第21卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 1
1995年1月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1995

非最小相位线性系统的可辨识性及辨识方法——非平稳输入

王 英　阎平凡
(清华大学自动化系　北京　100084)

摘　　要

非平稳过程在实际中是大量遇到的，该文研究当系统输入是不可量测的非平稳过程时，系统相位的可辨识性及辨识方法. 文中给出了一般性结论并与平稳条件下所得的结果[1]进行了比较. 对零初始条件下的渐近平稳过程这一非平稳特例做了较详细的研究给出了若干有意义的结果. 这些结果比较合理地解决了由系统的幅谱恢复非最小相位系统的相位信息的问题.

关键词: 随机系统，系统辨识，反褶积.

1　引言

在平稳条件下，从不同起始时刻计算出的统计特征是相同的，即任一时刻得到的统计特征不增加不同于前一时刻的统计信息；而对非平稳过程，不同起始时刻计算出的统计特征一般情况下是不相同的，也就是说从每一时刻计算到的统计特征都有可能增添与原来不相同的统计信息，从而信息量增大. 由此推测非平稳条件下利用二阶矩有可能实现非最小相位系统的唯一辨识，从而没有必要限制输入分布. 本文想就一般情况从理论上证明在非平稳条件下非最小相位系统的可辨识性. 虽然非平稳过程有一些特殊性质，但有时在实际中难以得到多次独立样本实现用于估计统计特征，限制了非平稳过程的应用. 本文就一类特殊的(符合实际情况的)非平稳过程找到了在实际中可用的辨识方法.

本文有时将在Z变换域分析问题，因此用 $y(t)$ 代替 $z(t)$ 表示输出以与Z域变换符相区分，即

$$y(t)=h(t)*\mu(t). \tag{1.1}$$

2　基于累积函数的分析

非平稳过程的统计特征与起始时刻有关，文[1]中关于 k 阶累积函数的定义应改为:

本文于1992年11月18日收到

定义 1. 非平稳序列 $x(t)$ 的 k 阶累积函数

$$c_k(t,t_1,\cdots,t_{k-1}) \triangleq \mathrm{cum}[x(t),x(t+t_1),\cdots,x(t+t_{k-1})]. \tag{2.1}$$

并定义其Z变换为

$$Z_x^k(t) \triangleq \sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{t_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{t_{k-1}=-\infty}^{\infty} c_k(t,t_1,\cdots,t_{k-1})z^{-t}\prod_{j=1}^{k-1} z_j^{-t_j}, \tag{2.2}$$

其中，cum 是求累积量符号[1].

累积函数与 n 阶不相关[1]之间的关系为

定理 1. 非平稳过程 $x(t)$ 的 k 阶 $(1<k\leqslant n)$ 累积函数满足

$$c_k(t,t_1,\cdots,t_{k-1}) = \begin{cases} c_k(t,0,\cdots,0), & t_1=t_2=\cdots=t_{k-1}=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{2.3}$$

与 $x(t)$ 为 n 阶不相关过程等价.

其证明过程同文[1]中定理 1 及 2 的证明过程,不同之处仅在于平稳条件下统计特征与起始时刻无关即 $c_k(t,0,\cdots,0)=c_k(0,0,\cdots,0)$ 为常数. 在文[1]的证明过程中将 $c_k(0,0,\cdots,0)$ 换为 $c_k(t,0,\cdots,0)$ 即得到定理 1 的证明,这里不再重复证明.

由上看出，文[1]中的定理 1 及 2 仅是本文定理 1 在平稳条件下的特例. 这样就一般情况(平稳的或非平稳的)将传统意义下的不相关与协方差函数之间的关系拓广到了 n 阶不相关与累积函数之间的关系,丰富了随机理论,以适应辨识非最小相位系统的需要.

众所周知,对有些非平稳过程其某一特定的统计特征可能与起始时刻无关,为了表示在此用到的非平稳过程的累积函数均与起始时刻有关,引入 m 阶非平稳概念.

定义 2. 如果随机过程 $x(t)$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 阶累积函数与起始时刻 t 有关，则称 $x(t)$ 为 m 阶非平稳过程.

注意定义中仅涉及 m 阶累积函数,对这种非平稳过程,我们有

引理 1. 如果系统稳定，其输入为 m 阶非平稳序列且具有有限的统计矩及不恒等于零的 m 阶累积函数,则可推出

$$Z_y^m(t) = H\left(z\prod_{j=1}^{m-1} z_j^{-1}\right)\left[\prod_{j=1}^{m-1} H(z_j)\right] Z_\mu^m(t), \tag{2.4}$$

其中

$$H(z_j) = \sum_{t_j=-\infty}^{\infty} h(t_j) z_j^{-t_j}. \tag{2.5}$$

通常系统是因果稳定的,下限可写为零.

推导过程很简单,这里省略. 由上得

定理 2. 如果引理 1 的条件满足且输入是 n 阶 $(n\geqslant m)$ 不相关的,则利用输入、输出信号的 m 阶累积函数就可唯一地辨识非最小相位系统(不计符号因子的影响).

证. 根据定理 1 的(2.3)式得

$$Z_\mu^m(t) = U_m(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} c_m(t,0,\cdots,0)z^{-t} \tag{2.6}$$

仅是 z 的函数，再根据引理 1 得，

$$Z_y^m(t) = H\left(z\prod_{j=1}^{m-1} z_j^{-1}\right)\left[\prod_{j=1}^{m-1} H(z_j)\right]U_m(z) \tag{2.7}$$

根据稳定性假设条件，在收敛域内存在着不为零的常数使得 $H(c)\neq 0$ 及 $H(zc^{-m+1})$ 在 Z 平面的一定范围内收敛，令

$$Y_m(z) = Z_y^m(t)|_{z_j=c,j=1,\cdots,m-1}, \tag{2.8}$$

则得

$$Y_m(zc^{m-1}) = H(z)H^{m-1}(c)U_m(zc^{m-1}), \tag{2.9}$$

$$H^m(c) = Y_m(c^m)/U_m(c^m). \tag{2.10}$$

根据已知条件，$Y_m(z)$ 及 $U_m(z)$ 均为已知，因此由上两式得到了只差线性相位移因子的系统传递函数，对其求反变换则得到了系统脉冲响应。

$$h(t) = Z^{-1}\{Y_m(zc^{m-1})/[H^{m-1}(c)U_m(zc^{m-1})]\}. \tag{2.11}$$

利用 $h(t)$ 是时间的实函数这一特性，不论 m 为偶数还是奇数，由(2.10)式均得

$$H^{m-1}(c) = \pm[|Y_m(c^m)/U_m(c^m)|]^{(m-1)/m}. \tag{2.12}$$

因此，根据输入、输出信号的 m 阶累积函数辨识系统是唯一的，上述证明过程并没有对系统相位提出要求，从而定理得证。

当系统脉冲响应满足一定要求时，还可以用下述定理的结论进行辨识。

定理 3. 已知 m 阶非平稳输入的累积函数 $c_m(t,0,\cdots,0)$，且已知输入为 n $(n\geqslant m)$ 阶不相关及系统脉冲响应在两个相邻（由两个相邻过零点构成的）开区间中的符号相反，则只需再知道当 $t_1=\cdots=t_{m-1}=0$ 时的输出信号的累积函数 $c_{ym}(t,0,\cdots,0)$就可唯一地估计系统脉冲响应（不计符号因子的影响）。

证．由已知条件及累积量的性质可推得

$$c_{ym}(t,0,\cdots,0) = \sum_{\tau} h^m(\tau)c_m(t-\tau,0,\cdots,0) \tag{2.13}$$

$$= h^m(t)*c_m(t,0,\cdots,0) \tag{2.14}$$

对上式做反卷积，则利用已知条件得到了 $h^m(t)$. 又已知 $h(t)$ 的值每经过一次零值后必改变符号，而其值过零点的位置与 $h^m(t)$ 的过零点位置相同，因此得到估计的脉冲响应 $\hat{h}(t)=\pm h(t)$　　〈定理得证〉

定理 2 及 3 的证明并没有对 m 及输入的分布提出限制条件，这是与平稳输入所不同的。从上看出，利用非平稳性辨识非最小相位系统不需要进行非线性寻优，因此使用起来方便。

做为非平稳过程的特例，引入单边白噪音

$$s_w(t) = \begin{cases}0, & t<0\\ w(t), & t\geqslant 0\end{cases} \tag{2.15}$$

其中 $w(t)$ 为方差等于 C_w 的零均值白噪音. $s_w(t)$ 的二阶累积函数

$$C_2(t,t_1) = \begin{cases}C_w, & t\geqslant 0,\ t_1=0\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{2.16}$$

当输入为单边白噪音时,由定理 2 及 3 看出,忽略常数因子 C_w 的影响,只需知道输出的二阶累积函数即可得到系统脉冲响应. 因此,可以说单边白噪音在非平稳过程中所起的作用与白噪音在平稳过程中所起的作用相同. 下面,研究对单边白噪音的特殊算法.

3 零初始条件下的系统辨识

非平稳过程的统计特征需用多次独立样本实现来估计,这就给本文第二部分的内容应用于实际带来困难. 为此,本节想就零初始条件下的单边白噪音输入这一特殊情况,研究用系统输出的一次样本实现来辨识非最小相位系统的方法. 想法是首先利用单边白噪音的渐近平稳性质,用系统输出的功率谱估计最小相位系统,然后利用初始阶段的非平稳性检测相位. 由系统输出采样估计最小相位系统的方法是众所周知的,下面给出利用一次实现检测相位的理论依据.

定理 4. 假定满足零初始条件($t<0$时,无输出)的因果稳定系统可用 ARMA(n,m) 模型建模,其输入为单边白噪音,且已知与之对应的最小相位系统,则用输出的一次样本实现即可将非最小相位系统辨识出来.

证. 根据已知条件,最小相位系统传递函数

$$H_{\min}(z)=\frac{h_{\min}(0)\prod_{j=1}^{l}(1-m_jz^{-1})\prod_{j=l+1}^{k}(1-m_jz^{-1})(1-m_j^*z^{-1})}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}},\tag{3.1}$$

其中, $2k-l=m$, 当 $j\leqslant l$ 时, m_j 为实零点,当 $j>l$ 时, m_j 及 m_j^* 为共轭复数零点, $h_{\min}(0)\neq 0$. 对应真实系统的传递函数具有形式

$$H(z)=\frac{b_0\prod_{j=1}^{l}(1-z_jz^{-1})\prod_{j=l+1}^{k}(1-z_jz^{-1})(1-z_j^*z^{-1})}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}},\tag{3.2}$$

其中 z_j 等于 m_j 或 m_j 的共轭倒数是不确定的量. 由最小相位系统估计的输入

$$\hat{\mu}'(t)=h_{\min}^{-1}(t)*y(t)\tag{3.3}$$

是已知量,其与真实输入的关系为

$$\hat{\mu}'(t)=[h_{\min}^{-1}(t)*h(t)]*\mu(t)=a(t)*\mu(t).\tag{3.4}$$

二者之间的传递函数

$$A(z)=H(z)/H_{\min}(z)\tag{3.5}$$

是零点相位未知的全通因果稳定滤波器. 如果系统是非最小相位的, $A(z)\neq 1$, 因此 $\hat{\mu}'(t)\neq\mu(t)$, 但它满足单边性. 构造全通滤波器

$$A_j(z)=\begin{cases}(z-m_j)/(1-m_jz), & 1\leqslant j\leqslant l\\(z-m_j)(z-m_j^*)/(1-m_jz)(1-m_j^*z), & l<j\leqslant k\end{cases}\tag{3.6}$$

做卷积得

$$\hat{\mu}_j'(t)=a_j(t)*\hat{\mu}'(t)\tag{3.7}$$

是已知量,其与真实输入的关系为

$$\hat{\mu}_j'(t) = a_j(t) * a(t) * \mu(t). \tag{3.8}$$

二者之间的传递函数为

$$A_j'(z) = A_j(z)A(z). \tag{3.9}$$

如果真实系统的零点 z_j 是最小相位的，则由(3.5)及(3.6)式看出，在(3.9)式中，$A_j(z)$中的非最小相位极点不能与 $A(z)$ 的零点相抵消，从而 $A_j'(z)$ 是非因果稳定的，而已知 $\mu(t)$ 具有单边性，因此 $\hat{\mu}_j'(t)$ 不具有单边性；如果真实系统的零点 z_j 是非最小相位的，则 $A_j(z)$ 中的非最小相位极点与 $A(z)$ 中的零点相抵消，从而 $A_j'(z)$ 是因果稳定的，因此 $\hat{\mu}_j'(t)$ 具有单边性. 所以，根据 $\hat{\mu}_j'(t)$ 是否具有单边性可判断真实系统零点的相位. 综上所述，真实系统的零点

$$z_j = \begin{cases} m_j, & J_j > 0 \\ 1/m_j^*, & J_j = 0 \end{cases}, \qquad j = 1,2,\cdots,k \tag{3.10}$$

其中

$$J_j = \sum_{t=-\infty}^{-1} |\hat{\mu}_j'(t)|. \tag{3.11}$$

将检测到的零点代入(3.2)式，则得到了具有真实相位的系统. 〈定理得证〉

从证明过程看出，已知最小相位系统辨识真实系统时，只要求输入满足单边性，可以不是单边白噪音. 这一点对由幅谱重构系统很重要，在这类信号处理问题[2,3,4]中，是根据已知的系统幅度谱(通过谱分解方法获得与之对应的最小相位系统)恢复具有真实相位的系统脉冲响应. 用本文方法解决这个问题只需要在零初始条件下用单边信号激励系统并量测系统输出，这对于大多数物理系统来讲都是较容易做到的事情，因此比较符合实际.

定理中加入单边白噪音这一假设条件，是考虑到系统功率谱未知时，需要用单边白噪音的渐近平稳性来估计最小相位系统.

定理的证明是构造性的，从中也得到了辨识算法. 但在实际中，由于只能量测到有限长的输出数据且通常含有噪音以及计算误差的影响，目标函数(3.11)的值不会等于零，因此应当对算法进行修改，修改后的算法见附录 A，仿真结果见下一节.

根据定理 4 的证明还可得

推论. 从(3.1)式看出，有 2^k 个因果稳定实系统对应着同一功率谱，用这 2^k 个系统做反卷积得 2^k 个估计的输入序列，在这些序列中有 2^s 个满足单边性，其中 $s=s_1+s_2/2$，s_1 和 s_2 分别为真实系统的非最小相位实及复零点个数. 对应满足单边性系统的非最小相位零点全部是真实系统的非最小相位零点，将这 2^s 个系统中不相同的非最小相位零点组合起来形成了真实系统的全部非最小相位零点.

推论的证明很简单，这里不再给出.

4　仿真结果

产生合成数据所使用的系统传递函数为

$$H(z) = \frac{1.0 + 2.0z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1.0 - 0.8z^{-1} - 0.39z^{-2} + 0.712\, z^{-2}}$$

用 $A_{mp}(1.7,0.29)$ 表示 $H(z)$ 两个零点的幅值并分别将它们按次序编号为 1 和2。利用真实的最小相位系统及附录 A 中的算法检测相位得

无量测噪音：$J_1 = 7.88 \times 10^{-6}$，$J_2 = 7.10 \times 10^{-3}$；

量测噪音方差为 10^{-4}：$J_1 = 6.64 \times 10^{-5}$，$J_2 = 7.06 \times 10^{-3}$；

量测噪音方差为 10^{-3}：$J_1 = 2.49 \times 10^{-4}$，$J_2 = 7.02 \times 10^{-3}$；

从中看出，噪音对与非最小相位零点所对应的目标函数值影响很大，但其小于与最小相位零点所对应的目标函数值，因此在噪音不太强的情况，利用本文算法可以区分哪些零点是最小相位的，哪些零点是非最小相位的，从而得到了真实系统的传递函数。

5 小结

本文与文[1]就一般(平稳的或非平稳的)情况丰富了不相关理论，为辨识非最小相位系统提供了有力的理论工具。以此理论为基础，本文讨论了输入为非平稳序列时，非最小相位系统的可辨识性及辨识方法，同文[1,5]对照得

1）非平稳条件下，对系统随机输入的分布无限制；而平稳条件下，分布必须是非高斯。

2）非平稳条件下，利用二阶累积函数即可实现唯一辨识；而平稳条件下只能辨识系统幅度谱。

3）非平稳条件下，利用累积函数辨识非最小相位系统是线性问题，而在平稳条件下是非线性问题。

4）如果将本文的(2.7)式从 Z 域变换到频域表示并与文[5]中的公式进行比较，可以看出，这里除了独立变量 $\omega_1,\cdots,\omega_{m-1}$ 外，还增加了独立变量 ω。这是因为非平稳条件下，累积函数与起始时刻有关。正是由于独立变量 ω 的增加才使得辨识系统的相位成为可能。

本文另一重要结论是：如果输入为单边白噪音，则用输出信号的一次实现而不是多次样本实现即可实现非最小相位系统的唯一辨识，从而有可能在实际中应用，这也比较符实际地解决了由幅谱重构系统的问题[2,3,4]。

参 考 文 献

[1] 王英，阎平凡，常迥．非最小相位线性系统的可辨识性及辨识方法——平稳输入．自动化学报，1993，**19**(4)：404—412．

[2] 吴忠泽，李衍达，常迥．利用部分采样点以及幅度谱恢复离散信号．中国科学，A辑 1986，**10**:1109—1120．

[3] 徐雷，阎平凡，常迥．有限时宽序列的 Semi-Blind 反褶积——I．线性问题．中国科学，A辑，1987，**4**:423—436．

[4] 徐雷，阎平凡，常迥．有限时宽序列的 Semi-Blind 反褶积——II．非线性问题．中国科学，A辑，1987，7:749—758．

[5] Rowenblatt M. Linear Processes and Bispectra J. Appl. Probab., 1980, 265—270.

附录 A　零点相位检测算法

因篇幅所限，这里只简单介绍算法[1)]，详细内容见文[6]，根据(3.6)式得

$$A_j(z)=\begin{cases}\sum_{p=0}^{\infty} m_j^p z^{p+1}-\sum_{p=0}^{\infty} m_j^{p+1} z^p; & j\leqslant l\\ \{\sum B_j(z)c_j^{p+1}\sin[(p+1)\phi_j]\}/r_{2j}; & j>l\end{cases}\tag{A.1}$$

其中当 $j>l$ 时，式中符号意义为

$$m_j=r_{1j}+ir_{2j}=c_j[\exp(i\phi_j)],\tag{A.2}$$

$$B_j(z)=z^{p+2}-2r_{1j}z^{p+1}+c_j^2z^p,\tag{A.3}$$

i 为虚数单位。当 p 大于某值后，由计算机计算出的 m_j^p 及 c_j^p 的值均为零且量测数据的长度 L_d 也是有限的，因此取最大 p 值满足

$$p_{\max}=\min[\ln(\varepsilon_m/A_{ve})/\ln(|m_j|),L_d-3],\tag{A.4}$$

其中 ε_m 为机器所能表示的最小正实数，

$$A_{ve}=\left[\sum_{t=0}^{L_d-1}|\hat{\mu}'(t)|\right]\Big/L_d.\tag{A.5}$$

从(3.11)式看出，仅需计算 $t<0$ 时的 $\hat{\mu}'(t)$。令

$$\hat{\mu}_j(t)=\hat{\mu}_j'(-t),\qquad t>0\tag{A.6}$$

依据上述得用计算机计算的目标函数为

$$J_j=\sum_{t=1}^{p_{\max}}|\underset{\sim}{\hat{\mu}}_j(t)|.\tag{A.7}$$

其中，当 $1\leqslant j\leqslant l$ 时，

$$\underset{\sim}{\hat{\mu}}_j(t)=\sum_{p=t}^{p_{\max}}[m_j^p\hat{\mu}'(p+1-t)-m_j^{p+1}\hat{\mu}'(p-t)]+m_j^{t-1}\hat{\mu}'(0).\tag{A.8}$$

当 $l<j\leqslant k$ 时，

$$\underset{\sim}{\hat{\mu}}_j(t)=\begin{cases}u_j(t)/r_{2j}, & t=1\\ u_j'(t)/r_{2j}, & t>1\end{cases}\tag{A.9}$$

$$u_j(t)=\sum_{p=t}^{p_{\max}}[b_j(t)c_j^{p+1}\sin[(p+1)\phi_j]+[\hat{\mu}'(1)-2r_{1j}\hat{\mu}'(0)]c_j^p\sin\phi_j,\tag{A.10}$$

$$b_j(t)=\hat{\mu}'(p+2-t)-2r_{1j}\hat{\mu}'(p+1-t)+c_j^2\hat{\mu}'(p-t),\tag{A.11}$$

$$u_j'(t)=u_j(t)+c_j^{p-1}\hat{\mu}'(0)\sin[(p-1)\phi_j].\tag{A.12}$$

1) 王英．反褶积及部分岩性参数提取问题研究．清华大学博士论文．

IDENTIFIABILITY AND IDENTIFICATION ALGORITHMS FOR NON-MINIMUM-PHASE LINEAR SYSTEMS——NON-STATIONARY INPUT CASE

WANG YING YAN PINGFAN
(*Department of Automation, Tsinghua University Beijing* 100084)

ABSTRACT

This paper discusses the identifiability and identification algorithms for the non-minimum-phase linear system with unmeasurable non-stationary input. General results are given and are compared with the conclusions under stationary inputs. If the initial state of the system is zero and the input is one-sided white noise, the input and output of the system are approximately stationary. This is a special case for non-stationary processes. The results obtained for this special case solving are more practical for solving the problem of the unique recovery of the impulse response from amplitude spectrum.

Key words: Stochastic systems; system identification; deconvolution.

王 英 简介及照片见本刊19卷4期。

阎平凡 1955年毕业于清华大学电机系，现在是清华大学自动化系教授，博士生导师，感兴趣的研究领域：计算机视觉，自适应信号处理，人工神经网络及其应用等。