第16卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol.16, No.2
1990年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1990

改进的快速富里叶变换及其在轧钢机偏心补偿中的应用

李 育 苗
(北京科技大学)

摘　　要

改进的快速富里叶变换的计算方法能够在采样的持续时间不是信号的周期的整数倍时，准确地提供此信号中各周期分量的特性. 它可以用于分析周期未知或者周期经常变化的信号. 本文介绍了它的计算方法，及其在轧钢机中由轧辊偏心引起的变化信号补偿中的应用.

关键词——偏心，快速富里叶变换，补偿.

一、前　　言

通常，我们采用 FFT 方法分析计算一变化信号中各周期分量的幅值、频率和角度. 但一般地说不能得到准确的结果. 除了在特殊的情况下，即我们选择采样的持续时间 T（在 T 区间内，作 N 次等分），正好是信号周期的整数倍. 否则，就会产生泄漏效应[1]，使得离散的和连续的富里叶变换的结果产生明显的差异. 在实际问题中，待抽样分析的信号的周期往往是未知或变化不定的. 如轧钢机中，由于轧辊偏心引起的轧制力和带钢厚度的变化信号的周期就是不固定的. 如果在计算时通过对采样周期的限制而求得正确结果，是十分困难的. 我们将介绍一种改进的 FFT 方法，采用内插计算法[2]修正 FFT 法的计算结果，从而使 FFT 法应用于更一般的场合.

二、改进的 FFT 计算方法

考虑一周期复函数 $g(t)$ 在每一 $t_r(t_r = r \cdot T/N$. T 为采样的持续时间；N 为采样个数)时采样，得到抽样函数 g_r

$$g_r = g(t_r) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot \exp(i\Omega_k t_r). \tag{1}$$

其中 $A_k = a_k + ib_k$；$\Omega_k = i\lambda_k + \omega_k (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$.

通过 FFT 的计算，我们可以得到对应于以 $2\pi/T$ 为间隔频率的离散富里叶变换的

本文于1987年6月27日收到.

结果. 即

$$G_j = 1/N \sum_{r=0}^{N-1} g_r \cdot \exp(-i2\pi rj/N), (j=0,1,\cdots,N-1). \tag{2}$$

一般地说，这些 G_j 的值并不能准确地代表 $g(t)$ 中各分量的幅值和频率的复数值.

由(1),(2)式，得出

$$G_j = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} A_k \frac{1-\exp[-\lambda_k T + i(\omega_k T - 2\pi j)]}{1-\exp[-\lambda_k T + i(\omega_k T - 2\pi j)]/N}. \tag{3}$$

从(3)式中，并不能看出 G_j 和 A_k 之间的直接关系. 但是，当采样的持续时间为信号周期的整数倍时，即 $T = K \cdot 2\pi/\omega_k$，并且 $j=k$ 时，有

$$G_k = A_k \frac{1-\exp(-\lambda_k T)}{\lambda_k T} + 1/N \sum_{\substack{k=0\\k\neq K}}^{N-1} A_k \times \frac{1-\exp[-\lambda_k T + i2\pi(K-k)]}{1-\exp[-\lambda_k T + i2\pi(K-k)]/N}. \tag{4}$$

在这里，假设 λ_k/N 很小.

如果忽略(4)式中带有 $1/N$ 的项，有

$$G_k = A_k. \tag{5}$$

只有在上述情况下，才近似地得到 G_k 和 A_k 之间的对应关系. 通常情况下，采样的持续时间不是信号周期的整数倍. 我们引入一个参数 ε_k 使得信号的频率可以用下式表示:

$$\omega_k = (K+\varepsilon_k) \cdot 2\pi/T, \quad 0 < \varepsilon_k < 1.$$

此时，对应于频谱中 G_j 的 $j=k$ 时，从(3)式得出

$$G_k = A_k \frac{1-\exp(-\lambda_k T + i2\pi\varepsilon_k)}{\lambda_k T - i2\pi\varepsilon_k} + 1/N \sum_{\substack{k=0\\k\neq K}}^{N-1} A_k \frac{1-\exp[-\lambda_k T + i2\pi(\varepsilon_k + K - k)]}{1-\exp[-\lambda_k T + i2\pi(\varepsilon_k + K - k)]/N}. \tag{6}$$

当忽略了(6)式中带有 $1/N$ 项时，有

$$G_k = A_k \frac{1-\exp(-\lambda_k T + i2\pi\varepsilon_k)}{\lambda_k T - i2\pi\varepsilon_k}. \tag{7a}$$

同样，对于两相邻的 $j=k+1$ 和 $j=k-1$ 的值，有

$$G_{k+1} = A_k \frac{1-\exp(-\lambda_k T + i2\pi\varepsilon_k)}{\lambda_k T - i2\pi\varepsilon_k - i2\pi}, \tag{7b}$$

$$G_{k-1} = A_k \frac{1-\exp(-\lambda_k T + i2\pi\varepsilon_k)}{\lambda_k T - i2\pi\varepsilon_k + i2\pi}. \tag{7c}$$

假设

$$A = \frac{G_k - G_{k-1}}{G_k - G_{k+1}}, \tag{8a}$$

根据(7a),(7b),(7c),(8a)式，得出

$$A = \frac{-(Z_k + i2\pi)}{(Z_k - i2\pi)}. \tag{8b}$$

其中 Z_k 定义为

$$Z_k = \lambda_k T - i2\pi\varepsilon_k. \tag{9}$$

从(9)式中 Z_k 的实部和虚部值，可以确定 λ_k 和 ε_k 的值．也可以求出复频率 Ω

$$\Omega_k = i\lambda_k + (K + \varepsilon_k)\cdot 2\pi/T. \tag{10}$$

又从(8)式中有

$$Z_k = i2\pi\frac{A-1}{A+1}. \tag{11}$$

最后，根据 (7a),(7b),(7c) 三式，可求出当采样持续时间 T 不为信号周期的整数倍时

$$A_k = (2G_k - G_{k+1} - G_{k-1})\frac{Z_k(Z_k^2 + 4\pi^2)}{8\pi^2(1-\exp(-Z_k))}. \tag{12}$$

以上讨论的这种方法对于一个由有限的，彼此有明显差异变化着的周期分量迭加而成的信号分析是适用的．

三、改进的 FFT 法在偏心控制中的应用[3]

在冷轧生产过程中，轧辊的偏心会使轧制力和带钢厚度发生变化，降低产品的质量．这种偏心信号随着轧辊的转动呈现一定的规律，故可把它视为一个由多个谐波合成的周期信号．然而，在整个轧钢过程中，轧辊转动的角速度是受其它因素的影响而变化的．所以，偏心信号的周期是变化不定的．我们用上述改进的 FFT 法，根据轧辊在正常工作时的转速，选择一个固定的采样周期，就可以方便地实现对偏心信号的分析和计算．并通过如图 1 所示的偏心补偿系统，减少由于偏心造成的轧制力和带钢厚度上的变化量．

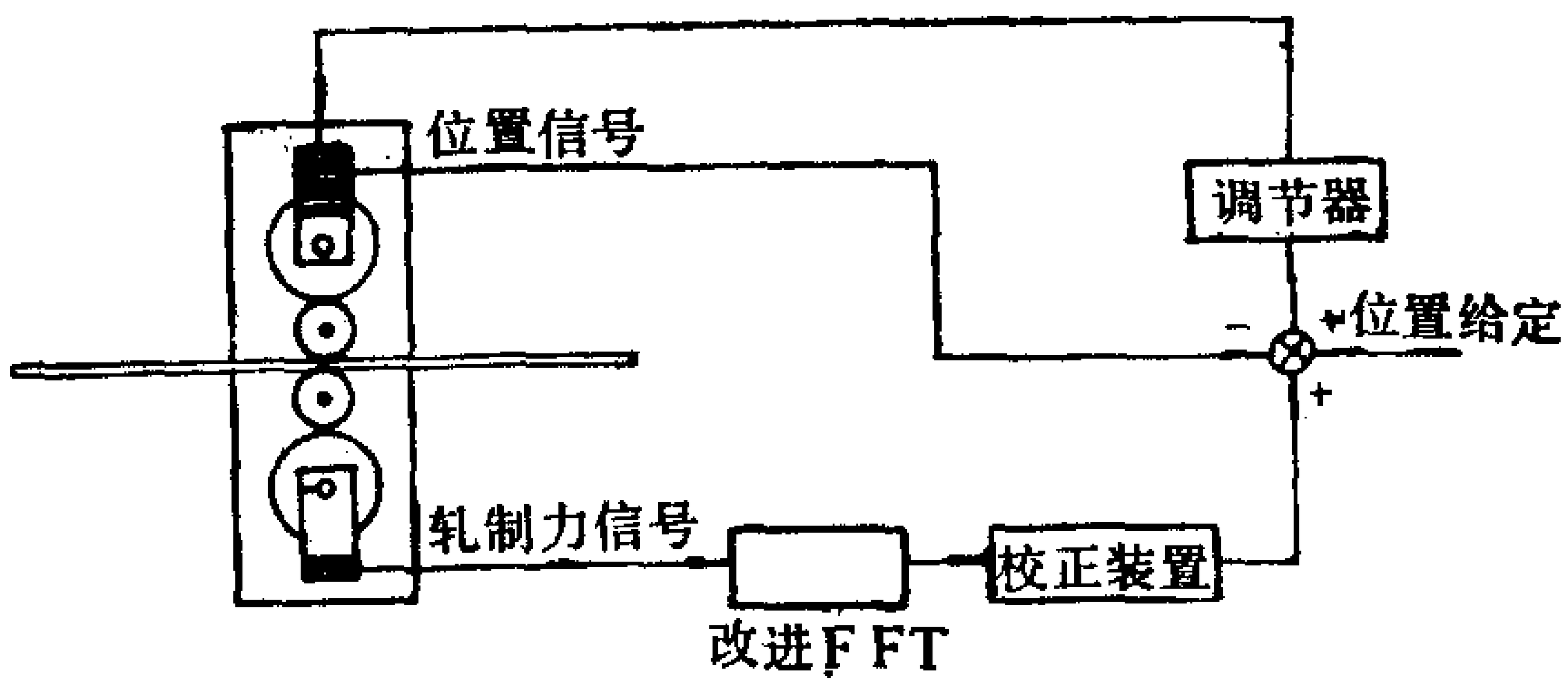

图 1　偏心信号的补偿系统

对偏心信号的补偿系统我们进行了仿真研究．仿真对象是以一个五机架冷连轧中第二套轧辊的数学模型为依据．这里，通过第二套轧辊的带钢运行速度为 540 (毫米/分)，而第二套轧辊中支撑辊的直径大约为 1500 (毫米)，这样便可近似地得到偏心信号中基波的周期为 12 (弧度/秒)；我们还认为偏心信号的幅度近似为支撑辊直径的 1×10^{-5}；且任选一角度作为偏心信号的初始角，这样，我们就把偏心信号 ε 近似地用两个主要的谐波分量和一噪声表示

$$\varepsilon = 0.08\times\cos(12\times t + 3.2) + 0.04\times\cos(24\times t + 4.2) + B(t)\ (\text{毫米}).$$

其中 $B(t)$ 是一方差为 0.08 (毫米)的随机噪声．

我们选择采样周期为 0.01(秒),采样个数为 256,得出如图 2、图 3 所示的仿真结果.

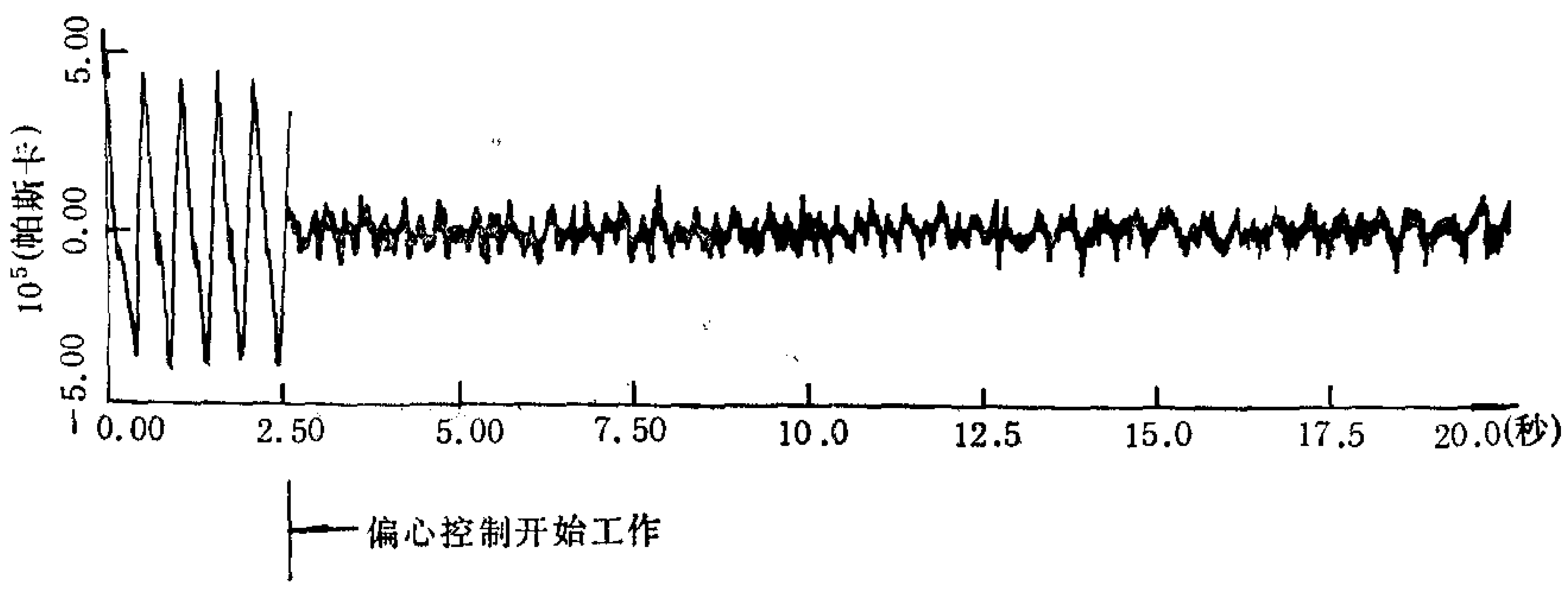

图 2 轧制力的变化

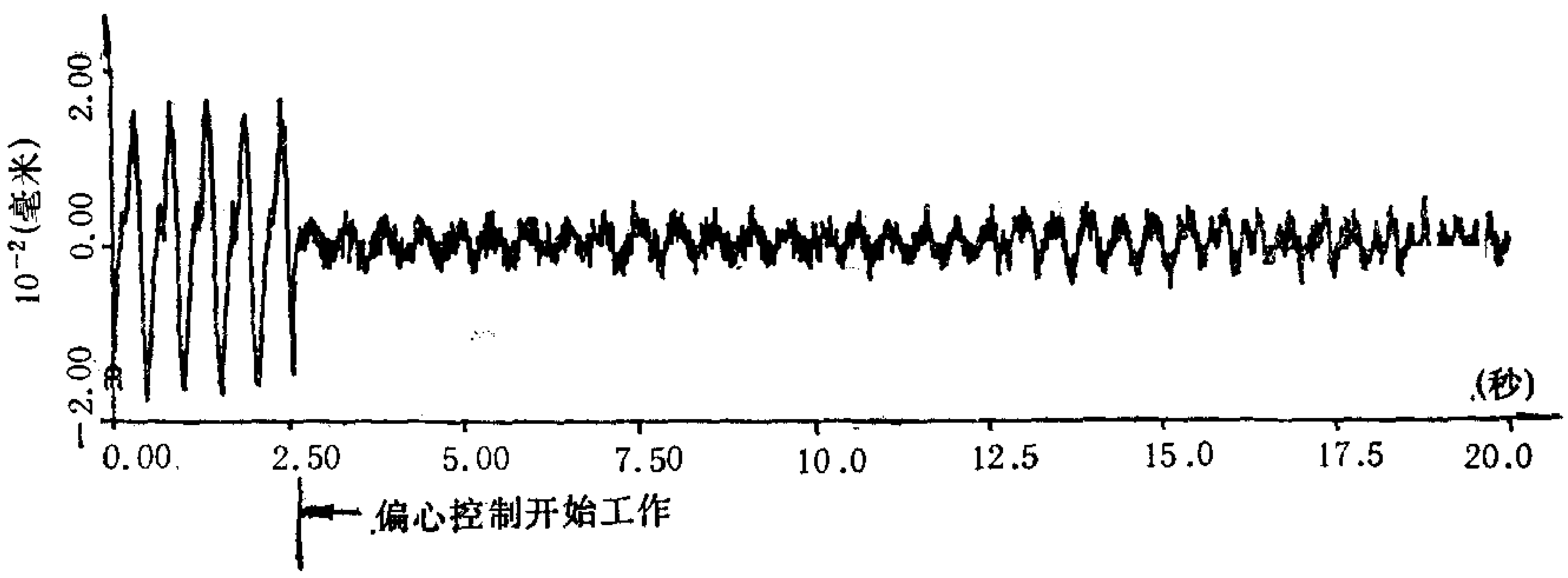

图 3 带钢厚度的变化

实验结果表明,由于改进的 FFT 法能够准确地分析计算偏心信号,使得偏心补偿系统能够减少 84% 由偏心引起的轧制力的变化,减少 81% 由偏心引起的轧钢厚度的变化.

参 考 文 献

[1] E. Q. Brigham, The Fast Fourier Transform, Prenlire Hall. Inc., 1974.

[2] Rajaona, D. R., Sulmont P., A Method of Speetral Analysis Applied to Periodic and Pseudoperiodic Signals, *Journal of Computation Physics*. **61**, No. 1, 186—193.

[3] LI, Y. M., Mezencev R., Compensation Pour L'excentricite' Des Cylindres Dans un Laminoir à Froid, 6th International Symposium on Modelling, Identification and Control, February, 1987.

THE MODIFIED FAST FOURIER TRANSFORM AND ITS APPLICATION TO THE COMPENSATION OF ECCENTRICITIES IN A COLD MILL ROLLING

LI YUMIAO

(Beijing University of Science and Technology)

ABSTRACT

The method of Modified Fast Fourier Transform (MFFT) can be used to compute the exact characteristics of the components of a periodic signal when sampling duration is not equal to an integral multiple of the fundamental. It can be used to analyze a signal whose period is unkown or varied. An application to the compensation of the periodical thickness variation of the strip produced by eccentricities in a cold mill rolling is presented.

Key words ——Eccentricities; FFT; compensation.