第 23 卷 第 3 期
1997 年 5 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 3
May, 1997

仿射非线性系统的动态输出反馈镇定1)

陈彭年 韩正之 张钟俊

(上海交通大学自动控制系 上海 200030)

摘 要 对能用状态反馈镇定且完全能观的仿射非线性系统，给出了保证闭环系统渐近稳定的动态补偿器的设计方法.

关键词 非线性系统，镇定，动态补偿器.

1 引言

动态输出反馈镇定在非线性控制理论中具有重要的作用，因为许多系统的状态不能直接测量，控制律只能根据输出构造. 1986 年美国 IEEE 控制委员会在其“高峰会议”的决议中指出，动态非线性补偿理论是将来的重要研究方向[1]. 但到目前为止，动态输出反馈镇定只做过少量研究. 其中 Vidyasagar[2]研究了用状态检测器的镇定问题；Tsinias[3,4]进一步考虑了用状态检测器的局部和全局渐近镇定问题，推广了 Vidyasagar 的有关结果；韩正之等[5]研究了用状态检测器的有界镇定. 在用状态检测器镇定的研究中，主要的假设条件是状态检测器的存在性，但状态检测器的存在性是一个困难的未解决问题. Marino 等[6]和 Tornambe[7]分别研究了能完全线性化的单输入单输出的仿射非线性系统的动态输出反馈全局和局部镇定. 潘丹杰等[8]用中心流形理论研究了一类非线性系统的动态输出反馈镇定，得到了充分条件. Byrnes 等[9]研究了一个不能静态输出反馈镇定，但能动态输出反馈的例子. 从上述文献可以看到，非线性系统动态输出反馈镇定的研究具有很大的局限性. 本文研究仿射非线性系统的动态输出反馈镇定. 这一结果是线性系统控制理论中用动态输出反馈镇定理论的直接推广.

2 动态补偿器的设计

考虑仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, f \in C^\infty(U, R^n), f(0)=0, g \in C^\infty(U, R^{n\times m}), h \in C^\infty(U, R^p)$, $h(0)=0$；U 是 $x=0$ 的一个开邻域.

1) 国家自然科学基金和上海交通大学科学基金资助项目.
收稿日期 1994-12-12

首先引入非线性系统完全能观性概念,它是线性系统能观性概念的推广. 对于单输入单输出系统,此概念已在文献[7]中引入. 本文将其推广到多输入多输出系统.

据文献[7],定义下列微分运算

$$\begin{cases} y = h(x), \\ \dot{y} = \dot{y}(x,u) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(f(x)+g(x)u), \\ y^{(k+1)} = y^{(k+1)}(x,u,\cdots,u^{(k)}) \\ \quad = \dfrac{\partial y^{(k)}}{\partial x}(f(x)+g(x)u) + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\dfrac{\partial y^{(k)}}{\partial u^{(i)}}u^{(i+1)}, k=1,2,\cdots,n-2. \end{cases} \tag{2}$$

记

$$y_e = (y^T,\dot{y}^T,\cdots,(y^{(n-1)})^T)^T, u_e = (u^T,\dot{u}^T,\cdots,(u^{(n-2)})^T)^T.$$

显然,$y_e\in R^{np}$,$u_e\in R^{(n-1)m}$. (2)式可以记为

$$y_e = \mathscr{L}(x,u_e), \tag{3}$$

其中 $\mathscr{L}\in C^\infty(U\times R^{(n-1)m},R^{np})$,$\mathscr{L}(0,0)=0$.

定义 1. 称系统(1)局部完全能观(简称完全能观),如果在(3)式中局部地能解出 x,即存在 C^∞ 函数 q,$q(0,0)=0$,使得在 $x=0$,$y_e=0$,$u_e=0$ 的某邻域内恒有

$$x = q(y_e,u_e).$$

定理 1. 记 $C=\left.\dfrac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0}$,$A=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}$. 如果$(C,A)$是能观对,则系统(1)完全能观.

证明. 将(2)式写成如下形式

$$\begin{cases} y = Cx+\Delta_1(x), \\ \dot{y} = CAx+\Delta_2(x,u), \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)} = CA^{n-1}x+\Delta_n(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(n-2)}), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$为 C^∞函数,并且 $\Delta_1(x)=o(\|x\|)$, $\Delta_2(x,0)=o(\|x\|)$,$\cdots$,$\Delta_n(x,0,0,\cdots,0)=o(\|x\|)$.

因为(C,A)是能观对,所以有

$$\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{pmatrix} = n.$$

由隐函数定理知,在 $x=0$,$y_e=0$,$u_e=0$ 的某邻域内,可从(4)式中解出 x,即存在 C^∞ 函数 q,$q(0,0)=0$,使得在 $x=0$,$y_e=0$,$u_e=0$ 的某邻域内恒有

$$x = q(y_e,u_e).$$

证毕.

动态补偿器的构造分两部分进行,先构造预补偿器,然后再构造完整的动态补偿器.

设 $\lambda_i=(\lambda_{i1},\lambda_{i2},\cdots,\lambda_{im})^T\in R^m(i=1,2,\cdots,n-1)$,做预补偿器

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1 = \lambda_2, \\ \quad\vdots \\ \dot{\lambda}_{n-2} = \lambda_{n-1}, \\ \dot{\lambda}_{n-1} = \hat{u}, \\ u = \lambda_1, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $u=\lambda_1$ 是预补偿器的输出,$\hat{u}$ 是输入.由系统(1)和(5)构成的串联系统为

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x) + g(x)\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_2, \\ \quad\vdots \\ \dot{\lambda}_{n-2} = \lambda_{n-1}, \\ \dot{\lambda}_{n-1} = \hat{u}, \\ y = h(x). \end{cases} \tag{6}$$

记 $\lambda=(\lambda_1^T,\lambda_2^T,\lambda_{n-1}^T)^T$.

定理 2. 如果系统(1)能用 C^∞ 状态反馈镇定且完全能观,则系统(6)能用只依赖于 y_e 和 λ 的 C^∞ 反馈镇定,即在 $y_e=0$ 和 $\lambda=0$ 的某个邻域里存在 C^∞ 映射 $\alpha,\alpha(0,0)=0$,使得由

$$\hat{u} = \alpha(y_e,\lambda) \tag{7}$$

和系统(6)构成的闭环系统的零解 $x=0,\lambda=0$ 渐近稳定.

证明. 因为系统(1)能用 C^∞ 状态反馈镇定,根据积分器镇定原理,系统(6)能用 C^∞ 状态反馈镇定,即在 $x=0,\lambda=0$ 的某邻域里存在 C^∞ 映射 $\hat{\alpha},\hat{\alpha}(0,0)=0$,使得由

$$\hat{u} = \hat{\alpha}(x,\lambda) \tag{8}$$

和系统(6)构成的闭环系统的零解渐近稳定.

因为系统(1)完全能观,所以存在 C^∞ 映射 $q,q(0,0)=0$,使得在 $x=0,y_e=0,u_e=0$ 的某邻域里有

$$x = q(y_e,u_e).$$

由系统(6)的构造知,$u_e=\lambda$. 因此有

$$x = q(y_e,\lambda). \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式,得到

$$\hat{u} = \hat{\alpha}(q(y_e,\lambda),\lambda). \tag{10}$$

设 $\alpha(y_e,\lambda)=\hat{\alpha}(q(y_e,\lambda),\lambda)$. 显然 α 是 C^∞ 函数. 因为由(10)式和系统(6)构成的闭环系统的零解渐近稳定,所以由 $\hat{u}=\alpha(y_e,\lambda)$ 和系统(6)构成的闭环系统的零解渐近稳定. 证毕.

反馈控制律(7)与 y 的导数有关,难以物理实现. 下面,构造物理上能实现的动态输出反馈律.

设 $y^{(n)}=y^{(n)}(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(n-1)})$ 是 y 的 n 阶导数. 定义 C^∞ 映射

$$\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\hat{u}) = y^{(n)}(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(n-1)})\Big|_{x=q(y_e,\lambda),u_e=\lambda,u^{(n-1)}=\hat{u}}, \tag{11}$$

其中 $q(y_e,\lambda)$ 由(9)式定义.

设 $\theta_i=(\theta_{i1},\theta_{i2},\cdots,\theta_{ip})^T\in R^p(i=1,2,\cdots,n)$, $\theta=(\theta_1^T,\theta_2^T,\cdots,\theta_n^T)^T$ 及

$$\varphi(\theta,\lambda) = \hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(y_e,\lambda))\Big|_{y_e=\theta}. \tag{12}$$

做动态系统

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 + kl_1(y-\theta_1), \\ \dot{\theta}_2 = \theta_3 + k^2 l_2(y-\theta_1), \\ \qquad \vdots \\ \dot{\theta}_{n-1} = \theta_n + k^{n-1} l_{n-1}(y-\theta_1), \\ \dot{\theta}_n = k^n l_n(y-\theta_1) + \varphi(\theta,\lambda). \end{cases} \tag{13}$$

其中 $k>0$, $l_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,使得 $p(s)=s^n+l_1 s^{n-1}+\cdots+l_n$ 为 Hurwitz 多项式.

用 θ 去代替(7)式中的 y_e,得到新的反馈律

$$\hat{u} = \alpha(\theta,\lambda). \tag{14}$$

显然,反馈律(14)是能够物理实现的.由系统(5),(13)和(14)构成了系统(1)的一个动态补偿器,它和系统(1)构成的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\lambda_1, \\ \dot{\lambda}_1 = \lambda_2, \\ \qquad \vdots \\ \dot{\lambda}_{n-2} = \lambda_{n-1}, \\ \dot{\lambda}_{n-1} = \alpha(\theta,\lambda), \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2 + kl_1(y-\theta_1), \\ \dot{\theta}_2 = \theta_3 + k^2 l_2(y-\theta_1), \\ \qquad \vdots \\ \dot{\theta}_{n-1} = \theta_n + k^{n-1} l_{n-1}(y-\theta_1), \\ \dot{\theta}_n = k^n l_n(y-\theta_1) + \varphi(\theta,\lambda). \end{cases} \tag{15}$$

其中 $k>0$,为待定常数;$y=h(x)$.

3 稳定性

本节研究系统(15)的稳定性.

设矩阵 $A,E_k,L_p\in R^{np\times np}$和 $b\in R^{np\times p}$具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_p & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_p \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_k = \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & kI_p & & \\ & & \ddots & \\ & & & k^{n-1}I_p \end{pmatrix},$$

$$L_p = \begin{bmatrix} l_1 I_p & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 I_p & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ l_n I_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_p \end{bmatrix}. \tag{16}$$

其中 I_p 是 p 阶单位阵，$k>0, l_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $p(s)=s^n+l_1s^{n-1}+\cdots+l_n$ 是 Hurwitz 多项式.

引理 1. 设 A, E_k, L_p 和 b 由(16)式定义，且 $D\in R^{p\times np}$，则存在 $k^*>0$，使得当 $k\geqslant k^*$ 时，$A-kE_kL_p+bD$ 是稳定矩阵.

证明. 设 $A_L=A-L_p$. 由直接计算知，A_L 的特征多项式是 $(p(s))^p$. 因此 A_L 是稳定矩阵.

设 $k>0$. 由直接计算知，

$$E_k^{-1}(A-kE_kL_p+bD)E_k = kA_L + \frac{1}{k^{n-1}}bDE_k.$$

因此，为证明引理 1，只须证明存在 $k^*>0$，且当 $k\geqslant k^*$ 时，$kA_L+\frac{1}{k^{n-1}}bDE_k$ 是稳定矩阵即可.

因为 A_L 是稳定矩阵，所以存在 $P>0$，使得 $PA_L+A_L^TP=-I_{np}$，其中 I_{np}是 np 阶单位阵.

设 $k^*=1+2\|PbD\|$，则当 $k\geqslant k^*$ 时

$$P(kA_L+\frac{1}{k^{n-1}}bDE_k)+(kA_L+\frac{1}{k^{n-1}}bDE_k)^TP$$

$$=k(pA_L+A_L^Tp)+\frac{1}{k^{n-1}}(pbDE_k+bDE_k)^Tp)$$

$$\leqslant -kI_{np}+2\|pbD\|I_{np}\leqslant -I_{np}.$$

证毕.

定理 3. 设系统(1)完全能观，并且能用 C^∞ 状态反馈镇定，则存在 $k^*>0$；当 $k\geqslant k^*$ 时，系统(15)零解渐近稳定. 由此推断系统(1)能用动态输出反馈镇定.

证明. 为方便计，先将系统(15)写成比较紧凑的形式.

设 $z=(x^T,\lambda^T)^T$. 由系统(6)和(7)式组成的闭环系统为

$$\dot{z}=F(z,y_e). \tag{17}$$

利用(16)式中的记号，可将系统(15)记为

$$\begin{cases} \dot{z}=F(z,\theta), \\ \dot{\theta}=A\theta+kE_kL(y-\theta_1)+b\varphi(\theta,\lambda). \end{cases} \tag{18}$$

其中 $L=(l_1I_p\ l_2I_p\cdots l_nI_p)^T, y=h(x)$.

在(18)式中，对 $y=h(x)$求 n 阶导数. 由(11)和(14)式知

$$y^{(n)}=\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(\theta,\lambda)). \tag{19}$$

设 $e=y_e-\theta$，则从(18)和(19)式得

$$\begin{cases} \dot{z}=F(z,y_e-e), \\ \dot{e}=(A-kE_kL_p)e+b(\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(\theta,\lambda))-\varphi(\theta,\lambda)). \end{cases} \tag{20}$$

由(12)式知

$$\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(\theta,\lambda))-\varphi(\theta,\lambda)=\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(\theta,\lambda))-\hat{\varphi}(\theta,\lambda,\alpha(\theta,\lambda))$$
$$=\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(y_e-e,\lambda))-\hat{\varphi}(y_e-e,\lambda,\alpha(y_e-e,\lambda))\triangleq\eta(y_e,\lambda,e).$$

由于当 $e=0$ 时,$\eta(y_e,\lambda,0)=0$,因此可设

$$\hat{\varphi}(y_e,\lambda,\alpha(\theta,\lambda))-\varphi(\theta,\lambda)=De+R(y_e,\lambda,e)e,$$

其中 $D\in R^{p\times np}$,$R(y_e,\lambda,e)$满足 $R(0,0,0)=0$. 系统(20)可以重新写成

$$\begin{cases}\dot{z}=F(z,y_e-e),\\ \dot{e}=(A-kE_kL_p+bD)e+bR(y_e,\lambda,e)e.\end{cases}\tag{21}$$

由引理 1 知,存在 $k^*>0$,当 $k\geqslant k^*$ 时,$A-kE_kL_p+bD$ 是稳定矩阵.

由文献[10]的引理 4.3 知,系统(21)的零解渐近稳定. 再由此推知,当 $k\geqslant k^*$ 时,系统(18)的零解渐近稳定,即系统(15)的零解渐近稳定.　　证毕.

现举一例,说明定理 3 的应用.

例 1　考虑控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3-x_2^2\sin x_1+u,\\ \dot{x}_3=-x_3^3(1+x_2),\\ y=x_1.\end{cases}\tag{22}$$

易知,系统(22)不能局部完全线性化,因此文献[7]的结果不适用此系统. 但系统(22)能用 C^∞ 状态反馈镇定. 对 y 求导得

$$\begin{cases}y=x_1,\\ \dot{y}=x_2,\\ \ddot{y}=x_3-x_2^2\sin x^1+u.\end{cases}\tag{23}$$

由(23)式可得

$$\begin{cases}x_1=y,\\ x_2=\dot{y},\\ x_3=\ddot{y}+(\dot{y})^2\sin y-u.\end{cases}\tag{24}$$

由(24)式知,系统(22)完全能观. 因此,根据定理 3,系统(22)能用 C^∞ 动态输出反馈镇定.

5　结束语

本文对完全能观且能状态反馈镇定的仿射系统,提出了一种保证闭环系统渐近稳定的动态补偿器的设计方法. 但是,动态补偿器的设计仍有许多问题需要研究,例如动态补偿器阶数的降低、闭环系统具有一定的吸引区域等问题,对实际应用极为重要,值得进一步研究.

参 考 文 献

[1] Levis A H *et al.* (Eds) Report on the workshop:challenges to control——a collective view. *IEEE Trans. Au-*

tomat. Contr., 1987, **32**(4):275—285.

[2] Vidyasagar M. On the stabilization of nonlinear systems using state detection. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1980, **25**(3):504—509.

[3] Tsinias J. A generalization of Vidyasagar's theorem on stabilizability using state detection. *Syst. Contr. Lett.*, 1991, **17**(1):37—42.

[4] Tsinias J. Sontag's input to state stability condition and global stabilization using state detection. *Syst. Contr. Lett.*, 1993, **20**(3):219—226.

[5] 韩正之,潘丹杰,张钟俊. 非线性系统用状态检测器的有界镇定. 系统科学与数学,1992,**12**(2):229—239.

[6] Marino R, Tomei P. Dynamic output feedback linearization and global stabilization. *Syst. Contr. Lett.*, 1991, **17**(2):115—121.

[7] Tornambe A. Output feedback stabilizatın of a class of nonminimum phase nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **19**(2):193—204.

[8] 潘丹杰,韩正之,张钟俊. 一类非线性系统的输出反馈镇定. 控制与决策,1990,**5**(1):1—6.

[9] Byrnes C I, Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization. *Syst. contr. Lett.*, 1989, **12**(5):437—442.

[10] Byrnes C I, Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **36**(10):1122—1137.

DYNAMIC OUTPUT FEEDBACK STABILIZATION OF AFFINE NONLINEAR SYSTEMS

CHEN PENGNIAN HAN ZHENGZHI ZHANG ZHONGJUN

(*Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract In this paper, we investigate the problem of dynamic output feedback stabilization of affine nonlinear systems. We prove that if an affine nonlinear system is completely observable and stabilizable by means of state feedback, then it is stabilizable by means of dynamic output feedback, and moreover, present the design of dynamic nonlinear compensation.

Key words Nonlinear system, stabilization, dynamic compensator.

陈彭年 简介见本刊第 21 卷第 3 期.

韩正之 简介见本刊第 18 卷第 4 期.

张钟俊 简介见本刊第 17 卷第 6 期.