

短文

# 非线性系统预测控制的多模型方法<sup>1)</sup>

席裕庚 王凡

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

## 摘 要

本文在非线性系统的线性化多模型基础上,引入多模型参考轨迹逼近期望轨迹,提出了一种非线性系统预测控制的多模型方法。仿真结果表明,这种方法是有效的。

**关键词:** 预测控制,非线性系统,多模型。

## 1 引言

非线性系统的预测控制,无论在理论上或技术上都还存在不少问题。由于实际工业过程中存在着许多强非线性系统,因此,研究非线性系统的预测控制越来越重要<sup>[1]</sup>。

非线性预测控制的核心是在线求解有约束的非线性优化问题。虽然现有的非线性规划方法已提供了解决这一问题的技术途径,但因计算量大、求解速度慢,难于实时应用,因而人们一直在探索新的方法。孙浩提出先将非线性对象反馈线性化,再应用线性预测控制的方法<sup>2)</sup>;杨健则采用大系统分解-协调的思想,降低非线性规划问题的规模,<sup>3),[2]</sup>以利于在线求解。当然也可以简单地将非线性系统在某个平衡点附近展开,对线性化模型应用预测控制。其优点是可以充分利用线性预测控制的简易性及其在参数整定等方面已有的结论。但是,在一个平衡点附近展开得到的线性化模型并不能反映非线性系统在大范围内的动、静态特性,有时控制品质、甚至稳定性都很难得到保证。

多模型方法是一种处理非线性系统较常用的方法,其特点是用多个线性模型来逼近非线性过程,这种方法已在许多非线性控制过程中获得应用<sup>[3-5]</sup>。本文将预测控制与多模型方法相结合,提出一种非线性系统的线性化多模型表示,并在综合考虑控制期望轨迹和过程非线性特性的基础上,为各线性化子模型给出了多模型参考轨迹,从而得到一种非线性多模型预测控制方法,仿真结果验证了这种控制算法对于非线性过程的有效性。

1) 国家自然科学基金资助。

2) 孙浩 一类非线性系统预测控制的分层策略。上海交通大学博士论文,1990。

3) 杨健 非线性系统预测控制优化方法和策略的研究。上海交通大学博士论文,1993。

本文于1994年10月18日收到

## 2 非线性系统的线性化多模型表示

考虑非线性系统  $\Sigma$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ y(k+1) = g(x(k), u(k)). \end{cases}$$

对于选定的输出状态  $y = y_0$ , 假定方程

$$\begin{cases} x = f(x, u), \\ y = g(x, u) = y_0, \end{cases}$$

有解, 则解此方程可得到系统的一个平衡点  $(x_0, y_0, u_0)$ .

若系统的输出空间为  $Y$ , 则可在  $Y$  中选取  $N$  个输出  $y_0 \leq \dots \leq y_{N-1}$ , 并得到相应的平衡点  $(x_i, u_i, y_i), i = 0 \dots N-1$ . 在各平衡点附近将系统线性化展开, 可得到原非线性系统的  $N$  个线性化模型, 其中  $\Sigma_i$

$$x(k+1) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, u_i)} x(k) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_i, u_i)} u(k) - d_x,$$

$$y(k) = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_i, u_i)} x(k) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_i, u_i)} u(k) - d_y,$$

$$d_x = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, u_i)} x_i + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_i, u_i)} u_i - x_i,$$

$$d_y = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x_i, u_i)} x_i + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(x_i, u_i)} u_i - y_i.$$

这  $N$  个线性化模型就构成了原系统的线性化多模型表示.

由线性化模型的局部性可知, 在平衡点  $(x_i, u_i, y_i)$  附近, 非线性系统可近似用  $\Sigma_i$  表示, 当  $y_{i-1} \leq y \leq y_i$  时, 非线性系统既可用  $\Sigma_i$  近似表示, 也可用  $\Sigma_{i-1}$  近似表示.  $\Sigma_i$  适用的局部范围是在  $y_i \pm \alpha$  处.

## 3 非线性预测控制的多模型参考轨迹

动态过程中的输入、输出不是系统的平衡点, 据此对非线性系统不断线性化是不对的. 如何用多个线性化模型在不同动态范围内逼近非线性过程, 同时又保证这些线性化模型围绕系统平衡点展开, 是建立非线性系统线性化多模型表示的关键.

针对预测控制中输出跟随设定值或参考轨迹的要求, 本文提出一种对设定值或参考轨迹分段趋近的多模型方法. 其基本原理描述如下: 把对系统输出的要求划分为  $N$  段, 即系统输出值按起始值到稳态值取  $N$  个中间值  $y_0 \leq \dots \leq y_{N-1}$ . 对于每一个  $y_i$ , 按线性化方法计算出相应平衡点的  $x_i, u_i$ , 以此对非线性系统线性化, 得到  $N$  个线性化模型  $\Sigma_i$ , 并将下一个平衡点  $y_{i+1}$  作为设定值或设置相应的多模型参考轨迹  $\Gamma_i$ , 如图 1 所示.

上述线性化方法得到的线性模型是围绕系统平衡点展开的, 因而是其准确的线性化模型. 然而, 利用这样的线性化模型和参考轨迹意味着把系统输出首先从  $y_0$  控制到  $y_1$ ,

待其到达稳态后,再将其控制到  $y_2, \dots$ 。显然,如果按此法进行控制,则由于多模型参考轨迹  $\Gamma_i$  与期望参考轨迹  $\Gamma$  之间有较大差距,系统的动态不可能按原来的期望轨迹快速地控制到设定值。为此,须对线性化模型的切换及参考轨迹的设置进行合理的安排。注意到线性化系统  $\Sigma_i$  的输出在起始阶段有较快的响应,可考虑在其未到达稳态  $y_{i+1}$  时,即将线性化模型切换到  $\Sigma_{i+1}$ ,并以  $y_{i+2}$  作为新的设定值或参考轨迹。这意味着线性化模型及参考轨迹的切换并不是在输出的稳态值,而是在到达稳态值之前。线性化模型适用的局部范围恰好是在稳态值附近,这样,采用上述的多模型参考轨迹,不但保证了线性化模型在局部范围内对非线性过程的近似有较高的精度,而且加速了控制的动态响应。这一修正后的多模型参考轨迹的原理见图 2。

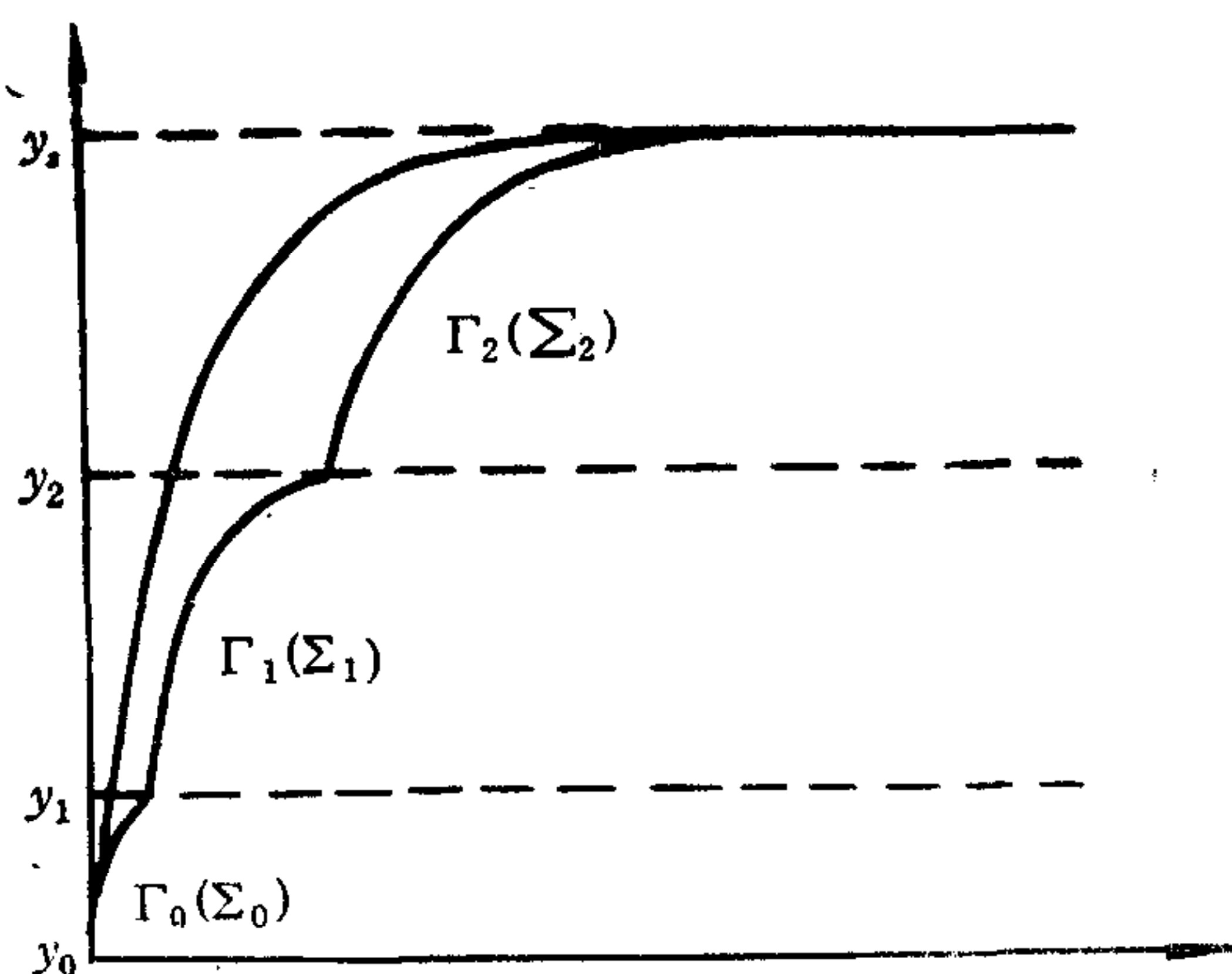


图 1 分段趋近的多模型控制方法

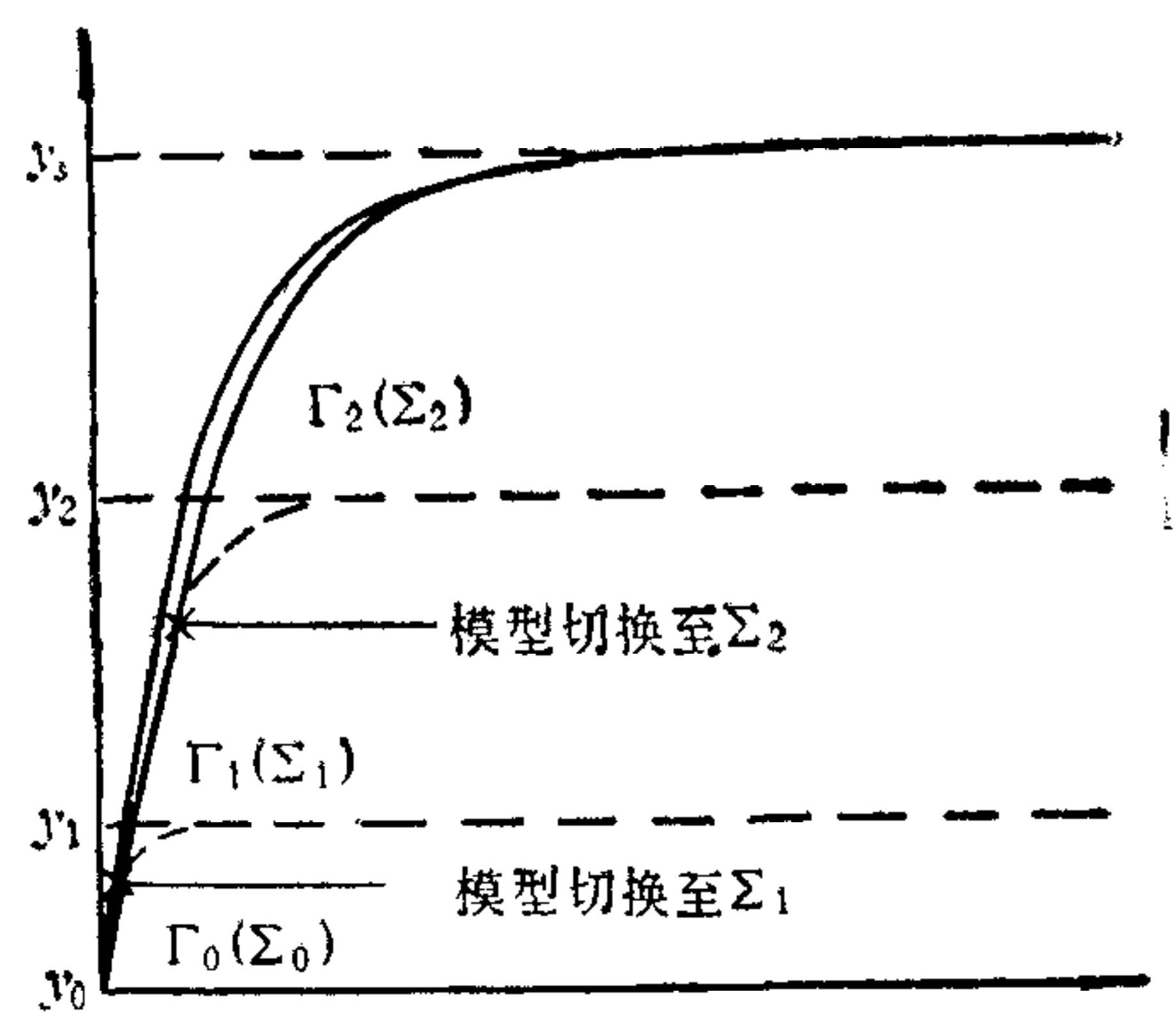


图 2 切换点合理安排后的分段趋近

由于控制的目的是要使输出跟踪期望的参考轨迹,这一参考轨迹通常具有形式

$$y_{\Gamma}(t) = y_0 + (y_s - y_0)[1 - e^{-\alpha(t-t_0)}],$$

而各局部子模型的参考轨迹具有形式

$$y_{\Gamma_i}(t) = y_{i-1,i} + (y_{i+1} - y_{i-1,i})[1 - e^{-\alpha_i(t-t_i)}], \quad i = 0, \dots, N-1,$$

其中

$$y_{\Gamma_{i-1}}(t_i) = y_{i-1,i}, \quad y_{-1,0} = y_0, \quad y_N = y_s.$$

因此,多模型参考轨迹的关键在于如何选择合适的切换时间  $t_i$  和参考轨迹常数  $\alpha_i$ ,使各子模型的参考轨迹  $\Gamma_i$  在全局尽可能逼近期望参考轨迹  $\Gamma$ 。这可归纳为一优化问题,文献 [7] 给出了在合理的假设下递推求解  $\alpha_i$  和  $t_i$  的公式。

## 4 多模型非线性预测控制

通过上述方法建立非线性过程的线性化多模型表示,并建立相应的多模型参考轨迹后,即可采用线性预测控制的方法,对各线性化子模型进行预测控制。在每次切换后,针对线性化模型  $\Sigma_i$ ,可得到阶跃响应系数  $a_i^j$ ,并建立从输出值到局部设定值  $y_{i+1}$  的多模型参考轨迹  $\Gamma_i$ 。这是一个规范的线性预测控制问题,可以描述为<sup>[6]</sup>

$$\tilde{y}_{p_M}^{(i)}(k) = \tilde{y}_{p_0}^{(i)}(k) + A^{(i)} \Delta u_M(k),$$

优化性能指标  $\min J^{(i)}(k) = \|y_{\Gamma_i}(k) - \tilde{y}_{P_0}^{(i)}(k)\|_D^2 + \|\Delta u_M(k)\|_R^2$ ,

控制量  $\Delta u_M(k) = [(A^{(i)})^T Q^{(i)} A^{(i)} + R^{(i)}]^{-1} (A^{(i)})^T Q^{(i)} [y_{\Gamma_i}(k) - \tilde{y}_{P_0}^{(i)}(k)]$ .

式中各符号含义可参见文献 [6]。整个控制结构如图 3 所示。

对于这一控制算法, 须作如下说明:

1) 在控制的最后一段, 即在未到达  $y_{N-1}$  以前将系统切换到线性化模型  $\Sigma_{N-1}$ , 并以  $y_N$  (即最终期望值  $y_s$ ) 为设定值确定多模型参考轨迹后, 不再作任何切换。

2) 平衡点  $y_i$  的数量和位置的选择取决于系统的非线性程度, 为了保证控制的快速性, 一般不宜采用过多的线性化模型。

3) 由于所得到的线性化模型是在平衡点处展开的, 它虽然只是在局部范围内对非线性过程的近似, 但模型切换的选择使其应用范围正好限定在平衡点周围的邻域, 因而它对于非线性过程具有较好的近似性。线性模型与非线性过程之间尚存的误差, 可通过预测控制以反馈校正加以克服, 从局部来看, 相当于将线性预测控制应用于弱非线性系统。

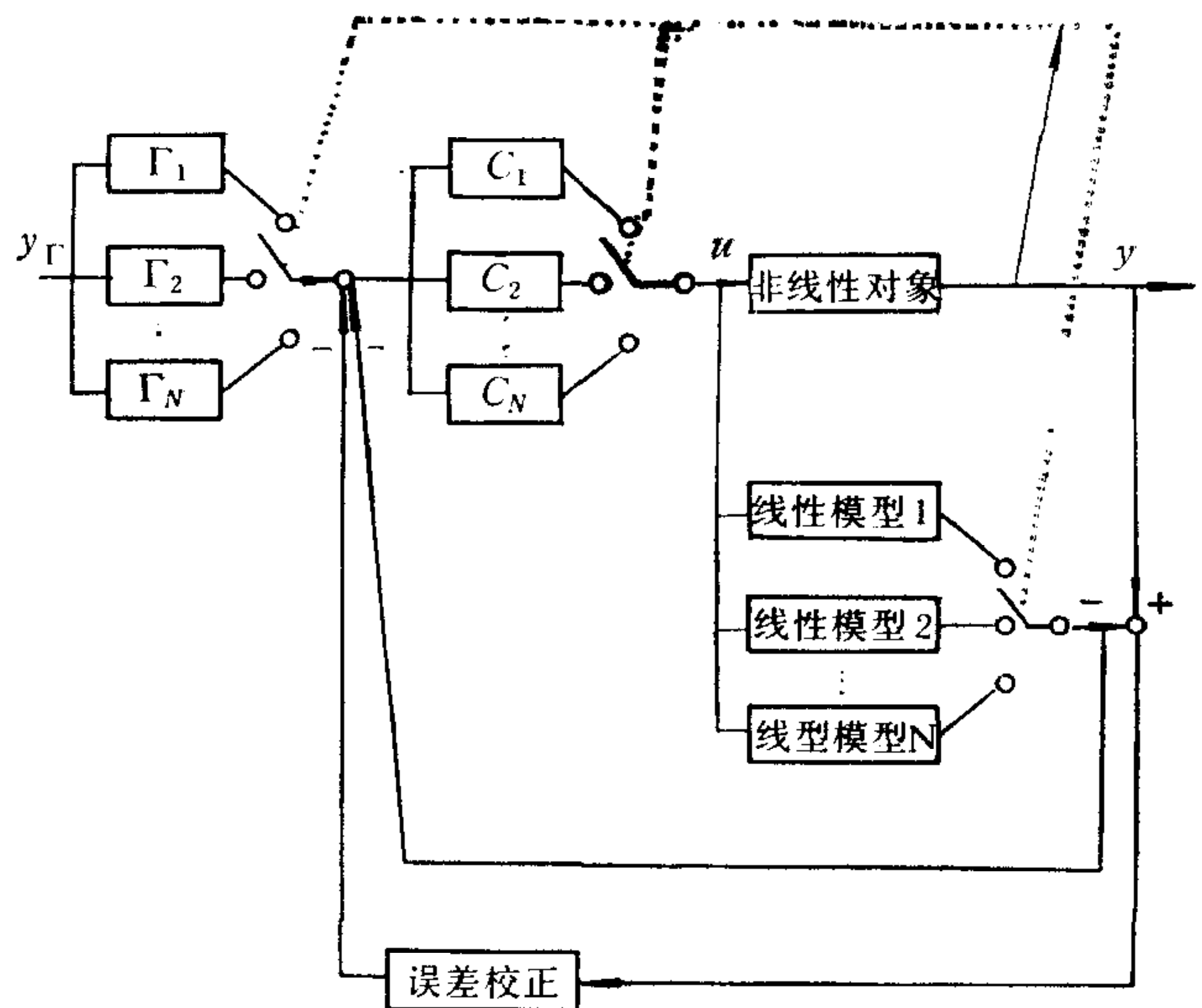


图 3 多模型预测控制的原理框图

## 5 仿真结果

设有非线性系统

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -0.25x_2(k), \\ x_2(k+1) &= x_1^2(k) + 1.3x_2(k) + u(k), \\ y(k) &= x_1(k), \end{aligned}$$

其期望控制结果为设定值  $y_s = 3.0$ , 系统初始状态为  $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, u(0) = 0$ 。

在系统可能的输出空间中, 选取  $y_0 = 0, y_1 = 1, y_2 = 2$ 。根据这 3 个输出状态, 可得 3 个平衡点。围绕这 3 个平衡点可以得到 3 个线性化模型:

模型  $\Sigma_0$   $x_1(k+1) = -0.25x_2(k), x_2(k+1) = 1.3x_2(k) + u(k), y(k) = x_1(k)$ ;

模型  $\Sigma_1$   $x_1(k+1) = -0.25x_2(k), x_2(k+1) = 2x_1(k) + 1.3x_2(k) + u(k) - 1, y(k) = x_1(k)$ ;

模型  $\Sigma_2$   $x_1(k+1) = -0.25x_2(k), x_2(k+1) = 4x_1(k) + 1.3x_2(k) + u(k) - 4, y(k) = x_1(k)$ 。

这 3 个线性化模型构成了非线性系统的线性化多模型表示。

如果我们在单个线性化模型的基础上采用预测控制, 所得到的控制结果难以令人满意, 见图 4 中曲线 1, 2, 3; 而采用本文提出的多模型方法, 选取模型切换点  $y_{0,1} = 0.5$ ,  $y_{1,2} = 1.5$ , 可以得到图中曲线 4 所示的结果, 显然优于基于单个线性模型的控制效果。这说明本方法用于非线性系统是有效的。

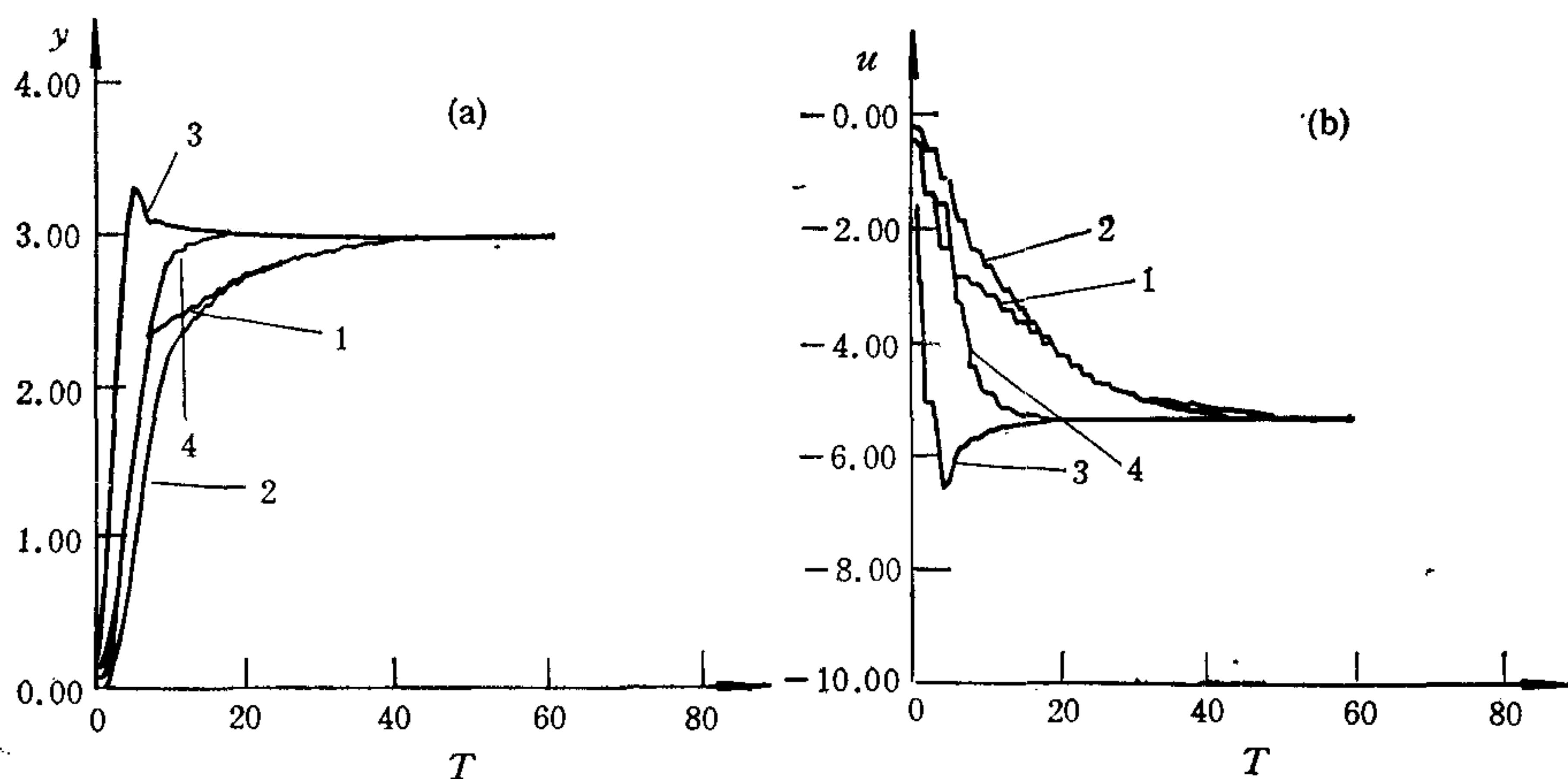


图 4 仿真结果 (a)控制输出 (b)操作变量

## 6 结论

本文通过在多个平衡点附近建立线性子模型, 形成非线性系统的线性化多模型表示, 同时将非线性系统设定值或期望轨迹进行分解而得到了适合于非线性系统线性化多模型表示的多模型参考轨迹, 从而简化了非线性优化问题, 大大降低了计算难度, 仿真结果验证了这种非线性系统多模型预测控制方法的有效性。

## 参 考 文 献

- [1] Garcia C E, Prett D M, Morari M. Model predictive control: theory and practice—a survey. *Automatica*, 1989, **25**(3): 335—338.
- [2] 杨 健, 席裕庚, 张钟俊. 预测控制滚动优化的时间分解方法. *自动化学报*, 1995, **21**(6): 555—561.
- [3] Binder Z. Multi-model techniques in the simulation and control of nonlinear systems. *Proc. Int. Conf. IASTED*, Montreal, 1978.
- [4] Badr A, Binder Z, Rey D. Application of tracking multi-model control to a nonlinear thermal process. *Int. J. System Science*, 1990, **21**(9): 1795—1803.
- [5] He W G, Kaufman H, Roy R. Multiple model adaptive control procedure for blood pressure control. *IEEE Trans.*, 1986, **BME-34**(8): 567—574.
- [6] 席裕庚. 预测控制. 北京: 国防工业出版社, 1993.
- [7] Xi Y, Wang F. Nonlinear multi-model predictive control. 13th IFAC World Conference, San Francisco, 1996.

# NONLINEAR MULTI-MODEL PREDICTIVE CONTROL

XI YUGENG      WANG FAN

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030)

## ABSTRACT

Based on multi-linear-model representation of nonlinear systems, multimodel reference trajectories are introduced to approximate desired trajectory. A multi-model predictive control scheme is proposed for nonlinear systems. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by simulation results.

**Key words:** Predictive control, nonlinear system, multi-model

## 部分国际会议信息

Title	1997	Place	Deadline	Further Information
IFAC Workshop Manufacturing Systems Modelling Management and Control	Feb. 3-5	Vienna Austria	31 Aug. 1996	Prof. Peter Kopacek Technical University of Vienna Floragasse 7a A-1040 Vienna, Austria FAX + 43/1/504 18359 e-mail:kopacek @ ihrtl. ihrt. tuwien. ac. at
IFAC/IEEE Symposium Computer-Aided Control Systems Design-CACSD 97	April 28-30	Ghent Belgium	1 Oct. 1996	Prof. Luc Boullart University of Ghent, Campus Ardoyen Technologiepark-Zwijnaarde, 9 B-9052 Zwijnaarde, Belgium FAX + 32/9/264 5839 e-mail:boullart @ autoctrl. rug. ac. be
1997 American Control Conference (in cooperation with IFAC)	June 4-6	Albuquerque, NM USA	15 Sept. 1996	Prof. A. Haddad AACC Secretariat, Dept. of EECS Northwestern University 2145 Sheridan Road Evanston, IL 60208-3118, USA FAX + 1/708/491 - 4455 e-mail:ahaddad @ eeecs. new. edu
IFAC Symposium (3rd) Intelligent Components and Instruments for Control Applications-SICICA' 97	June 9-11	Annecy France	1 Sept. 1996	Prof. Laurent Foulloy LAMII/CESALP, BP806 F-74016 Annecy, France FAX + 33/50 66 60 63 e-mail:foulloy @ univ-savoie. fr