



# 非线性系统指数型降维观测器设计<sup>1)</sup>

朱芳来<sup>1,2</sup> 韩正之<sup>2</sup>

<sup>1)</sup>(桂林电子工业学院计算机系 桂林 541004)

<sup>2)</sup>(上海交通大学电信学院 上海 200030)

(E-mail: flzhu816@263.net)

**关键词** Lipschitz 非线性系统, 降维观测器, Lyapunov 函数, 指数收敛

**中图分类号** TP13

## THE EXPONENTIAL REDUCED-ORDER OBSERVERS FOR NONLINEAR SYSTEMS

ZHU Fang-Lai<sup>1,2</sup> HAN Zheng-Zhi<sup>2</sup>

<sup>1)</sup>(The Computer Department of Guilin Institute of Electronic Technology, Guilin 541004)

<sup>2)</sup>(The Information and Electronic College of Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

(E-mail: flzhu816@263.net)

**Key words** Nonlinear systems, reduced-order observer, Lyapunov function, exponential convergence

## 1 引言

控制系统的状态反馈对各种综合问题显示了其极大的优越性,但系统状态通常不可直接测量到,这就有必要引入状态观测器.对线性系统,著名的 Kalman 滤波器和 Luenberger 观测器设计方法为其提供了较为完善的答案.对非线性系统而言,观测器设计是一项具有复杂性的研究工作并引起了众多人的关注.通常来说,有这样几类非线性观测器设计方法:扩展 Kalman 滤波器<sup>[1]</sup>及扩展 Luenberger 观测器方法<sup>[2]</sup>,非线性坐标变换法<sup>[3~5]</sup>及类 Lyapunov 方法<sup>[6~10]</sup>.与线性系统一样,非线性系统按其结构可分为全维观测器和降维观测器.本文对 Lipschitz 非线性系统降维观测器设计方法进行了讨论.

## 2 指数型降维观测器设计

本文所考虑的 Lipschitz 非线性系统描述如下

1) 国家自然科学基金(69874025)资助

收稿日期 2001-06-22 收修改稿日期 2002-03-07

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(x) + Fg(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$ ,  $u \in R^q$  和  $y \in R^p$ ,  $A, B, C$  和  $F$  为适当维数的常量矩阵. 其中  $(A, C)$  可观测而  $(A, B)$  可控.  $f: R^n \rightarrow R^m$ ,  $g: R^n \times R^q \rightarrow R^r$  为分别具有 Lipschitz 常数  $\gamma_1, \gamma_2$  的 Lipschitz 非线性项, 即

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \gamma_1 \|x_1 - x_2\| \quad (2)$$

$$\|g(x_1, u) - g(x_2, u)\| \leq \gamma_2 \|x_1 - x_2\| \quad (3)$$

$\forall u \in \Omega$  成立, 而  $\Omega$  为系统(1)所有允许的输入所组成的集合.

**假设 1.** 对  $\alpha > 0$ , 存在矩阵  $K \in R^{n \times p}$  使得如下的代数 Riccati 不等式具有正定解  $P$

$$(A - KC)P + P(A - KC)^T + BB^T + FF^T + 2\alpha P + \gamma^2 P^2 \leq 0 \quad (4)$$

其中  $\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$ .

不失一般性, 不妨设  $C = (I_p \ 0)$ . 对矩阵  $A$  和代数 Riccati 不等式(4)的正定解进行如下的矩阵分块

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_3 \end{bmatrix}, \quad \Pi = P^{-1} = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 \\ \Pi_2^T & \Pi_3 \end{bmatrix}$$

其中  $P_1, A_{11}, \Pi_1 \in R^{p \times p}$ . 如下的定理给出了指数型降维观测器设计的方法.

**定理 1.** 设  $C = (I_p \ 0)$  且假设 1 成立, 则系统 (1) 具有如下形式的指数型  $(n-p)$  维降维观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{z}_1 = y \\ \dot{\hat{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12})\hat{z}_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L]y \\ \quad + (L \ I_{n-p}) \left[ Bf \left( \begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix} \right) + Fg \left( \begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix}, u \right) \right] \\ \hat{x}_2 = \hat{z}_2 - Ly \end{cases} \quad (5)$$

其中  $L = \Pi_3^{-1} \Pi_2^T$  为其增益矩阵.

**证明.** 进行坐标变换  $z = Tx$  其中  $T = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ L & I_{n-p} \end{bmatrix}$ , 则系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = (A_{22} + LA_{12})z_2 + [L(A_{11} - A_{12}L) + A_{21} - A_{22}L]y \\ \quad + (L \ I_{n-p}) \left[ Bf \left( \begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix} \right) + Fg \left( \begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix}, u \right) \right] \\ y = z_1 \end{cases} \quad (6)$$

式(6)的第一式减去式(5)的第二式得到误差动态方程

$$\dot{\tilde{z}}_2 = (A_{22} + LA_{12})\tilde{z}_2 + (L \ I_{n-p}) (B\tilde{f} + F\tilde{g}) \quad (7)$$

这里记  $\tilde{f} = f \left( \begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix} \right) - f \left( \begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix} \right)$ ,  $\tilde{g} = \left[ g \left( \begin{pmatrix} y \\ z_2 - Ly \end{pmatrix}, u \right) - g \left( \begin{pmatrix} y \\ \hat{z}_2 - Ly \end{pmatrix}, u \right) \right]$  和  $\tilde{z}_2 = z_2 - \hat{z}_2$ . 为证明误差动态方程(7)具有指数收敛的稳定平衡点, 选取 Lyapunov 函数

$$V(t, \tilde{z}_2) = \tilde{z}_2^T \Pi_3 \tilde{z}_2$$

该 Lyapunov 函数沿着误差方程(7)的微分为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \tilde{z}_2^T [(A_{22} + LA_{12})^T \Pi_3 + \Pi_3 (A_{22} + LA_{12})] \tilde{z}_2 + \\ & \tilde{f}^T B^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2^T \Pi_3 (L \ I_{n-p}) B \tilde{f} + \end{aligned}$$

$$\tilde{g}^T F^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 \tilde{z}_2 + \tilde{z}_2^T \Pi_3 (L \ I_{n-p}) F \tilde{g}$$

考虑到(2)和(3)并参考文献[11]定理 3.6 类似的推导方法可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \tilde{z}_2^T [(A_{22} + LA_{12})^T \Pi_3 + \Pi_3 (A_{22} + LA_{12}) + \\ & \Pi_3 (L \ I_{n-p}) BB^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 + \\ & \Pi_3 (L \ I_{n-p}) FF^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 + \gamma^2 I_{n-p}] \tilde{z}_2 \end{aligned} \tag{8}$$

其中  $\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ . 对式(4)左右乘  $\Pi$  得

$$\Pi(A - KC) + (A - KC)^T \Pi + \Pi BB^T \Pi + \Pi FF^T \Pi + 2\alpha \Pi + \gamma^2 I_n \leq 0$$

对上式按前面的矩阵分块展开并由第二行第二列分块得

$$\begin{aligned} (A_{22} + LA_{12})^T \Pi_3 + \Pi_3 (A_{22} + LA_{12}) + \Pi_3 (L \ I_{n-p}) BB^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 + \\ \Pi_3 (L \ I_{n-p}) FF^T (L \ I_{n-p})^T \Pi_3 + 2\alpha \Pi_3 + \gamma^2 I_{n-p} \leq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

由式(8)和(9), 有  $\dot{V} \leq -2\alpha \tilde{z}_2^T \Pi_3 \tilde{z}_2 = -2\alpha V$ , 于是  $V \leq e^{-2\alpha t} V(0)$ . 考虑到所选取的 Lyapunov 函数的  $V$  的形式, 得到

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(\Pi_3)}{\lambda_{\max}(\Pi_3)}} e^{-\alpha t} \|\tilde{x}(0)\|$$

于是定理得证.

证毕.

值得指出的是假设  $C$  具有特别的形式  $(I_p \ 0)$  并非必须, 即对一般形式的  $C$ , 同样可得到与定理 1 相类似的结论. 由于其过程类似, 在此从略.

### 3 实例仿真

用本文所提出的降维观测器对单连杆柔性关节机器人进行状态估计. 该控制对象包括关节位置及其速度, 连杆位置及其速度. 考虑到物理上的因素, 电动机的位置及其速度很容易测量出, 但对其它状态的测量却不是一件容易的事. 我们以电动机的位置及其速率为输入, 估计出连杆的位置及其速率.

该对象经建模可描述如下<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bf(x) + Fg(x, u) \\ y = Cx \end{cases}$$

其中  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T = (\theta_m \ \omega_m \ \theta_1 \ \omega_1)^T$  和

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.26 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 1.95 & 0 & -1.95 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = -0.333\sin(x_3), \quad g(x, u) = u$$

而以上  $\theta_m$  和  $\theta_1$  分别表示电动机的旋转角和连杆的旋转角,  $\omega_m$  和  $\omega_1$  分别表示电动机的角速度和连杆的角速度. 对本仿真, 以  $u(t) = \sin t$  作为系统输入. 考虑到篇幅的限制, 在此只给出估计的连杆角度  $\hat{\theta}_1$  (or  $\hat{x}_3$ ) 和实际的连杆角度  $\theta_1$  (or  $x_3$ ) 相比较的仿真图(如图 1). 从图中可以看出, 估计值较快地收敛到其真实值(真实状态的初始值为  $x(0) = (1 \ 2 \ 1 \ 0)^T$ , 估计状态的初始值取为  $\hat{x}(0) = (1.3 \ 1.8 \ -0.5 \ 0.5)^T$ ).



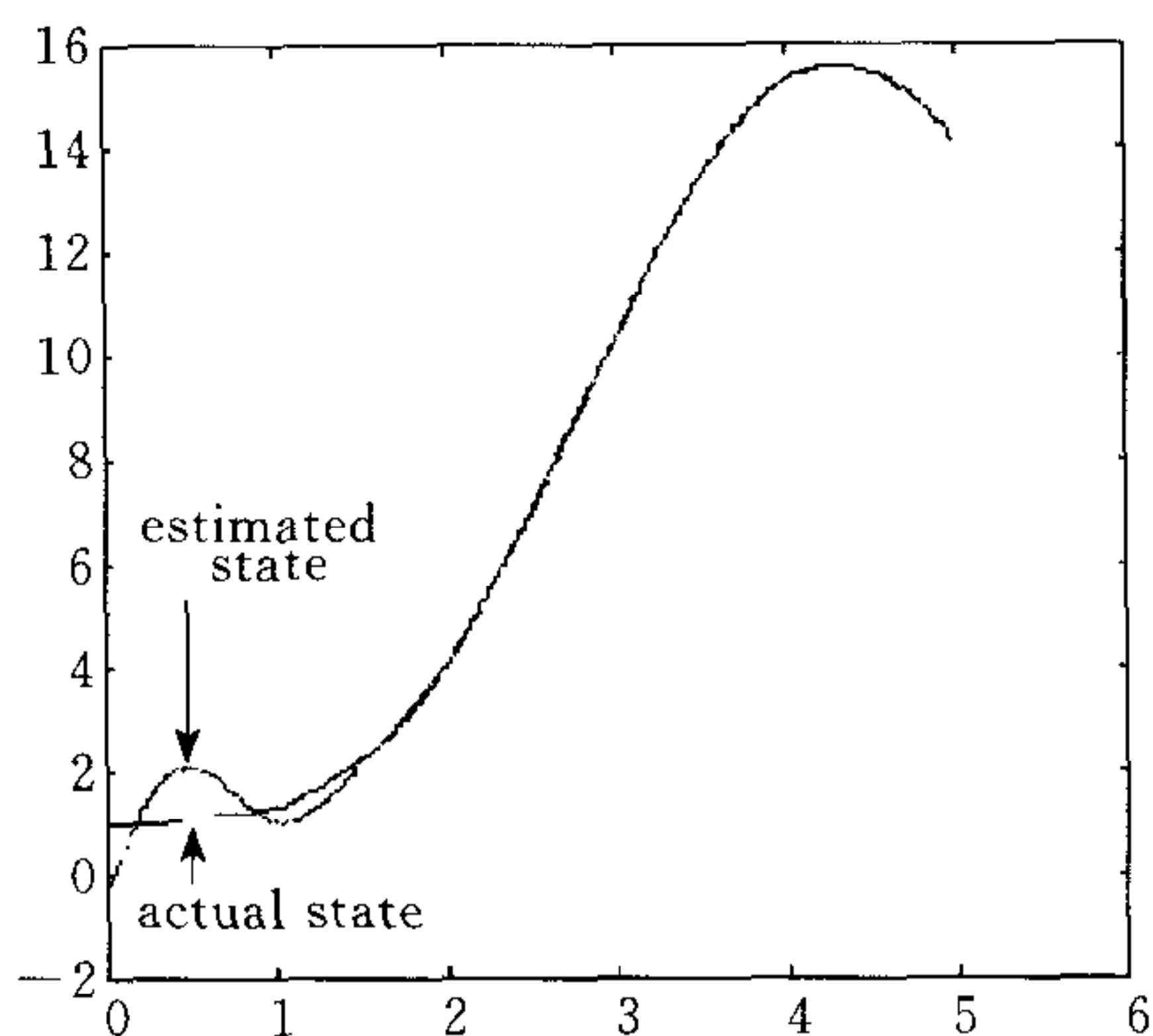


图 1 实际的和估计的连杆角度

## 4 结论

本文主要是对 Lipschitz 非线性系统降维观测器设计方法进行了研究. 在一代数 Riccati 不等式有解的前提下, 我们给出了一种降维观测器的设计方法, 该方法通过适当的 Lyapunov 函数的选取, 使所提出的降维观测器具有指数收敛速度. 事实上文献[11]在类似的情况下讨论了指数型全维观测器的设计问题. 这样结合文献[11]的有关结论, 我们就得到这样的结论: 在本文的假设 1 成立的前提条件下, Lipschitz 非线性系统(1)既存在指数型全维观测器, 又存在指数型降维观测器. 利用本文所提出的降维观测器对一实际的模型仿真结果表明, 本文所提出的方法具有较好的状态估计性能和一定的实用性.

## 参 考 文 献

- 1 Reif K, Sonnemann F, Unbehauen R. An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica*, 1998, **34**(9):1119~1123
- 2 Zeit M. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1987, **9**:149~156
- 3 Krener A J, Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 1983, **3**:47~52
- 4 Krener A J, Respondek W. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIMA J. Control and Optimization*, 1985, **3**(2):197~216
- 5 Xia X, Gao W. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control and Optimization*, 1989, **27**(1):199~216
- 6 Besancon G, Hammouri H. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Systems and Control Letters*, 1996, **29**:9~19
- 7 Rajamani R, Cho Y M. Existence and design of observers for nonlinear systems; Relation to distance to unobservability. *Int. J. Control*, 1998, **69**(5):717~731
- 8 Rajamani R. Observer for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(3):397~401
- 9 Raghavan S, Karla Hedrick J. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Control*, 1994, **59**(2):515~528
- 10 Besancon G. Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 2000, **41**:271~280
- 11 Mora M, Germani D A, Manes C. A state observer for nonlinear dynamical systems. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications*, 1997, **30**(7):4485~4496

**朱芳来** 于 2001 年在上海交通大学获得博士学位, 现为桂林电子工业学院计算机系副教授. 研究领域为非线性系统状态反馈及状态观测器设计、混沌控制和智能控制等.

**韩正之** 上海交通大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为非线性系统控制及智能控制.