第23卷 第5期
1997年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 5
Sep., 1997

短 文

二阶分布参数系统的稳定性和能控性[1)]

罗跃虎
(山西大学数学系 太原 030006)

冯德兴
(中国科学院系统科学所 北京 100080)

摘要 讨论 Hilbert 空间上两个二阶线性系统的稳定性和能控性,在较一般的假设下,得到了这两个系统的指数稳定性和精确能控性,渐近稳定性和近似能控性之间的关系. 最后,给出线性系统渐近稳定的一个充分必要条件.

关键词 渐近稳定性,指数稳定性,近似能控性,精确能控性.

1 引 言

设 H,U 是 Hilbert 空间,用 $L(U,H)$表示 U 到 H 的有界线性算子全体构成的 Banach 空间,并为简单起见,记 $L(H)=L(H,H)$. 设 A 为 H 上的正定自伴算子,B 是 H 上的线性算子,D 是从 U 到 H 的线性算子. 当 $B\in L(H)$是 H 上非负对称算子,对任何实数 $\alpha>0$,B 的 α 次幂 B^α 存在且仍是非负的. 用 $D(A)$和 $R(A)$分别表示算子 A 的定义域和值域,并用 $T^A(t)$表示由 A 生成的 C_0半群.

考虑 H 上如下两个线性系统:

$$\ddot{y}(t)-B\dot{y}(t)+Ay(t)=0, y(0)=y0, \dot{y}(0)=y_1, \tag{1}$$

$$\ddot{y}(t)+Ay(t)=Du(t), y(0)=y_0, \dot{y}(0)=y_1, \tag{2}$$

定义能量空间 $\mathscr{H}=D(A^{1/2})\times H$,$\mathscr{H}$ 按内积

$$<\begin{bmatrix}w_0\\w_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v_0\\v_1\end{bmatrix}>=<A^{1/2}w_0,A^{1/2}v_0>_H+<w_1,v_1>_H,\forall\begin{bmatrix}w_0\\w_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}v_0\\v_1\end{bmatrix}\in\mathscr{H}$$

成为 Hilbert 空间. 系统(1),(2)分别对应于 $\mathscr{H}$ 中如下的一阶发展方程(3),(4):

$$\dot{Y}(t)=\mathscr{A}Y(t)+\mathscr{B}Y(t), Y(0)=[y_0,y_1]^T, \tag{3}$$

$$\dot{Y}(t)=\mathscr{A}Y(t)+\mathscr{D}u(t), Y(0)=[y_0,y_1]^T, \tag{4}$$

其中 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 中的线性算子

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix}0 & I\\-A & 0\end{bmatrix}, D(\mathscr{A})=D(A)\times D(A^{1/2}).$$

$\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{B}$ 分别是 U 到 $\mathscr{H}$ 的有界线性算子和 $\mathscr{H}$ 上的有界线性算子

$$\mathscr{D}u=[0,Du]^{\mathrm{T}}, \forall u\in U,$$

1) 得到国家自然科学基金、山西省青年科学基金和山西省自然科学基金的资助.
收稿日期 1995-10-20

$$\mathscr{B}\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Bw_1 \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} \in \mathscr{H}.$$

不难验证 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上的反自伴算. 若 $y(t)$是系统(1)的解,则 $E(t)=\frac{1}{2}[\|\dot{y}(t)\|^2+\|A^{1/2}y(t)\|^2]$为系统(1)的能量;称系统(2)是精确(或完全近似)能控的，是指相应的一阶系统(4)为精确(或完全近似)能控的.

文献[1]在 $L^2(0,l)$中讨论了 $B\varphi(x)=d(x)\varphi(x)$时系统(1)的指数稳定性,文献[2]在 $D\psi(x)=\mathscr{K}_G(x)\psi(x)$时讨论了系统(2)的精确能控性,而文献[3]则在上述条件下研究了系统(1),(2)的指数稳定性和精确能控性之间的关系. 本文的主要目的是要在较一般的情形下，讨论系统(1)的稳定性与系统(2)能控性之间的关系.

2 指数稳定性与精确能控性

先给出下面几个已知命题[3-5].

命题1. 设 A 是 Hilbert 空间 H 中反自伴算子，$B\in L(U,H)$. 则下列命题等价:1) (A,B)指数能稳; 2) 对任意正定算子 $K\in L(H)$,$T^{A-BKB^*}(t)$都指数稳定;3) 存在一个对称算子 $K\in L(H)$,使 $T^{A-BKB^*}(t)$指数稳定; 4) (A,B)精确能控.

命题2. 设 A 是 Hilbert 空间 H 中反自伴算子且具有紧豫解式，$B\in L(U,H)$. 那么下列命题等价:1) (A,B)渐近能稳;2) 对任意正定算子 $K\in L(H)$,$T^{A-BKB^*}(t)$都渐近稳定;3) 存在一个对称算子 $K\in L(H)$,使 $T^{A-BKB^*}(t)$渐近稳定;4) (A,B)完全近似能控.

命题3. 设 A 生成 Hilbert 空间 H 中指数稳定的 C_0半群 $T^A(t)$,且 A 是耗散的，如果 $B\in L(H)$也是耗散的,且满足如下的条件 H):

$$\text{H)}\qquad \{\varphi_n\}\subset H,\lim_{n\to\infty}Re\langle B\varphi_n,\varphi_n\rangle = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}B\varphi_n = 0,$$

那么 $T^{A+B}(t)$也是指数稳定的.

对于 H 上的非负有界对称算子 B,条件 H)显然满足.

引理1. 设 A 是 X 中的反自伴算子. 如果 $B\in L(H)$是非负对称的，且存在 $v>0$和 $\beta>0$, 使得 $T^{A-vB^\beta}(t)$是指数稳定的,则对任何 $\mu>0$和 $\alpha>0$,$T^{A-\mu B^\alpha}(t)$都是指数稳定的.

证明. 首先注意，依命题1，T^{A-B^β}指数稳定，当且仅当$(A,B^{\beta/2})$精确可控. 于是再根据命题1可不妨假设 $v=\mu=1$. 取自然数 k 使$2^k\beta\geq\alpha$. 由 B 的非负对称性可知,当取 $\delta=\|B^{2^k\beta-\alpha}\|^{-1}$时,$\delta B^{2^k\beta}-B^\alpha$ 是耗散的对称算子. 但 $T^{A-B^\beta}(t)$指数稳定，故 $T^{A-B^{2\beta}}(t)$指数稳定. 由归纳法可知，$T^{A-B^{2^k\beta}}(t)$指数稳定. 于是由等式

$$A - B^\alpha = (A - \delta B^{2^k\beta}) + (\delta B^{2^k\beta} - B^\alpha)$$

和命题3可知 $T^{A-B^\alpha}(t)$指数稳定.

引理2. 设 Hilbert 空间 H 上的算子 A 具有紧豫解式，并生成 H 中的 C_0压缩半群 $T^A(t)$,那么

a) 假设 $D(A)\subset D(B)$,B 是耗散的,且 $A+B$ 生成 H 上的 C_0半群. 如果 $\mathrm{Re}\langle B\varphi,\varphi\rangle=0$蕴涵 $B\varphi=0$,则 $T^A(t)$的渐近稳定性蕴涵 $T^{A+B}(t)$的渐近稳定性.

b) 进一步假设 A 是 H 上的反自伴算子，B 是 H 上的非负有界对称算子. 如果存在 $v>0$和 $\beta>0$使得 $T^{A-vB^\beta}(t)$是渐近稳定,则对任何 $\mu>0$和 $\alpha>0$,$T^{A-\mu B^\alpha}(t)$都是渐近稳定.

证明. a) 根据假设，$A+B$ 是耗散算子，有紧豫解式，且生成 H 上的 C_0 压缩半群. 易证 $\sigma(A+B)\subset\{\lambda\in\mathscr{C}\,|\,\mathrm{Re}\lambda<0\}$. 于是由文献[6]定理3知 $A+B$ 渐近稳定.

b) 由命题2和前面已证的结论 a)，仿引理1的证明可知结论成立.

定理1. 设 A 是 H 上的正定自伴算子，$B\in L(H)$，$D\in L(U,H)$，那么

a) 如果存在自然数 n 使 $R((BB^*)^n)\in R(DD^*)$，则系统(1)指数稳定蕴涵系统(2)精确能控；

b) 假设 B 是 H 上耗散的对称算子. 如果存在自然数 n 使 $R((DD^*)^n)\subset R(B)$，则系统(2)精确能控蕴涵系统(1)指数稳定.

特别地，如果 $R(B)=R(DD^*)$，则系统(1)的指数稳定性与系统(2)的精确能控性等价.

证明. a) 设 $R((BB^*)^n)\subset R(DD^*)$ 且系统(1)指数稳定. 首先证明系统

$$\dot{Y}(t)=\mathscr{A}Y(t)+\mathscr{K}Y(t),\quad Y(0)=[y_0,y_1]^T$$

是指数稳定的，其中 K 是 H 上的有界线性算子

$$\mathscr{K}\begin{bmatrix}w_0\\w_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\DD^*w_1\end{bmatrix},\quad\forall\begin{bmatrix}w_0\\w_1\end{bmatrix}\in\mathscr{H}.$$

事实上，由于 $R((BB^*)^n)\subset R(DD^*)$，故由文献[5]知存在 $\delta_0>0$ 使得

$$\|(BB^*)^n x\|\le\delta_0\|DD^*x\|,\quad\forall x\in H.$$

这样 $(BB^*)^{2n}-\delta_0^2(DD^*)^2$ 是 H 上的耗散算子，因而满足条件 H). 由于

$$\mathscr{K}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&(DD^*)^2\end{bmatrix},\ (\mathscr{B}\mathscr{B}^*)^n=\begin{bmatrix}0&0\\0&(BB^*)^n\end{bmatrix},$$

故 $(BB^*)^{2n}-\delta_0^2\mathscr{K}^2$ 是 H 上耗散的对称算子. 显然 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{H}$ 上的反自伴算子. 因 $T^{\mathscr{A}+\mathscr{B}}(t)$ 是指数稳定的，故由命题1可知 $T^{\mathscr{A}-\mathscr{B}\mathscr{B}^*}(t)$ 是指数稳定的. 于是根据引理1，$T^{\mathscr{A}-\delta_0^{-2}(BB^*)^{2n}}(t)$ 是指数稳定的. 由等式

$$\mathscr{A}-\mathscr{K}^2=(\mathscr{A}-\delta_0^{-2}(\mathscr{B}\mathscr{B}^*)^{2n})+(\delta_0^{-2}(\mathscr{B}\mathscr{B}^*)^{2n}-\delta_0^2\mathscr{K}^2)$$

和命题3可知 $T^{\mathscr{A}-\mathscr{K}^2}(t)$ 是指数稳定的. 再由引理1可知 $T^{\mathscr{A}-\mathscr{K}}(t)$ 是指数稳定的.

容易看出 $\mathscr{D}\mathscr{D}^*=\mathscr{K}$，故 $T^{\mathscr{A}-\mathscr{D}\mathscr{D}^*}(t)$ 是指数稳定的. 由此从命题1可知 $(\mathscr{A},\mathscr{D})$ 是精确能控的，即系统(4)是精确能控的.

b) 设 $R((DD^*)^n)\subset R(B)$，系统(2)是精确能控的，并且 B 是 H 上耗散的对称算子. 应用类似于前面的证明方法可知，存在 $\delta_2>0$ 使得 $\delta_2(DD^*)^{2n}-BB^*$ 是耗散的对称算子，且 $T^{\mathscr{A}-\delta_2(\mathscr{D}\mathscr{D}^*)^{2n}}(t)$ 是指数稳定的. 由等式

$$\mathscr{A}-\mathscr{B}^2=(\mathscr{A}-\delta_2(\mathscr{D}\mathscr{D}^*)^{2n})+(\delta_2(\mathscr{D}\mathscr{D}^*)^{2n}-\mathscr{B}^2)$$

和命题3可知 $T^{\mathscr{A}-\mathscr{B}^2}(t)$ 是指数稳定的. 由于 $\mathscr{B}$ 是非正的，故由引理1可知 $T^{\mathscr{A}+\mathscr{B}}(t)$ 是指数稳定的.

3　渐近稳定性与近似能控性

利用命题2和引理2，并用类似于定理1的证法可得下面的定理.

定理2. 设 A 是 X 上正定的自伴算子且具有紧豫解式，设 $B\in L(H)$，$D\in L(U,H)$，

那么

a）如果存在自然数 n 使 $R((BB^*)^n)\subset R(DD^*)$，则系统(1)的渐近稳定性蕴涵系统(2)完全近似能控性；

b）假设 B 是 H 上耗散的对称算子. 如果存在自然数 n 使 $R((DD^*)^n)\subset R(B)$，则系统(2)完全近似能控性蕴涵系统(1)渐近稳定性.

特别地，如果 $R(B)=R(DD^*)$，则系统(1)的渐近稳定性与系统(2)的完全近似能控性等价.

定理3. 设 A 是 H 上具有紧豫解式的线性耗散算子，A 生成 H 上的 C_0-半群. 设 B 是 H 上的线性耗散算子，使得 $D(A)\subset D(B)$，并且 $A+B$ 生成 H 上的 C_0-半群. 如果 $A+B$ 是 H 上具有紧豫解式的算子，且 $\mathrm{Re}\langle B\varphi,\varphi\rangle=0$ 蕴涵 $B\varphi=0$，则 $T^{A+B}(t)$ 渐近稳定的充要条件是，对 A 的任何特征向量 φ 都有 $B\varphi\neq 0$.

证明. 必要性. 如果存在 A 的特征向量 φ_0 使得 $B\varphi_0=0$，则有 $(A+B)\varphi_0=\lambda_0\varphi_0$，这里 $\lambda_0=i\omega(\omega\in\mathbb{R})$ 是 A 的某个本征值，这表明 λ_0 是 $A+B$ 的本征值. ’显然 $T^{A+B}(t)$ 不可能是渐近稳定的.

充分性. 由假设可知 $A+B$ 是 H 上的耗散算子，因而 $A+B$ 生成 H 上的压缩半群. 于是 $A+B$ 的谱在左半平面中. 下证 $A+B$ 的谱在左半开平面中. 设 $\omega\in\mathbb{R}$，使得 $i\omega\in\sigma(A+B)$，则依对 $A+B$ 具有紧豫解式的假设，必有 $i\omega\in\sigma_p(A+B)$，从而存在非零元 $\varphi\in H$，使得 $(A+B)\varphi=i\omega\varphi$. 由引理2的 a)的证明有 $A\varphi=i\omega\varphi$，且 $B_\varphi=0$. 这表明 φ 是 A 的本征元，但根据假设，有 $B_\varphi\neq 0$，导致矛盾. 这样，证明了 $\sigma(A+B)\subset\{\lambda\in C\mid\mathrm{Re}\lambda<0\}$. 从而由文献[6]得到 $T^{A+B}(t)$ 渐近稳定性.

由此定理可以得到系统(1)渐近稳定性和系统(2)完全近似能控性的如下特征：

推论1. 设 A 是 H 上正定的具有紧豫解式的自伴算子，$B\in L(H)$ 是非正的对称算子，那么

a）系统(1)渐近稳定的充要条件是：对 A 的任何本征元 φ 都有 $B\varphi\neq 0$；

b）系统(2)完全近似能控的充要条件是，对 A 的任何本征元 φ，都有 $DD^*\varphi\neq 0$；特别地，当 $U=H, D\in L(H)$ 是非负或是非正算子时，系统(2)完全近似能控的充要条件是：对 A 的任何本征元 φ，都有 $D\varphi\neq 0$.

推论2. 设 A 是 H 上正定的自伴算子且具有紧豫解式，B 是 H 上耗散的闭对称算子，并且 $D(B)\subset D(A)$. 假定 $\mathrm{Re}\langle B\varphi,\varphi\rangle=0$ 蕴涵 $B\varphi=0$，并且 $A+B$ 生成 H 上的 C_0 半群. 如果 $A+B$ 在 $\mathscr{H}$ 上具有紧豫解式，则系统(1)渐近稳定的充要条件是，对 A 的任何本征元 φ 都有 $B\varphi\neq 0$；特别地，如果存在 $\alpha\in[0,1)$ 使得 $D(B)\supset D(A^{-\alpha})$，则系统(1)渐近稳定的充要条件是，对 A 的任何本征元 φ，都有 $B\varphi\neq 0$.

参 考 文 献

[1] Chen G, Fulling S A, Narcowicch F J, Sun S. Exponential decay of energy of evolution equation with locally distributed damping. *SIAM J. Appl. Math.*, 1991, **51**(1): 266—301.

[2] Lagnese J. Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion. *SIAM J. Control Optim.*, 1983, **21**(1): 68—85.

[3] 刘康生. 分布参数系统的边界的局部控制与镇定[博士论文]. 上海：复旦大学，1991.

[4] Slemrod M. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systyms in Hibert space.

SIAM J. control, 1974, **12**(3): 500—508.
[5] curtain R F, Pritchard A J. Infinite Dimensional Linear Systym Theory. New York: Sprınger-Verlag, 1978.
[6] 黄发伦. 关于一般 Banach 空间中的线性动力系统的渐近稳定性理论. 科学通报, 1983, **28**(10): 584—586.

STABILITY AND CONTROLLABILITY FOR SECOND ORDER DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEM

LUO YUEHU　　FENG DEXING
(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract The stability and controllability for two second order systems are considered. Under some general assumptions, the useful relation between exponential stability and exact controllability and the relation between approximate controllability of the two second order systems are obtained. Finally, a sufficient and necessary condition for a linear system to be asymptotic stable is given.

Key words Asymptotic stability, exponential stability, approximate controllability, exact controllability.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会和中国科学院自动化所主办的全国性高级学术期刊,双月刊.在美国出版英译版,季刊.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平理论性和应用性学术论文.内容包括:1.自动控制理论;2.系统理论与系统工程;3.自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用;4.自动化系统计算机辅助技术;5.机器人与自动化;6.人工智能与智能控制;7.自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计;8.自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊以发表论文和短文为主,并不定期地发表综述文章、问题讨论、书刊评论、国内外学术活动信息等.

四、本刊不接受已在国内外期刊上发表(包括待发表)的稿件,但不排除已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文(对于此种情况,作者必须在稿件首页脚注说明).

五、稿件内容的正确性、真实性和可靠性由作者自行负责.

六、来稿一式三份寄北京中关村中国科学院自动化所《自动化学报》编辑部.邮编100080.编辑部在收稿后一周内寄送回执.作者请自留底稿,稿件概不退还.稿件是否录用一般在半年内通知作者.

七、稿件刊登与否由本刊编委会最后审定,已被接受的稿件需严格按审查意见和《作者加工稿件须知》修改并一式两份寄编辑部.同时与编辑部签订版权协议.

八、编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改.文章发表后,按篇酌致稿酬,并赠送30本抽印本,在稿件的修改及联系过程中,如果不特殊说明,本刊只与第一作者联系.

(下转第688页)