第24卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 3
1998年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May., 1998

短 文

多线性凸多面体对象族的鲁棒镇定[1)]

耿志勇 王恩平
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

摘 要 研究了由多个不确定对象串联所构成的多线性凸多面体对象族的鲁棒镇定问题，在对控制器的结构进行某些假设的条件下，给出了控制器鲁棒镇定对象族的充分必要条件是它同时镇定所有的顶点对象.

关键词 鲁棒镇定，多线性，凸多面体对象族.

1 引言

考虑由 r ($r\geq 1$)个不确定对象串联所构成的单输入单输出反馈系统，假定每一不确定对象可以表示为如下的真有理分式

$$p_j(s;\boldsymbol{q}_{1j},\boldsymbol{q}_{2j})=\frac{p_{1j}(s,\boldsymbol{q}_{1j})}{p_{2j}(s,\boldsymbol{q}_{2j})},\ j=1,2,\cdots,r, \tag{1}$$

其中 $p_{ij}(s,\boldsymbol{q}_{ij})$ ($i=1,2;j=1,2,\cdots,r$)是其系数定义在系数空间$\mathbb{R}^{d_{ij}+1}$中凸多面体 Q_{ij}上的不确定多项式. 记

$$\boldsymbol{q}_i=[\boldsymbol{q}_{i1}^T,\boldsymbol{q}_{i2}^T,\cdots,\boldsymbol{q}_{ir}^T]^T,\boldsymbol{q}_{ij}\in Q_{ij},\quad i=1,2;j=1,2,\cdots,r, \tag{2}$$

$$Q_i=\{\boldsymbol{q}_i:\boldsymbol{q}_{ij}\in Q_{ij},j=1,2,\cdots,r\},\quad i=1,2, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{q}=[\boldsymbol{q}_1^T,\boldsymbol{q}_2^T]^T,\boldsymbol{q}_i\in Q_i,\quad i=1,2, \tag{4}$$

$$Q=\{\boldsymbol{q}:\boldsymbol{q}_i\in Q_i,\quad i=1,2\}, \tag{5}$$

$$\widetilde{p}(s,\boldsymbol{q}_i)=p_{i1}(s,\boldsymbol{q}_{i1})p_{i2}(s,\boldsymbol{q}_{i2})\cdots p_{ir}(s,\boldsymbol{q}_{ir}),\quad i=1,2, \tag{6}$$

$$\widetilde{P}_i(s,Q_i)=\{\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i):\boldsymbol{q}_i\in Q_i\},\quad i=1,2. \tag{7}$$

同时,在引入的记号中用加右上标“ * ”表示相应的顶点及顶点集合. 则由这 r 个不确定对象串联所给出的开环不确定对象为

$$p(s;\boldsymbol{q})=\frac{p_{11}(s,\boldsymbol{q}_{11})\cdots p_{1r}(s,\boldsymbol{q}_{1r})}{p_{21}(s,\boldsymbol{q}_{21})\cdots p_{2r}(s,\boldsymbol{q}_{2r})}=\frac{\widetilde{p}_1(s,\boldsymbol{q}_1)}{\widetilde{p}_2(s,\boldsymbol{q}_2)},\quad \boldsymbol{q}\in Q. \tag{8}$$

定义对象族

$$\mathscr{P}=\{p(s;q):q\in Q\}, \tag{9}$$

这是一个多线性凸多面体对象族. 现在考虑对象族 $\mathscr{P}$ 的鲁棒镇定问题. 设反馈系统中的控制器为如下互质的有理分式

1) 国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996-03-04

$$C(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}. \tag{10}$$

从而，对任意的 $p(s) \in \mathscr{P}$ 闭环系统多项式为

$$\delta(s,\boldsymbol{q}) = F_1(s)\widetilde{p}_1(s,\boldsymbol{q}_1) + F_2(s)\widetilde{p}_2(s,\boldsymbol{q}_2), \tag{11}$$

则可定义闭环系统多项式族为

$$\Delta(s,Q) = \{\delta(s,\boldsymbol{q}):\boldsymbol{q} \in Q\}. \tag{12}$$

易知，

$$\Delta(s,Q) = F_1(s)\widetilde{P}_1(s,Q_1) + F_2(s)\widetilde{P}_2(s,Q_2). \tag{13}$$

定义1. 若多项式族 $\Delta(s,Q)$Hurwitz 稳定，则称控制器 $C(s)$鲁棒镇定对象族 $\mathscr{P}$.

研究对象族 $\mathscr{P}$ 的鲁棒镇定具有明显的理论及工程意义. 其结果可为系统的综合与设计提供理论基础. 目前，大部分的研究工作集中在区间对象族的鲁棒镇定[1-5]，区间对象族只是多线性凸多面体对象族的一种特例. 对于本文研究的一般情况，鲁棒镇定问题还远没有解决. 这里在对控制器的结构进行某些假设的条件下，给出了该控制器鲁棒镇定对象族 $\mathscr{P}$ 的充分必要条件是它同时镇定所有的顶点对象.

2　主要结果

设 Q_i^* $(i=1,2)$及 Q^* 分别表示凸多面体 $Q_i(i=1,2)$及 Q 的顶点集合. 由(13)式有如下引理.

引理1. $\Delta(s,Q) \subset \mathrm{conv}\Delta(s,Q^*) = F_1(s)\mathrm{conv}\widetilde{P}_1(s,Q_1^*) + F_2(s)\mathrm{conv}\widetilde{P}_2(s,Q_2^*)$.

注1. 由引理1知，$\mathrm{conv}\Delta(s,Q^*)$的 Hurwitz 稳定性将保证族 $\Delta(s,Q)$的 Hurwitz 稳定性. 因而，研究族 $\mathrm{conv}\Delta(s,Q^*)$的 Hurwitz 稳定性具有重要的意义.

设 $\widetilde{\mathscr{E}}_i(i=1,2)$为 $\mathrm{conv}\widetilde{P}_i(s,Q^*)(i=1,2)$的一维凸出棱边的集合，对任意的 $\widetilde{E}_i(s,[0,1]) \in \widetilde{\mathscr{E}}_i(i=1,2)$有

$$\widetilde{E}_i(s,[0,1]) = \{\widetilde{e}_i(s,\lambda) = \lambda\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^*) + (1-\lambda)\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^{*\prime}):\lambda \in [0,1]\}, \tag{14}$$

其中 $\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^*)$及 $\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^{*\prime})$是 $\mathrm{conv}\widetilde{P}(s,Q_i^*)$的两个不同的顶点多项式.

对任意的 $\widetilde{E}_i(s,[0,1]) \in \widetilde{\mathscr{E}}_i(i=1,2)$，假设其顶点多项式之差为

$$r_i(s) = \widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^*) - \widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^{*\prime}), i = 1,2. \tag{15}$$

1) 取 $F_i(s)$是反 Hurwitz 的，即 $F_i(s)$的零点在右半开平面.

2) 如 s^* 是 $r_i(s)$在左半开平面中的零点，则 $-s^*$ 是 $F_i(s)$在右半开平面中的零点.

注2. 该假设给出了一个不稳定的控制器，在应用中出于对系统整体的考虑，应尽量避免敏感元件及执行机构的故障，因为开环系统是不稳定的. 另外，如果对象本身是不稳定的，将没有理由反对使用不稳定的控制器.

设 $p(s)$为给定的多项式，对任意的 $\widetilde{E}_i(s,[0,1]) \in \widetilde{\mathscr{E}}_i(i=1,2)$，考虑多项式族

$$\widetilde{\Delta}_i(s,[0,1]) = F_i(s)\widetilde{E}_i(s,[0,1]) + p(s) \tag{16}$$

的 Hurwitz 稳定性. 对任意的 $\lambda \in [0,1]$，$\widetilde{\delta}_i(s,\lambda) \in \widetilde{\Delta}_i(s,[0,1])$，有如下形式

$$\widetilde{\delta}_i(s,\lambda) = F_i(s)[\lambda\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^*) + (1-\lambda)\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^{*\prime})] + p(s). \tag{17}$$

易知，$\widetilde{\Delta}_i(s,[0,1])$是 $\widetilde{\delta}_i(s,1) = F_i(s)\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^*) + p(s)$和 $\widetilde{\delta}_i(s,0) = F_i(s)\widetilde{p}_i(s,\boldsymbol{q}_i^{*\prime}) + p(s)$的凸组合.

引理2. 设由(16)式给定的多项式族 $\widetilde{\Delta}_i(s,[0,1])$ 中，$F_i(s)$ 满足假设条件1)和2)，则多项式族 $\widetilde{\Delta}_i(s,[0,1])$ Hurwitz 稳定，当且仅当其顶点多项式 $\widetilde{\delta}_i(s,1),\widetilde{\delta}(s,0)$ Hurwitz 稳定.

证明. 必要性显然；下证充分性. 设

$$r_i(s)=\widetilde{p}_i(s,q_i^*)-\widetilde{p}_i(s,q_i^{*\prime})=\gamma_1(s)\gamma_2(s)\gamma_3(s^2)s^k,\quad k=0\text{ 或 }1,\tag{18}$$

其中 $\gamma_1(s)$ 是 Hurwitz 稳定的，$\gamma_2(s)$ 是反 Hurwitz 的，而 $\gamma_3(s^2)$ 仅有虚零点. 根据假设1)和2)，$F_i(s)$ 可以分解为 $F_i(s)=F_i'(s)\gamma_1(-s)$，$F_i'(s)$ 为任意反 Hurwitz 稳定的多项式. 因而，对任意的 $\lambda\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_i(s,\lambda)&=F_i(s)\widetilde{p}_i(s,q_i^{*\prime})+\lambda F_i(s)r_i(s)+p(s)=\\&F_i(s)\widetilde{p}_i(s,q_i^{*\prime})+\lambda F_i'(s)\gamma_1(-s)\gamma_1(s)\gamma_2(s)\gamma_3(s^2)s^k+p(s).\end{aligned}$$

由于 $F_i'(s)\gamma_2(s)$ 是反 Hurwitz 的，易知 $F_i'(-s)\gamma_2(-s)$ 是 Hurwitz 稳定的. 因而，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}F_i'(-s)\gamma_2(-s)\widetilde{\delta}_i(s,\lambda)&=F_i'(-s)\gamma_2(-s)[F_i(s)p_i(s,q_i^{*\prime})+p(s)]+\\&\lambda F_i'(-s)F_i'(s)\gamma_1(-s)\gamma_1(s)\gamma_2(-s)\gamma_2(s)\gamma_3(s^2)s^k.\end{aligned}\tag{19}$$

设 $F_i'(s)=h(s^2)+sg(s^2)$，则 $F_i'(s)F_i'(-s)=h^2(s^2)-s^2g^2(s^2)$，且对任意的 $\omega\in\mathbb{R}$，$F_i'(j\omega)F_i'(-j\omega)=h^2(-j\omega^2)+\omega^2g^2(-j\omega^2)\in\mathbb{R}$. 同理，显然有 $\gamma_k(-j\omega)\gamma_k(j\omega)\in\mathbb{R}$，$k=1,2$. 由此得到，对任意的 $\omega\in\mathbb{R}$ 值集 $F_i'(-j\omega)\gamma_2(-j\omega)\widetilde{\Delta}_i(j\omega,[0,1])$ 是复平面中平行于实轴(当 $k=0$ 时)或虚轴(当 $k=1$ 时)的线段. 如果存在 $\lambda^*\in(0,1)$ 及 $\omega^*\geq 0$，使得 $\widetilde{\delta}_i(j\omega^*,\lambda^*)=0$，则必有 $F_i'(-j\omega^*)\gamma_2(-j\omega^*)\widetilde{\delta}_i(j\omega^*,\lambda^*)=0$. 这将导致 $0\in F_i'(-j\omega^*)\gamma_2(-j\omega^*)\widetilde{\Delta}_i(j\omega^*,[0,1])$. 根据 Kharitonov 定理[7]知，在(19)式的两个顶点多项式 $F_i'(-s)\gamma_2(-s)\widetilde{\delta}_i(s,1)$ 及 $F_i'(-s)\gamma_2(-s)\widetilde{\delta}_i(s,0)$ 中，至少有一个是不稳定的. 由于 $F_i'(-s)\gamma_2(-s)$ 是 Hurwitz 稳定的，则 $\widetilde{\delta}_i(s,1)$ 或 $\widetilde{\delta}_i(s,0)$ 一定不是 Hurwitz 稳定的，这与假设矛盾. 充分性得证.

定理1. 当控制器满足假设条件1)和2)时，多线性凸多面体多项式族 $\Delta(s,Q)$ Hurwitz 稳定，当且仅当顶点多项式集 $\Delta(s,Q^*)$ Hurwitz 稳定.

证明. 必要性显然，下证充分性.

由引理1知，$\Delta(s,Q)\in\mathrm{conv}\Delta(s,Q^*)$，所以只需证明 $\mathrm{conv}\Delta(s,Q^*)$ Hurwitz 稳定. 由于 $\mathrm{conv}\Delta(s,Q^*)$ 是凸多面体多项式族，根据棱边定理[6]，只需证明对任意的 $q_i^*\in Q_i^*(i=1,2)$ 及 $\widetilde{E}_i(s,[0,1])\in\mathscr{E}_i(i=1,2)$ 多项式族

$$F_1(s)\widetilde{p}_1(s,q_1^*)+F_2(s)\widetilde{E}_2(s,[0,1]),\tag{20}$$

$$F_1(s)\widetilde{E}_1(s,[0,1])+F_2(s)\widetilde{p}(s,q_2^*)\tag{21}$$

Hurwitz 稳定. 容易看到，族(20)，(21)与(16)有相同的形式. 根据引理2，族(20)，(21)的 Hurwitz 稳定性将等价于 $\Delta(s,Q^*)$ 中如下多项式

$$F_1(s)\widetilde{p}_1(s,q_1^*)+F_2(s)\widetilde{e}_2(s,0),F_2(s)\widetilde{p}_2(s,q_1^*)+F_2(s)\widetilde{e}_2(s,1),$$

$$F_1(s)\widetilde{e}_1(s,0)+F_2(s)\widetilde{p}_2(s,q_2^*),F_1(s)\widetilde{e}_1(s,1)+F_2(s)\widetilde{p}_2(s,q_2^*)$$

的 Hurwitz 稳定性. 从而，$\Delta(s,Q^*)$ 的稳定性使充分性成立.

该结果表明，当控制器满足假定条件1)和2)时，则多线性凸多面体对象族 $\mathscr{P}$ 的鲁棒镇定问题可转化为有限个顶点对象的同时镇定问题.

3 例子

考虑不确定对象族

$$\mathscr{P} = \frac{(s + [2,3])(s - [3,4])}{(s + 1)(s + 3.1)}$$

的鲁棒镇定问题. 它是由下列两个不确定对象

$$\mathscr{P}_1 = \frac{s + [2,3]}{s + 1}, \quad \mathscr{P}_2 = \frac{s - [3,4]}{s + 3.1}$$

串联而构成的. 设

$$\widetilde{p}_1(s,\Lambda,\Lambda) = \{(s + 3 - \lambda)(s - 4 + \lambda): (\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Lambda = [0,1] \times [0,1]\},$$

$$\widetilde{P}_2(s) = (s + 1)(s + 3.1),$$

则

$$P = \frac{\widetilde{P}_1(s,\Lambda,\Lambda)}{\widetilde{P}_2(s)},$$

且 $\widetilde{P}_1(s,\Lambda,\Lambda)$是一个多线性凸多面体多项式族，它有四个顶点多项式

$$\widetilde{p}_2(s,1,1) = (s + 2)(s - 3); \widetilde{p}_2(s,1,0) = (s + 2)(s - 4);$$

$$\widetilde{p}_2(s,0,1) = (s + 3)(s - 3); \widetilde{p}_2(s,0,0) = (s + 3)(s - 4).$$

设 $\Lambda^* = \{0,1\}$，则顶点多项式集可记为 $\widetilde{P}_1(S,\Lambda^*,\Lambda^*)$. 现在考虑 $\widetilde{P}_1(s,\Lambda^*,\Lambda^*)$的凸包 $\mathrm{conv}\widetilde{P}_1(s,\Lambda^*,\Lambda^*)$,它有六条棱边

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_1(s,\lambda_1) &= (s + 2)(s - 4) + \lambda_1(s + 2);\\
\tilde{e}_2(s,\lambda_2) &= (s + 3)(s - 4) + \lambda_2(s + 3);\\
\tilde{e}_3(s,\lambda_3) &= (s + 2)(s - 4) + \lambda_3(s - 4);\\
\tilde{e}_4(s,\lambda_4) &= (s + 2)(s - 3) + \lambda_4(s - 3);\\
\tilde{e}_5(s,\lambda_5) &= (s + 3)(s - 4) + \lambda_5 6;\\
\tilde{e}_6(s,\lambda_6) &= (s + 2)(s - 4) + \lambda_6(2s - 1);\\
\lambda_i &\in [0,1], \quad i = 1,2,\cdots,6.
\end{aligned}$$

设 $r_i(s)$表示棱边 $\tilde{e}_i(s,\lambda_i)$的顶点之差，则

$$r_1(s) = s + 2; \qquad r_2(s) = s + 3;$$

$$r_3(s) = s - 4; \qquad r_4(s) = s - 3;$$

$$r_5(s) = 6; \qquad r_6(s) = 2s - 1.$$

由于 $r_1(s)$,$r_2(s)$是稳定的，我们将控制器的分子多项式选为 $F_1(s) = 0.05(s-2)(s-3)$，这是一个反 Hurwitz 的，并选分母多项式为 s^2+5s+3,控制器为

$$C(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{0.05(s - 2)(s - 3)}{s^2 + 5s + 3},$$

则闭环系统多项式族由下式给出：

$$\begin{aligned}
\Delta(s,\Lambda,\Lambda) = \{&0.05(s - 2)(s - 3)(s + 3 - \lambda)(s - 4 + \gamma)\\
&+ (s^2 + 5s + 3)(s^2 + 4.1s + 3.1): (\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Lambda\}.
\end{aligned}$$

这是一个多线性凸多面体多项式族，它的四个顶点为

$$\delta_1^*(s) = \delta(s,1,1) = 1.05s^4 + 8.9s^3 + 26.05s^2 + 31.5s + 5.7;$$

$$\delta_2^*(s) = \delta(s,1,0) = 1.05s^4 + 8.85s^3 + 26.1s^2 + 31.8s + 4.5;$$

$$\delta_3^*(s) = \delta(s,0,1) = 1.05s^4 + 8.85s^3 + 26.45s^2 + 30.05s + 6.6;$$

$$\delta_4^*(s)=\delta(s,0,0)=1.05s^4+8.8s^3+26.55s^2+30.55s+5.7.$$

很易验证，多项式 $\delta_i^*(s)(i=1,2,3,4)$是 Hurwitz 稳定的. 根据定理1可以断定，控制器鲁棒镇定对象族 $\mathscr{P}$.

参 考 文 献

1 Petersen I R. A new extension to Kharitonov's theorem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990,**35**: 825—829

2 Chapellat H,Bhattacharyya S P. A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants. *IEEE Trans. Autom. Control*,1989, **34**:306—311

3 Chapellat H *et al.* Robust stability under structured and unstructured perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990,**35**:1100—1108

4 Barmish B R *et al.* Extreme point result for Robust stabilization of interval plants with first order compensator. *IEEE Trans. Autm. Control*, 1992, **37**: 701—714

5 Chapellat H. Robust stability manifolds for mutilinear interval system. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1993, **38**: 341—348

6 Bartlett A C *et al.* Root locations of entire polytope of polynomials: It suffices to check the edges. *Math. Control Signals Systems*, 1988,**1**: 61—71

7 Kharitonov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential'nye Uravneiya*,1978, **14**(11):2086—2088

ROBUST STABILIZATION FOR MULTILINEAR POLYTOPIC PLANT FAMILY

GENG ZHIYONG WANG ENPING

(*Institute of Systems Science,Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract This paper studies the robust stabilization of multilinear polytope of plants which are formed by connecting more than one uncertain plants in series. Under some assumptions on the structure of the compensator, it is proved that the necessary and sufficient condition for the compensator to robustly stabilize the plant family is that it simultaneously stabilizes all the extreme point plants.

Key words Robust stabilization, multilinear, polytope of plants.