第23卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 23, No. 6
1997年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1997

研究简报

非线性定常系统及其定常 Lyapunov 函数的多项式等价类

苗 原　李春文　杜继宏
（清华大学自动化系　北京　100084）

关键词　稳定性，非线性多项式系统，李亚普诺夫函数.

1　引言

李亚普诺夫第二方法作为处理系统稳定性问题的最主要的方法之一已被广泛地应用（见文[1]）. Lyapunov 函数的存在性也在很大程度上得到证明. 一旦对一个系统构造出了 Lyapunov 函数，则其稳定性可以得到完全的判定. 然而构造 Lyapunov 函数并无一般方法. 事实上，目前对于非线性系统，只能就一些形式简单或很特殊的系统找到 Lyapunov 函数.

文[2]给出了一种判定稳定性的方法，该方法是先设法构造出定号的 $\dot{v}(\boldsymbol{x})$ 函数，或者说，先构造出满足 $\dot{v}(\boldsymbol{x})$ 定号的函数 $v(\boldsymbol{x})$，然后再根据所得到的 $v(\boldsymbol{x})$ 的符号性质来判定系统的稳定不稳定性. 该方法使得在构造 Lyapunov 函数时的约束由要求 $v(\boldsymbol{x})$，$\dot{v}(\boldsymbol{x})$ 均满足某些符号性质减弱为只要求 $\dot{v}(\boldsymbol{x})$ 定号. 这种方法应用于多项式系统，且 $v(\boldsymbol{x})$ 也是多项式时，可以利用待定系数法求 $v(\boldsymbol{x})$，能够避开如变量梯度法等方法中需要直接处理旋度方程的困难.

然而一般情况下，系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})$ 并非多项式系统，$v(\boldsymbol{x})$ 也不一定是多项式，因而 $v(\boldsymbol{x})$ 的构造仍是很困难的. 文[3]证明了在满足一种称为有限截取的条件时，系统的稳定性质与一个多项式系统的稳定性质等价，且该多项式系统有一个多项式形式的 Lyapunov 函数. 本文将进一步弱化这一条件，使得只要系统存在一个定常的 Lyapunov 函数，且它对时间导数的 Taylor 级数在原点领域内是收敛的，则系统的稳定性判定问题即可归结为某个等价的多项式系统的稳定性判定问题.

2　主要结果

令 $P(\boldsymbol{x})$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的多项式，$\boldsymbol{x}\in R^n$，用 ∂P 记 $P(\boldsymbol{x})$ 的最高项次数，则有

收稿日期　1995-05-16

$$P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} P_i(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

其中 $P_i(\boldsymbol{x})$为 ∂P_i 次齐次多项式($i=1,\cdots,k$),且对 $j>i$,有 $\partial P_j>\partial P_i$. $P(\boldsymbol{x})$的极坐标表示为

$$P(\boldsymbol{x}) = P(\boldsymbol{\theta},r) = \sum_{i=1}^{k} a_i(\boldsymbol{\theta}) r^{\partial P_i}. \tag{2}$$

其中 $r=\|\boldsymbol{x}\|$;$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T$;$\theta_1,\cdots,\theta_n$为 $\boldsymbol{x}$ 与各坐标轴夹角,满足 $\cos^2\theta_1+\cdots+\cos^2\theta_n=1$. 令 $M\triangleq\{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}\in[0,\pi]^n,\cos^2\theta_1+\cdots+\cos^2\theta_n=1\}$,则 M 为 R^n中一个闭集. 以下称$(D(\boldsymbol{\theta}),r)\triangleq\{(\boldsymbol{\theta}_0,r_0)|\boldsymbol{\theta}_0\in D(\boldsymbol{\theta})\subset M$ 为闭集,$r_0<r\}$为一个半径为 r 的原点闭扇区.

引理 1. 齐次多项式 $P(\boldsymbol{x})=\alpha(\boldsymbol{\theta})r^{\partial P}$在原点闭扇区$(D(\boldsymbol{\theta}),r_0)$上正定,当且仅当$\exists\ \alpha>0$,有

$$P(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{x}\|^{\partial P}. \tag{3}$$

证明. 充分性显然;仅证必要性. 由 $P(\boldsymbol{x})$在$(D(\boldsymbol{\theta}),r_0)$上正定,可知 $\alpha(\boldsymbol{\theta})>0$, $\boldsymbol{\theta}\in D(\boldsymbol{\theta})$. 取 $\alpha=\inf\limits_{\boldsymbol{\theta}\in D(\boldsymbol{\theta})}\{a(\theta)\}$, 由于 $D(\boldsymbol{\theta})$为闭集,知 $\alpha>0$. 从而 $P(\boldsymbol{x})=\alpha(\boldsymbol{\theta})r^{\partial P}\geqslant\alpha r^{\partial P}=\alpha\|\boldsymbol{x}\|^{\partial P}$. 证毕.

引理 2. 非齐次多项式(1)在某个原点闭扇区$(D(\boldsymbol{\theta}),r_0)$上正定,满足弱化的有限截取条件(见文[4]),当且仅当存在 $\alpha>0,r_1>0$,在$(D(\boldsymbol{\theta}),r_1)$上有

$$P(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha \|\boldsymbol{x}\|^{\partial P_k}. \tag{4}$$

证明. 充分性显然;仅证必要性. 首先设 $P(\boldsymbol{x})$由两组齐次项组成,即 $P(\boldsymbol{x})=P_1(\boldsymbol{x})+P_2(\boldsymbol{x})=\alpha_1(\boldsymbol{\theta})r^{\partial P_1}+\alpha_2(\boldsymbol{\theta})r^{\partial P_2}$.

由 $P(\boldsymbol{x})$正定知必有 $\alpha_1(\boldsymbol{\theta})\geqslant0,\boldsymbol{\theta}\in D(\boldsymbol{\theta})$. 否则可令 $\alpha_1(\boldsymbol{\theta}_0)<0$. 此时若 $\alpha_2(\boldsymbol{\theta}_0)=0$,取 $r'=r_0$;若 $\alpha_2(\boldsymbol{\theta}_0)\neq0$,取 $r'=\min\left(\left(\dfrac{|\alpha_1(\boldsymbol{\theta}_0)|}{|\alpha_2(\boldsymbol{\theta}_0)|}\right)^{\frac{1}{\partial P_2-\partial P_1}},r_0\right)$,当 $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0$, $\|\boldsymbol{x}\|<r'$时有$\left(1+\dfrac{\alpha_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\alpha_1(\boldsymbol{\theta}_0)}\|\boldsymbol{x}\|^{\partial P_2-\partial P_1}\right)>0$,即 $P(\boldsymbol{x})=r^{\partial P_1}\alpha_1(\boldsymbol{\theta}_0)\left(1+\dfrac{\alpha_2(\boldsymbol{\theta}_0)}{\alpha_1(\boldsymbol{\theta}_0)}r^{\partial P_2-\partial P_1}\right)<0$,与 $P(\boldsymbol{x})$在$(D(\boldsymbol{\theta}),r_0)$上正定矛盾.

令 $D_2^*(\boldsymbol{\theta})=\{\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}\in D(\boldsymbol{\theta}),a_1(\boldsymbol{\theta})=0\}$,则由 $P(\boldsymbol{x})$正定性可知 $\alpha_2(\boldsymbol{\theta})>0,\boldsymbol{\theta}\in D_2^*(\boldsymbol{\theta})$. 令 $\alpha_2=\inf\limits_{\boldsymbol{\theta}\in D_2^*(\boldsymbol{\theta})}\{\alpha_2(\boldsymbol{\theta})\}$,由于 $D_2^*(\boldsymbol{\theta})$闭,有 $\alpha_2>0$,则存在 $D(\boldsymbol{\theta})$的开子集 $D_2(\boldsymbol{\theta}),D_2(\boldsymbol{\theta})\supset D_2^*(\boldsymbol{\theta})$,对于 $\theta\in D_2(\theta)$满足 $\alpha_2(\boldsymbol{\theta})>\dfrac{1}{2}\alpha_2$,则在$(D_2(\theta),r_0)$上有 $P(\boldsymbol{x})\geqslant\alpha_2(\boldsymbol{\theta})r^{\partial P_2}\geqslant\dfrac{1}{2}\alpha_2\|\boldsymbol{x}\|^{\partial P_2}$.

记差集 $D_1(\boldsymbol{\theta})=D(\boldsymbol{\theta})\backslash D_2(\boldsymbol{\theta})$,由于 $D_2(\boldsymbol{\theta})$开,故 $D_1(\boldsymbol{\theta})$闭. 显然在闭集 $D_1(\boldsymbol{\theta})$上,有 $\alpha_1(\boldsymbol{\theta})>0$. 令 $\alpha_1=\inf\limits_{\boldsymbol{\theta}\in D_1(\boldsymbol{\theta})}\{a_1(\boldsymbol{\theta})\}$,则 $\alpha_1>0$. 取 $r_1\leqslant\min\{r_0,1\}$,使得 $0<r<r_1$ 时,有 $1-\dfrac{2\sup\limits_{\boldsymbol{\theta}\in D_1(\boldsymbol{\theta})}|\alpha_2(\boldsymbol{\theta})|}{\alpha_1}r^{\partial P_2-\partial P_1}>0$,从而在$(D_1(\theta),r)$上有

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}) &\geqslant \alpha_1 r^{\partial P_1} - \sup_{\boldsymbol{\theta}\in D_1(\boldsymbol{\theta})}|\alpha_2(\boldsymbol{\theta})|r^{\partial P_2} \\ &= \frac{1}{2}\alpha_1 r^{\partial P_1} + \frac{1}{2}\alpha_1 r^{\partial P_1} - \sup_{\boldsymbol{\theta}\in D_1(\boldsymbol{\theta})}|\alpha_2(\boldsymbol{\theta})|r^{\partial P_2} \\ &\geqslant \frac{1}{2}\alpha_1 r^{\partial P_1} \geqslant \frac{1}{2}\alpha_1 r^{\partial P_2}. \end{aligned}$$

因此,在$(D(\theta),r_1)$上有 $P(\boldsymbol{x})\geqslant\min(\frac{1}{2}\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2)\|\boldsymbol{x}\|^{2P_2}=\alpha\|\boldsymbol{x}\|^k$, 其中 $\alpha=\min(\frac{1}{2}\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2)$. 证毕.

对于 $P(\boldsymbol{x})$由多组齐次项构成的情形,本命题的证明可仿照上述过程.

定理 1. 多元函数 $G(\boldsymbol{x})$在闭扇区$(D(\theta),r_0)$上满足弱化的有限截取条件,$G(\boldsymbol{x})$在某个$(D(\theta),r_1)\subset(D(\theta),r_0)$上正定的充分必要条件是$\exists$ $N>0$,其部分和 $G_N(\boldsymbol{x})$在某个$(D(\theta),r_2)\subset(D(\theta),r_0)$上正定.

证明.

充分性. $G_N(\boldsymbol{x})$在$(D(\theta),r_2)$上正定,由引理 2 知存在 $\alpha_N>0,r'>0$,在$(D(\theta),r)$上,$G_N(\boldsymbol{x})\geqslant\alpha_N\|\boldsymbol{x}\|^N$. 由 Taylor 级数的收敛性可知$\exists$ $M>0$,在$(D(\theta),r_0')$上,$G(\boldsymbol{x})\geqslant G_N(\boldsymbol{x})-M\|\boldsymbol{x}\|^{N+1}$. 令 $r_2=\min(\frac{\alpha_N}{2M},r_0)$,则于$(D(\theta),r_2)$上有 $G(\boldsymbol{x})\geqslant\alpha_N\|\boldsymbol{x}\|^N-M\|\boldsymbol{x}\|^{N+1}\geqslant\frac{1}{2}\alpha_N\|\boldsymbol{x}\|^N$ 正定.

必要性. 由于 $G(\boldsymbol{x})$正定,从而$\exists$ $r_i'>0$,使部分和 $G_i(\boldsymbol{x})$在$(D(\theta),r'_i)$上半正定. 令

$$D_i(\theta)=\{\theta|a_j(\theta)=0,\theta\in D(\theta),j=1,2,\cdots,i\},$$

由于 $G(\boldsymbol{x})$正定,从而有$\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}D_i(\theta)=\varnothing$. 否则有 $\theta_0\in D(\theta),a_i(\theta_0)=0,i=1,2,\cdots$,亦即 $G_i(\theta_0)=0,i=1,2,\cdots$,这与 $G(\boldsymbol{x})$的正定性矛盾. 由于 $D_i(\theta)$均为闭集,从而$\exists$ N,$\bigcap\limits_{i=0}^{N}D_i(\theta)=\varnothing$. 取 $r_2=r'_N$,则在$(D(\theta),r_2)$上 $G_N(\boldsymbol{x})$正定. 证毕.

3 关于稳定性的讨论

上述结果可用于非线性定常系统及其定常 Lyapunov 函数的多项式等价类的研究. 对于渐近稳定的非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x})$解析,若存在一个定常的 Lyapunov 函数,则显然可取$D(\theta)=\{\theta|\theta\in R^n,\cos^2\theta_1+\cdots+\cos^2\theta_n=1\}$. 并由定理 1 不难证明,判稳时 $f(\boldsymbol{x})$可以被截成一个多项式,并使系统的渐近稳定性等价于一个多项式系统$(\dot{\boldsymbol{x}})=P(\boldsymbol{x})$的渐近稳定性,其中 $P(\boldsymbol{x})$为 $f(\boldsymbol{x})$的展式的前若干项和,而且它的 Lyapunov 函数也是一个多项式. 这一结果为利用待定系数法构造 Lyapunov 函数提供了新思路和保证,只是在多于三项时需要验证有限截取条件. 这是一个较弱的条件,它的必要性证明及验证算法值得进一步研究.

对于不稳定的非线性系统 $\dot{x}=f(\boldsymbol{x})$,若存在一个定常的 Lyapunov 函数 $v(\boldsymbol{x})$,且$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}>0$,$v(\boldsymbol{x})$在原点任一邻域有正值区,则类似地,也不难证明存在一个与之等价的多项式系统具有上述等价性质.

由于 $D(\theta)$只要求是一个原点闭扇区,从而本文定理也可以应用到利用扇区与推出集等更为精细的方法中来讨论系统的不稳定性.

参 考 文 献

[1] Fu Jyunhong, Eyad H A. Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases, *IEEE Trans. Au-*

tom. Control, 1993, **38**: 1—16.

[2] Li Chunwen, Miao Yuan, Miao Qinghai. A method to judge the statbility of dynamical system. In: Proceeding of YAC'95 IFAC, Beijing, 1995.

[3] 苗原,李春文. 由李亚普诺夫函数导数的 Taylor 级数的部分和判定级数本身的定号性. 见:中国控制会议文集,黄山,1995.

[4] Miao Yuan, Li Chunwen, Zhang Ping. Positive definiteness of the class of analytic functions. *Journal of Tsinghua Science and Technology*, 1997, **2**(3): 657—660.

STABILITY EQUALITY BETWEEN NONLINEAR TIME INVARIANT SYSTEM AND ITS TIME INVARIANT LYAPUNOV FUNCTION WITH POLYNOMIALS

MIAO YUAN　　LI CHUNWEN　　DU JIHONG

(*Dept. of Automation, Tsinghua Univ., Beijing* 100084)

Key words　Stability, nonlinear polynomial systems, Lyapunov functions.

1996 年为本刊审稿者名单

丁晓青	马颂德	马保离	马晓军	马永沂	于景元	于年才	王顺晃	王　炎
王晓东	王克宏	王诗宓	王　珏	王朝珠	王恩平	王照林	王永良	王离九
王永德	王　龙	王　联	王书宁	王正志	王慕秋	王炎生	王广雄	王浣尘
王厦生	王　炎	王秀峰	王先来	毛绪瑾	毛剑琴	文传源	方崇智	方棣堂
方华京	邓自立	邓志东	邓飞其	邓述慧	井元伟	史忠科	史　维	史定华
叶正明	叶庆凯	叶银忠	古钟璧	卢桂章	卢　强	卢立磊	边肇祺	冯德兴
冯昭枢	冯纯伯	冯才刚	田玉平	司徒荣	孙增圻	孙优贤	孙福恩	孙明轩
孙凤媛	孙富春	孙　西	孙继涛	孙振东	安森健	许可康	伍清河	石青云
刘永清	刘晓平	刘少民	刘宗富	刘中仁	刘廷荣	刘延柱	刘　克	刘　斌
刘康生	刘自宽	朱宗林	朱雪龙	朱德懋	朱文宏	吉英存	吕维雪	曲晓飞
任学梅	李介谷	李清泉	李春文	李友善	李彦平	李光泉	李东海	李训经
李志武	李人厚	李国杰	李　伟	李　勇	李瑞胜	李泉林	李俊源	李华德
李洪谊	李伯虎	李少远	陈振宇	陈伯时	陈宗基	陈德成	陈浩勋	陈彭年
陈伟海	陈　侃	陈增强	陈文德	陈由迪	陈树中	陈秋双	陈发森	陈善本
陈新海	陈冬青	陈福祥	陈万义	陈玉宇	杨自厚	杨成梧	杨　盛	杨叔子
杨保民	汪自勤	汪云九	吴智铭	吴启迪	吴立德	吴　麒	吴宏鑫	吴沧浦
吴旭光	吴　雅	邵　诚	邹　云	忻　欣	余达太	陆维明	陆惠民	何善堉
萧德云	宋文忠	严加安	沈小笛	张洪钺	张　钹	张纪峰	张承福	张友民
张嗣瀛	张　铃	张洪才	张乃尧	张　颖	张良杰	张化光	张恭清	张再兴
张天平	张戎军	张学工	张立明	张　霖	张　中	张作生	金以慧	周　军
周　晶	周其节	周生柄	郑大钟	郑应平	郑　锋	郑毓蕃	郑君立	郑方青

(下转第 X 页)