmatrix}^{\sim} \begin{bmatrix} K - Z \\ F \end{bmatrix}. \quad (17)$$

此处 $Z = M_1 Y = M_1 Q M_3 \in \mathbf{RH}^\infty$,

$$F^{\sim} F = K_1^{\sim} K_1 + K_2 K_2 - K^{\sim} K. \quad (18)$$

从而

$$\min \|L\|_\infty = \min \|L_1\|_\infty = \min_{Z \in \mathbf{RH}^\infty} \left\| \begin{bmatrix} K - Z \\ F \end{bmatrix} \right\|_\infty. \quad (19)$$

对该问题有如下结论^[8,7]: 取一正数 $\varepsilon \geq \|F\|_\infty$, 通过迭代可求得 $\tilde{\varepsilon}$ (此处 $\tilde{\varepsilon}$ 及下面符号 \tilde{x} 表示 ε 及变量 x 的最优值), 使

$$\sigma = \min_{Z \in \mathbf{RH}^\infty} \|(K - Z)M^{-1}\|_\infty = \min_{Z_1 \in \mathbf{RH}^\infty} \|[KM^{-1}]_+ - Z_1\|_\infty = 1. \quad (20)$$

其中 M 满足 $M^*M = \tilde{\varepsilon}^2 - F^*F$, $[KM^{-1}]_+$ 及下面的 $[KM^{-1}]_0$, $[KM^{-1}]_-$ 分别为 KM^{-1} 对应其 RHP、虚轴及左半平面极点的部分分式,

$$Z_1 = ZM^{-1} - [KM^{-1}]_0 - [KM^{-1}]_- \quad (21)$$

则 $\min \|L\|_\infty = \tilde{\varepsilon}$. 式(20)可用文献[9]中方法解决.

综上所述可得多变量 WSVT 问题的解耦迭代算法步骤:

- 1) 作 $P(s)$ 的左右互质分解并按定义写出 $\alpha_i, \beta_i, p_i (i = 1, \dots, r)$. 令 $i = 1$;
- 2) 输入 $p_i(s), W_i(s), V_i(s)$ 的有关数据;
- 3) 求 $p_i(s)$ 的互质分解及 Bezout 等式中各量 m, n, x, y ;
- 4) 计算 M_3, ϕ, M_1, K, F ;
- 5) 选取 ε 初值, $\varepsilon \geq \|F\|_\infty > 0$;
- 6) 计算 M, KM^{-1} 和 $[KM^{-1}]_+$;
- 7) 计算 $\min_{Z_1 \in \mathbf{RH}^\infty} \|[KM^{-1}]_+ - Z_1\|_\infty = \sigma$;
- 8) 若 $\sigma > 1$, 则 $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, 因此增加 ε 回到 6); 若 $\sigma < 1$, 则 $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$, 减小 ε 回到 6); 若 $\sigma = 1$, 则 $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$, 到 9).
- 9) 由文献[9]定理 6.2.1 求得 f, g 得 $Z_1 = [KM^{-1}]_+ - f/g$, 再由(21)式及 $\tilde{Z} = M_1 \tilde{Q} M_3$ 求得 \tilde{Z} 及 \tilde{Q} , 最后得 $\tilde{S}_i = mx - mn\tilde{Q}$;
- 10) 若 $i < r$, 则 $i = i + 1$, 回到 2); 若 $i = r$, 则子问题求解结束, 到 11);
- 11) 由 $\tilde{S} = \text{diag} \{\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_r\}$ 及 (3) 式关系得最优控制器 $\tilde{C} = P^{-1}(\tilde{S}^{-1} - I)$.

四、WSVT 问题的一个性质

在上面构造假想系统时 $q_i(s)$ 的选取不是唯一的, 这是否会影响问题(11)式最优解的唯一性?

定理 1. 设有两单变量系统 $p_i(s) = \beta(s)q_i(s) (i = 1, 2)$, $\alpha(s)$ 及 $\beta(s)$ 为多项式, 其零点都在 RHP 内, q_i 为外函数, 则在相同的加权函数 $W, V (W, V$ 无 RHPI 零极点) 下, 有

$$\min_{s_1} \left\| \frac{WS_1}{V(1 - S_1)} \right\|_\infty = \min_{s_2} \left\| \frac{WS_2}{V(1 - S_2)} \right\|_\infty, \quad (22)$$

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2. \quad (23)$$

其中 $S_i = (1 + p_i \tilde{c}_i)^{-1}$, \tilde{S}_1 及 \tilde{S}_2 为(22)式最优解.

证. 容易看出上两问题中相同的因素为 $R_c = [\alpha, \beta, W, V]$, 不同的因素为 q_1, q_2 , 也即 $p_i(s)$ 互质分解及 Bezout 等式中各量为 $I_c = [m, n; x, y]$. 对于(22)式, 由迭代算法知, (22)式两边最优指标通过 $\min_{Z_1 \in \mathbf{RH}^\infty} \|[KM^{-1}]_+ - Z_1\|_\infty$ 确定, 因此要证(23)式, 只要证

$[KM^{-1}]_+$ 仅由 R_c 决定. 显然, M_1 仅由 R_c 决定, 由(18)式得

$$\begin{aligned} F^*F &= [K_1^* K_2^*] \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} - [K_1^* K_2^*] \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} M_1^{-1} M_1^{-*} [H_1^* H_2^*] \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \\ &= [K_1^* K_2^*] \left(I - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} M_1^{-1} M_1^{-*} [H_1^* H_2^*] \right) \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

又

$$I - \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} [H_1^{\sim} H_2^{\sim}] (M_1^{\sim} M_1)^{-1} = (M_1^{\sim} M_1)^{-1} \left\{ (H_1^{\sim} H_1 + H_2^{\sim} H_2) I - \begin{bmatrix} H_1^{\sim} H_1 & H_1 H_2^{\sim} \\ H_2 H_1^{\sim} & H_2 H_2^{\sim} \end{bmatrix} \right\}.$$

所以 $F^{\sim} F = (H_2 K_1 - H_1 K_2)^{\sim} (H_2 K_1 - H_1 K_2) / (H_1^{\sim} H_1 + H_2^{\sim} H_2)$.

将 K_1, K_2 表达式代入上式, 并注意到 $mx + ny = 1$ 及 $\phi^{\sim} \phi = 1$ 有

$$F^{\sim} F = H_1 H_2 (H_1 H_2)^{\sim} / (H_1 H_1^{\sim} + H_2 H_2^{\sim}). \quad (24)$$

可见 F 仅与 R_e 有关. 故 $M^{\sim} M = \varepsilon^2 - F^{\sim} F$ 中的外函数 M 仅与 R_e 有关. 所以, 要证 $[KM^{-1}]_+$ 仅与 R_e 有关, 只要证 $K(s)$ 的 RHP 极点及其在这些极点处的留数仅由 R_e 决定即可.

令 $H_1 = W = f_1(s)/g_1(s)$, $H_2 = -V = f_2(s)/g_2(s)$, 则按对 W, V 的假设知 f_1, f_2, g_1, g_2 为稳定多项式(无 RHPI 零点), 且

$$M_1^{\sim} M_1 = \frac{f_1^{\sim} f_1}{g_1^{\sim} g_1} + \frac{f_2^{\sim} f_2}{g_2^{\sim} g_2} = \frac{h^{\sim} h}{g_1^{\sim} g_2^{\sim} g_1 g_2}. \quad (25)$$

其中 $h^{\sim} h = f_1^{\sim} f_1 g_2^{\sim} g_2 + f_2^{\sim} f_2 g_1^{\sim} g_1$, h 为稳定多项式, 从而 $M_1^{\sim} = h^{\sim} / (g_1^{\sim} g_2^{\sim})$. 再将(25)式及 K_1, K_2 表达式代入(16)式得

$$K = [f_1^{\sim} f_1 g_2 g_2^{\sim} mx - f_2^{\sim} f_2 g_1 g_1^{\sim} ny] \alpha^{\sim} \beta^{\sim} / (g_1 g_2 \alpha \beta h^{\sim}). \quad (26)$$

可见 K 的 RHP 极点即为 α, β, h^{\sim} 的零点, 也即仅由 R_e 决定, 与 I_e 无关. 同时, 注意到 $mx + ny = 1$, (16)式 K 也可表达为

$$K = [(H_1^{\sim} H_1 + H_2^{\sim} H_2) mx - H_2^{\sim} H_2] \phi^{-1} M_1^{\sim -1}. \quad (27)$$

由 $p_i(s)$ 的互质分解的定义知, $\alpha(s)$ 的零点也是 $m(s)$ 的零点, 故在 $\alpha(s)$ 零点处, (27)式 K 可写为: $K = -H_2^{\sim} H_2 \phi^{-1} M_1^{\sim -1}$. 可见 $K(s)$ 在 $\alpha(s)$ 各零点处的留数仅由 R_e 决定. 类似可证 $K(s)$ 在 $\beta(s), h^{\sim}(s)$ 零点处的留数也只仅与 R_e 有关, 与 I_e 无关.

综上所述, $[KM^{-1}]_+$ 仅由 R_e 决定. 也即(22)式成立.

对于(23)式, 可以推得 $\tilde{S} = mx - mn\tilde{Q} = (M_1^{\sim} M_1)^{-1} H_2^{\sim} H_2 + M M_1^{-1} \phi f/g$, 由此不难看出 $\tilde{S}(\tilde{S}_1$ 或 $\tilde{S}_2)$ 也仅与 R_e 有关. 其中 f, g 是从 $\tilde{Z}_1 = [KM^{-1}]_+ - f/g$ 中得到的. 故(23)式成立.

五、算法实现、改进及算例

H^{∞} 设计算法消耗机时较多的主要原因是需要做大量的时域、频域之间模型转换. 若对频域模型用对角形实现, 则通过计算一次函数在其所有稳定极点或者所有 RHP 极点处的留数, 就可代替多次模型转换. 此时, 在模型匹配问题中, 如被控对象 RHP 零极点都是单根, 还可避免解 Lyapunov 方程 $AL_c + L_c A^T = BB^T$, 因为此时 A 为对角阵、方程解可直接写出. 基于上述分析, 本文改进并实现了迭代算法. 举例如下:

设被控对象名义模型为 $P(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+2 & s+1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix}$, 加权函数为

$$W = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+2}, \frac{1}{s+1} \right\}, \quad V = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+3}, \frac{1}{s+8} \right\},$$

对图 2 所示反馈控制系统求其 WSVT 问题的最优控制器,过程如下:

1) 作 $P(s)$ 的互质分解 $P(s) = D_l^{-1}N_l = N_r D_r^{-1}$, 得

$$N_l = N_r = (s-3) \begin{bmatrix} s+2 & s+1 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix},$$

$D_l = D_r = \text{diag} \{(s+3)(s-1), (s+3)(s-1)\}$. 由此不难定义 $\alpha_1(s) = \alpha_2(s) = (s-1)$, $\beta_1(s) = \beta_2(s) = (s-3)$. 因此可以构造出如下两个假想单变量系统及相应的子问题:

子问题 1:

$$p_1(s) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} q_1 = \frac{s-3}{s-1} \cdot 1 = \frac{s-3}{s-1},$$

求取 \tilde{S}_1 使 $\left\| \frac{W_1 \tilde{S}_1}{V_1(1-\tilde{S}_1)} \right\|_\infty$ 最小, 其中 $W_1 = 1/(s+2)$, $V_1 = 1/(s+3)$;

子问题 2: $p_2(s) = \frac{s-3}{s-1}$, 求取 \tilde{S}_2 使 $\left\| \frac{W_2 \tilde{S}_2}{V_2(1-\tilde{S}_2)} \right\|_\infty$ 最小, 其中 $W_2 = 1/(s+1)$,

$V_2 = 1/(s+8)$.

2) 令 $i=1$, 即求解子问题 1. 令 $H_1 = W_i$, $H_2 = -V_i$.

3) $p_i(s)$ 互质分解 $p_i(s) = n/m$ 及 Bezout 等式 $mx + ny$ 中各量求解:

$$m(s) = (s-1)/(s+2), \quad n(s) = (s-3)/(s+2), \quad x(s) = (s+7)/(s+1), \\ y(s) = -1/3(s+1).$$

4) 由(15),(13),(16),(24)各式可分别求得

$$M_1^{-1} M_1 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{6.5-s}) \cdot \sqrt{2}(\sqrt{6.5+s})}{(3-s)(2-s)(3+s)(2+s)}, \quad \phi(s) = \frac{(s-1)(s-3)}{(s+1)(s+3)}, \\ K(s) = \frac{s^3 + 12s^2 + 11s - 33}{\sqrt{2}(s+2)^2(s-\sqrt{6.5})(s-1)}, \quad F^{-1} F = \frac{1}{2(6.5-s^2)}.$$

5) 取 $\varepsilon \geq \|F\|_\infty$, 如 $\varepsilon = 1$.

6), 7), 8), 9) 由本文编制的迭代算法软件可得 $\min_{Z_1 \in \mathbf{RH}^\infty} \|[KM^{-1}]_+ - Z_1\|_\infty = 1$ 时,

$$\tilde{Z}_1 = [KM^{-1}]_+ - f/g, \quad \tilde{\varepsilon}^2 - F^{-1} F = M^{-1} M$$

中的

$$\tilde{\varepsilon} = 0.6246 := \tilde{\varepsilon}_1; \quad M(s) = 0.6246(s + 2.2844)/(s + 2.5495);$$

$$f(s) = 1.3177/(s - 2.5495) - 0.4844/(s + 1);$$

$$g(s) = 1.3177/(s + 2.5495) + 0.4844/(s + 1).$$

再由

$$\tilde{S} = (M_1^{-1} M_1)^{-1} H_2^{-1} H_2 + M M_1^{-1} \phi f/g$$

可得

$$\tilde{S}_1 = 0.4416(s+2)(s-1)/(s+1.4165).$$

10) 子问题 1 求解结束. 令 $i=2$, 回到 2), 求解子问题 2. 类似可得:

$$\tilde{\varepsilon}_2 = 0.5768; \quad M(s) = 0.5768(s + 5.5675)/(s + 5.7009);$$

$$f(s) = 1.6323/(s - 5.7009) - 8.5125/(s - 3);$$

$$g(s) = 1.6323/(s + 5.7009) - 8.5125/(s + 3).$$

$$\tilde{S}_2 = 0.4079(s + 8.4518)(s - 1)/(s + 6.3416).$$

11) 由 $\tilde{S} = \text{diag}\{\tilde{S}_1, \tilde{S}_2\} = (I + P\tilde{C})^{-1}$ 可得

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= P^{-1}(\tilde{S}^{-1} - I) = \frac{(s-1)(s+3)}{(s+2)(s+5)(s-3)} \begin{bmatrix} s+5 & -s-1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \\ &\cdot \text{diag} \left\{ \frac{-(s-3)(s+1)}{(s-1)(s+2)}, \frac{-(s+8)(s-3)}{(s-1)(s+8.4518)} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{(s+3)(s+1.7358)}{(s+2)^2} & \frac{(s+3)(s+8)(s+1)}{(s+2)(s+5)(s+8.4518)} \\ 0 & -\frac{(s+3)(s+8)}{(s+5)(s+8.4518)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

最优性能指标为 $\tilde{J} = \max\{\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2\} = \max\{0.6246, 0.5768\} = 0.6246$.

由定理 1 知, 本文解耦方法抓住了问题的决定性因素, 抛开了非决定性因素, 不但使多变量 WSVT 问题求解得到简化, 而且所设计的系统也具有良好的敏感性及鲁棒性。

参 考 文 献

- [1] Foo, Y. K. et al., An H^∞ -Minimax Approach to the Design of Robust Control Systems, *Systems & Control Letters*, 5(1984), 81—88.
- [2] Bird, J. S. et al., On the Robust Disturbance Attenuation Problem, Proc. of the 25th CDC, Athens, Greece (1986), 1804—1809.
- [3] Kwakernaak, H., Minimax Frequency Domain Performance and Robustness Optimization of Linear Feedback Systems, *IEEE Trans. AC*, AC-30(1985), 994—1004.
- [4] 徐冬玲, 施颂椒, 金钟骥, 多变量系统 H^∞ 最优敏感性控制器的解耦设计方法, *控制理论与应用*, 6(1989), 4, 43—50.
- [5] Safonov, M. G. et al., Multivariable Stability-Margin Optimization with Decoupling and Output Regulation, *IEE Proc. Part D*, 129 (1982), 276—282.
- [6] Kailath, T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, INC., 1980.
- [7] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, Cambridge, MA: MIT Press, 1985.
- [8] Proc. of the 26th Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA., USA, Dec. 1987, 83—89.
- [9] Francis, B. A., *A Course in H^∞ Control Theory*, Springer-Verlag, 1987.

A H^∞ DECOUPLING METHOD FOR DESIGNING CONTROLLERS WITH OPTIMAL SENSITIVITY AND ROBUSTNESS FOR MIMO SYSTEMS

XU DONGLING SHI SONGJIAO YANG JIANBO

(Dept. of Automatic control, Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

A decoupling design method is proposed by using H^∞ optimal design theory to obtain controllers that have both optimal sensitivity and robustness for MIMO systems. It is proved in the paper that the optimal performance of the sensitivity and robustness of a SISO plant is only determined by its right half plane poles and zeros, which is essential to the effectiveness of the decoupling method. An algorithm for solving spectrum decomposition and model matching problems is improved and used in the iteration process of the decoupling method. Finally an example is discussed to illustrate the usage of the method.

Key words: H^∞ design theory; sensitivity and robustness; MIMO systems.