

## DOG 小波变换像空间的描述

韩红<sup>1,2</sup>, 邓彩霞<sup>1</sup>, 邓中兴<sup>1</sup>

(1. 哈尔滨理工大学应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 佳木斯大学数学系, 黑龙江 佳木斯 154007)  
(E-mail: hanhong2006@163.com)

**摘要:** 本文给出了 DOG 小波变换像空间的再生核函数的具体表达式及等距恒等式, 并利用再生核函数的结构对 DOG 小波变换的像空间作出了具体的描述, 使得对其像空间的形成有了更直观和更深刻的认识. 这既为一般小波变换像空间的描述奠定了基础, 又为该小波变换的实际运用提供理论依据.

**关键词:** 小波变换; 再生核; 再生核 Hilbert 空间.

**MSC(2000):** 65T60

**中图分类号:** O174.22

### 1 引言

小波分析是二十世纪九十年代以来国际上一个非常热门的前沿领域. 它既具有丰富的数学理论意义, 又具有广泛的工程应用价值, 研究成果层出不穷<sup>[1]</sup>. 它是 Fourier 分析理论发表 170 多年来对其最辉煌的继承和发展, 给许多领域的研究带来了崭新的思想, 为工程应用提供了一种新的更有效的分析工具. 因此对小波理论的深入研究具有重要的意义. 小波分析中最重要的是如何选择最佳基小波, 而再生核函数是确定小波基函数性质的有力工具<sup>[2]</sup>. 由于连续小波变换的像空间是再生核 Hilbert 空间, 可以说再生核 Hilbert 空间是连续小波变换的基础<sup>[3]</sup>. 因此对连续小波变换像空间进一步研究是十分必要的. 鉴于再生核空间的元素都能由该空间的再生核表示<sup>[4]</sup>. 为此, 本文将利用再生核理论考察典型的 DOG 小波, 对 DOG 小波变换的像空间作具体的描述. 这既为一般小波变换像空间的描述奠定了基础, 又为该小波变换的实际运用提供理论依据.

### 2 DOG 小波变换

DOG (Difference of Gaussian) 小波<sup>[5]</sup> 是两个尺度差一倍的高斯函数之差, 其波形如图所示, 它的时域公式如下

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{8}}.$$

从而, 它的频域公式为

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-i\omega t} dt = e^{-\frac{\omega^2}{2}} - e^{-2\omega^2},$$

收稿日期: 2005-10-21; 接受日期: 2006-07-03

基金项目: 国家自然科学基金 (10571037); 黑龙江省高校骨干教师创新项目 (1054G010); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (11521292); 佳木斯大学科研项目 (L2007-73).

并且

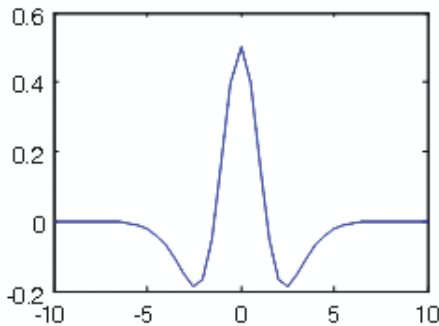
$$\|\hat{\psi}(\omega)\|_2 = \frac{\sqrt{15-4\sqrt{10}}}{\sqrt{10}}\pi^{\frac{1}{4}},$$

$\psi(t)$  满足

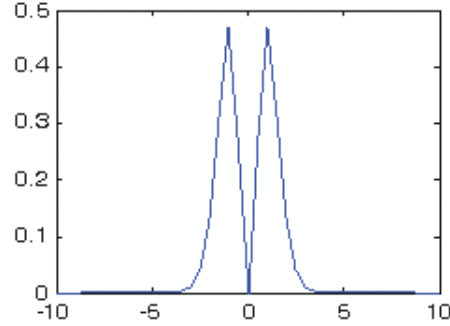
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0,$$

且

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$



(a) 时域波形



(b) 频域波形

**定义** DOG 小波为

$$\psi^{a,x}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t-x}{a}\right), \quad a, x \in R, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

且 DOG 小波变换为

$$(T^{wav} f)(a, x) = \langle f, \psi^{a,x} \rangle = \int_R f(t) |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{a}\right) dt, \quad f \in L^2(R), \quad (2)$$

则有  $|(T^{wav} f)(a, x)| \leq \frac{\sqrt{15-4\sqrt{10}}}{\sqrt{10}}\pi^{\frac{1}{4}}\|f\|$ , 其中  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ .

**引理 1**<sup>[3]</sup> 对  $\forall f, g \in L^2(R)$ , 有

$$\iint_{R^2} (T^{wav} f)(a, x) \overline{(T^{wav} g)(a, x)} \frac{dadx}{a^2} = 2\pi C_\psi \langle f, g \rangle.$$

由引理 1 可得

$$\iint_{R^+ \times R} (T^{wav} f)(a, x) \overline{(T^{wav} g)(a, x)} \frac{dadx}{a^2} = \pi C_\psi \langle f, g \rangle. \quad (3)$$

(3) 式说明 (2) 式的像空间是  $L^2(R^+ \times R; \frac{1}{\pi C_\psi} a^{-2} dadx)$  的一个闭子空间.

下面, 将要确定这一像空间.

由  $a$  的对称性, 仅需考虑  $a > 0$  时的小波变换 (2) 式, 其复数形式为

$$(T^{wav} f)(A, z) = \langle f, \psi^{A,z} \rangle = \int_R f(t) \overline{|A|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-z}{A}\right)} dt, \quad f \in L^2(R) \quad (4)$$

其中, 复数  $A = a + bi$ ,  $z = x + yi$ . 下面计算小波变换 (4) 式的像空间的再生核

$$\begin{aligned} K(A, z; \overline{A'}, \overline{z'}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-z}{A}\right) \overline{A'}^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi\left(\frac{t-z'}{A'}\right)} dt \\ &= A^{\frac{1}{2}} \overline{A'}^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{(A^2 + \overline{A'}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{2(A^2 + \overline{A'}^2)}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(A^2 + \overline{A'}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{8(A^2 + \overline{A'}^2)}\right\} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{2\pi}}{(A^2 + 4\overline{A'}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{2(A^2 + 4\overline{A'}^2)}\right\} - \frac{\sqrt{2\pi}}{(4A^2 + \overline{A'}^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{2(4A^2 + \overline{A'}^2)}\right\} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $A, A' \in \Delta = \{A | \operatorname{Re} A > 0\}$ ,  $z, z' \in C$ .

(5) 式表明  $K(A, z; \overline{A'}, \overline{z'})$  作为  $(A, z)$  的函数在  $\Delta \times C$  上是解析的, 并且作为  $(A', z')$  的函数在  $\Delta \times C$  上是反解析的. 因此,  $L^2(R)$  中的小波变换 (2) 式的像  $(T^{wav} f)(a, x)$  可以解析延拓到空间  $\Delta \times C$  上, 形式为  $(T^{wav} f)(A, z)$ , 像  $(T^{wav} f)(A, z)$  是具有再生核 (5) 式的 Hilbert 空间  $H_K$  中的元素. 又因为  $\{A^{-\frac{1}{2}} \psi(\frac{t-z}{A}); A \in \Delta, z \in C\}$  在  $L^2(R)$  中是完备的, 则有等距恒等式

$$\|(T^{wav} f)(A, z)\|_{H_K}^2 = \frac{15 - 4\sqrt{10}}{10} \sqrt{\pi} \|f\|^2. \quad (6)$$

再由 (3) 和 (6) 式可得

$$\|(T^{wav} f)(A, z)\|_{H_K}^2 = \frac{15 - 4\sqrt{10}}{10\sqrt{\pi}C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |(T^{wav})(a, x)|^2 \frac{dadx}{a^2}. \quad (7)$$

(7) 式说明小波变换 (2) 式的像  $(T^{wav} f)(a, x)$  被解析延拓到  $\Delta \times C$  上后  $(T^{wav} f)(A, z)$  的范数仍可由  $(T^{wav} f)(a, x)$  来表示, 所以 (7) 式是很有意义的.

### 3 作为 $z$ 空间函数的特征

对于任意固定的尺度因子  $A$ , 考查小波变换 (4) 式. 在 (5) 式中, 令  $A = A'$  且  $A \in R$ , 则得到相应的再生核是

$$\begin{aligned} K(A, z; \overline{A'}, \overline{z'}) &= K_A(z, \overline{z'}) \\ &= \sqrt{\pi} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{4A^2}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{16A^2}\right\} - \frac{2\sqrt{10\pi}}{5} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{10A^2}\right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

这表明, 对任意固定的  $A \in R$ , 小波变换 (4) 式的像  $(T^{wav} f)(A, z) = (T^{wav} f)_A(z)$  是作为再生核 Hilbert 空间  $H_{K_A}$  中的元素进行描述的,  $H_{K_A}$  是由再生核 (8) 式所确定的全部函数组成的.

令

$$\begin{aligned} K_1 &= K_1(z, \overline{z'}; A) = \sqrt{\pi} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{4A^2}\right\}; \\ K_2 &= K_2(z, \overline{z'}; A) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{16A^2}\right\}; \\ K_3 &= K_3(z, \overline{z'}; A) = \frac{2\sqrt{10\pi}}{5} \exp\left\{-\frac{(z - \overline{z'})^2}{10A^2}\right\} \end{aligned}$$

则  $K_1, K_2, K_3$  分别是再生核 Hilbert 空间  $H_{K_1}, H_{K_2}, H_{K_3}$  的再生核, 这三个空间又被称作 Fock 空间<sup>[6]</sup>.  $H_{K_1}, H_{K_2}, H_{K_3}$  分别由具有下列有限范数 (9)–(11) 的全体整函数  $f(z)$  构成.

$$\left\{ \frac{1}{2A^2\pi^{3/2}} \iint_c |f(z)|^2 \exp\left[-\frac{y^2}{A^2}\right] dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{1}{4A^2\pi^{3/2}} \iint_c |f(z)|^2 \exp\left[-\frac{y^2}{4A^2}\right] dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad (10)$$

$$\left\{ \frac{1}{2\sqrt{10}A^2\pi^{3/2}} \iint_c |f(z)|^2 \exp\left[-\frac{2y^2}{5A^2}\right] dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty. \quad (11)$$

**引理 2**<sup>[4]</sup> 设  $K_1$  与  $K_2$  分别是 Hilbert 空间  $H_1, H_2$  的再生核, 那么  $K_1 + K_2$  是所有形如  $f = f_1 + f_2$  ( $f_1 \in H_1, f_2 \in H_2$ ) 的函数所形成的 Hilbert 函数空间  $H$  的再生核, 其范数由下式定义

$$\|f\|^2 = \min \{ \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \},$$

其中极小值是针对一切分解  $f = f_1 + f_2$  ( $f_1 \in H_1, f_2 \in H_2$ ) 而取的.

若令

$$\begin{aligned} K_{1,2} &= K_1 + K_2 = K_1(z, \bar{z}'; A) + K_2(z, \bar{z}'; A) \\ &= \sqrt{\pi} \exp\left\{-\frac{(z - \bar{z}')^2}{4A^2}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left\{-\frac{(z - \bar{z}')^2}{16A^2}\right\}, \end{aligned}$$

则由引理 2 可得

**定理 1**  $K_{1,2}$  是再生核 Hilbert 空间  $H_{K_{1,2}}$  的再生核, 其中  $H_{K_{1,2}}$  是由所有形如  $f = f_1 + f_2$  ( $f_1 \in H_{K_1}, f_2 \in H_{K_2}$ ) 的函数所形成的 Hilbert 函数空间, 其范数定义为

$$\|f\|^2 = \min \{ \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \},$$

其中极小值是针对一切分解  $f = f_1 + f_2$  ( $f_1 \in H_{K_1}, f_2 \in H_{K_2}$ ) 而取的.

由再生核的正定性知,  $K(A, z; \bar{A}', \bar{z}')$  是正定的. 又显然有

$$K(A, z; \bar{A}', \bar{z}') = K_A(z, \bar{z}') = K_{1,2} - K_3$$

因此,  $K_{1,2} - K_3$  是正定的, 即  $K_3 \ll K_{1,2}$ . 从而有  $H_{K_3} \subset H_{K_{1,2}}$ .

**引理 3**<sup>[4]</sup> 设  $K$  是具有范数  $\|\cdot\|$  的族  $F$  的再生核,  $K_1$  是族  $F_1$  的再生核, 且  $F_1 \subset F$ , 则与核  $K - K_1$  相对应的族  $F_2$  和范数  $\|\cdot\|_2$  是如下定义的: 等式  $Lf = \langle f, K_1 \rangle$  在  $F$  上定义了一个界不超过 1 的正算子, 它将  $F$  变到  $F_1$ , 取任一平方根  $L' = (I - L)^{\frac{1}{2}}$  ( $I$  是恒等算子), 对  $f \in F$ ,  $F_2$  是所有变换  $L'f$  形成的族, 且  $F_2 \subset F$ . 设  $F_0 = \{f | L'f = 0, f \in F\}$ , 并令  $F' = F \setminus F_0$  (即  $F'$  为  $F_0$  在  $F$  中的余集), 则  $L'$  建立了  $F'$  与  $F_2$  之间的一一对应关系, 而对于  $f_2 = L'f'$  ( $f' \in F', f_2 \in F_2$ ), 范数  $\|f_2\|_2$  由下式给出:  $\|f_2\|_2 = \|f'\|$ .

由引理 3, 设  $Lf = \langle f, K_3 \rangle$ ,  $f \in H_{K_{1,2}}$ , 则  $L$  是  $H_{K_{1,2}}$  上一个界不超过 1 的正算子, 它将  $H_{K_{1,2}}$  变到  $H_{K_3}$ , 取  $L' = (I - L)^{\frac{1}{2}}$ , 则得到  $A$  固定时, DOG 小波变换式 (4) 式的像空间具体描述为

**定理 2** 对任意固定的  $A \in R$ , 小波变换 (4) 式的像  $(T^{wav} f)_A(z)$  是作为再生核 Hilbert 空间  $H_{K_A}$  中的元素进行描述的, 其中  $H_{K_A} = \{L'f | f \in H_{K_{1,2}}\}$ , 且  $H_{K_A} \subset H_{K_{1,2}}$ , 并有

$$\|T^{wav} f\|_{H_{K_A}} = \|f'\|_{H_{K_{1,2}}},$$

其中  $T^{wav} f = L'f'$ ,  $f' \in H'_{K_{1,2}} = \{f | L'f \neq 0, f \in H_{K_{1,2}}\}$ .

定理 2 表明了 DOG 小波变换的像作为平移因子空间中的函数的性质, 为研究 DOG 小波变换的像提供了理论基础.

### 参考文献:

- [1] 成礼智, 王红霞, 罗永. 小波的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.  
CHENG Li-zhi, WANG Hong-xia, LUO Yong. *The Theory and Application of Wavelet* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [2] 李建平, 唐远炎. 小波分析方法的应用 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1999.  
LI Jian-ping, TANG Yuan-yan. *The Application of Method of Wavelet Analysis* [M]. Chongqing: Chongqing University Publishing, 1999. (in Chinese)
- [3] DAUBECHIES I. *Ten Lectures on Wavelet* [M]. Capital City Press, 1992.
- [4] ARONSZAJ N. *Theory of reproducing kernels* [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1950, **68**: 337-404.
- [5] 彭玉华. 小波变换与工程应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.  
PENG Yu-hua. *Wavelet Transform and Engineering Application* [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [6] BARGMANN V. *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part II. A family of related function spaces. Application to distribution theory* [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1967, **20**: 1-101.

## Characterization of Image Space of DOG Wavelet Transform

HAN Hong<sup>1,2</sup>, DENG Cai-xia<sup>1</sup>, DENG Zhong-xing<sup>1</sup>

(1. Applied Science College, Harbin University Science Technology, Heilongjiang 150080, China;

2. Department of Mathematics, Jiamusi University, Heilongjiang 154007, China )

**Abstract:** In this paper, we introduce the reproducing kernel function and the isometrical identity of the image space of DOG wavelet transform. A concrete characterization of the image space of DOG wavelet transform is given by the construction of the reproducing kernel function. This offers a intuitionistic and profound understanding of the formation of image space. This provides the basis for discussing the image space of general wavelet transform and the theoretic basis for the practical application of DOG wavelet transform.

**Key words:** wavelet transform; reproducing kernel; reproducing kernel Hilbert space.