

# 关于子带编码中的最优正交小波

贾沛璋 李海涛

(中国科学院系统科学所 北京 100080)

**摘要** 用小波变换进行子带编码是信号与图象压缩的一个新方法,小波可以有几个自由度的选择灵活性,这是它优于离散余弦变换的特点之一.提出了最优小波问题,讨论了最优正交小波,最优的性能指标为编码增益  $G_{SBC}$  达到极大,对于平稳随机信号,最优小波完全由信号的谱密度决定,并给出了对几种典型谱密度分布所对应的最优正交小波.

**关键词** 最优小波,正交小波,子带编码.

## 1 引言

目前关于图象压缩的国际标准是采用离散余弦变换(DCT).小波变换与DCT相比具有三大优势:1)小波变换在高频有高的时间(空间)分辨率,使之易于捕捉图象的细节,而DCT在高频与低频有相同的时间(空间)分辨率;2)DCT是采用 $8 \times 8$ 分块变换压缩,缺乏整体连续性,而小波变换是按子带量化编码,有好的整体连续性;3)小波有很大的选择灵活性,而DCT是固定的一种变换.

对应于支撑长度为  $L$ (偶数)的正交小波,可以有  $(L-2)/2$  自由度的选择灵活性,这给应用带来极大的方便,同时也提出了最优小波问题,即对不同类型的信号与图象,应选择不同的最优小波<sup>[1]</sup>.对于平稳随机信号,最优小波完全由信号的谱密度确定.

## 2 子带编码中的正交小波

支撑为  $L$ (偶数)的正交小波由低通滤波  $\{h_k\} (-\frac{L}{2} + 1 \leq k \leq \frac{L}{2})$  唯一确定,对应的高通滤波  $\{g_k\} (-\frac{L}{2} + 1 \leq k \leq \frac{L}{2})$  为

$$g_k = (-1)^k h_{-k+1}. \quad (1)$$

它们满足正交条件

$$\sum_k h_{k-2n} h_{k-2m} = \delta_{n,m}, \quad \sum_k g_{k-2n} g_{k-2m} = \delta_{n,m}, \quad \sum_k h_{k-2n} g_{k-2m} = 0 \quad (2)$$

及归一化条件

$$\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \sqrt{2}/2, \quad \sum_k g_{2k} = -\sum_k g_{2k+1} = \sqrt{2}/2. \quad (3)$$

记

$$H(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega}, \quad G(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\omega}.$$

(1)–(3)式可等价地写成

$$G^*(\omega) = -e^{i\omega} H(\omega + \pi), \quad H(0) = 1, \quad H(\pi) = 0 \quad (4), (5)$$

及

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (6)$$

满足(5),(6)式的正交小波的通解形式为

$$|H(\omega)|^2 = \cos^2 \frac{\omega}{2} \left[ 1 + \sin^2 \frac{\omega}{2} \cdot \sum_{l=1}^{L/2-1} u_l \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^{2l-1} \right]. \quad (7)$$

式中  $\{u_l\}_{1 \leq l \leq L/2-1}$  为自由参数, 它们满足约束条件

$$|H(\omega)|^2 \geq 0, \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]. \quad (8)$$

(7)式对应支撑为  $L$  (偶数) 的正交小波. 在子带编码中只用到滤波器  $\{h_k\}, \{g_k\}$ , 没有用到小波  $\psi(t)$  本身, 因此在构造  $H(\omega)$  时, 不必考虑保证对应的小波  $\psi(t) \in L^2(R)$  这一约束, 这放松了文献[2]中给出的小波构造条件.

在子带编码中, 对应支撑为  $L$  (偶数) 的正交小波, 可以有  $L/2-1$  个自由度的选择, 其中自由参数  $\{u_l\}_{1 \leq l \leq L/2-1}$  满足的约束条件(8)将使它们在  $L/2-1$  维空间的一个闭集中取值.

如记信号样本为  $\{S_l\}_{1 \leq l \leq N}$ , 原  $N$  个信号样本被正交变换为  $(b_1^1 b_2^1 \cdots b_{N/2}^1, b_1^2 b_2^2 \cdots b_{N/4}^2, b_1^3 b_2^3 \cdots b_{N/8}^3, a_1^3 a_2^3 \cdots a_{N/8}^3)$ , 小波分解的公式为

$$a_n^m = \sum_k h_{k-2n} a_k^{m-1}, \quad b_n^m = \sum_k g_{k-2n} a_k^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (9)$$

其中  $a_k^0 = S_k$ . 小波重构的公式为

$$a_k^{m-1} = \sum_n h_{k-2n} a_n^m + \sum_n g_{k-2n} b_n^m, \quad m \geq 1. \quad (10)$$

在每层的小波分解中, 保留信号的高频成份, 而把低频成份再分解, 因而小波分解在高频有低的频率分辨率, 但有高的时间(空间)分辨率; 在低频正好相反. 对于图象压缩来说, 这一特点将有利于捕捉图象的细节.

在小波分解的每一层变换都是正交变换, 这里变换的正交性由(2)式保证, 对于有限信号样本, 小波变换的边界问题可用周期延拓或其它方法<sup>[3]</sup>解决, 因此在子带编码中, 每一层变换可以用不同的小波, 这是小波选择的又一灵活性.

下面以支撑  $L=4$  和  $L=6$  的情形为例, 说明子带编码中正交小波的选择范围.

1)  $L=4$  情形. 由(7)式, 有

$$|H(\omega)|^2 = \cos^2 \frac{\omega}{2} \left[ 1 + u_1 \sin^2 \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \right]. \quad (11)$$

其中满足(8)式的  $u_1$  的取值范围为  $-16 \leq u_1 \leq 2$ . 如果小波分解三层(像图象压缩中那样), 分别记每层的自由参数为  $u_1^m$  ( $1 \leq m \leq 3$ ), 此时  $u_1^1, u_1^2, u_1^3$  可以在区间  $[-16, 2]$  中独立地取值, 它们的每一取值都给出一种小波变换, 所谓最优小波就是其中使性能指标达到最优者.

2)  $L=6$  情形, 由(7)式, 有

$$|H(\omega)|^2 = \cos^2 \frac{\omega}{2} \left[ 1 + u_1 \sin^2 \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right) + u_2 \sin^2 \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

其中满足(8)式的 $(u_1, u_2)$ 的取值范围为二维平面中的一个连通闭集,见图1.

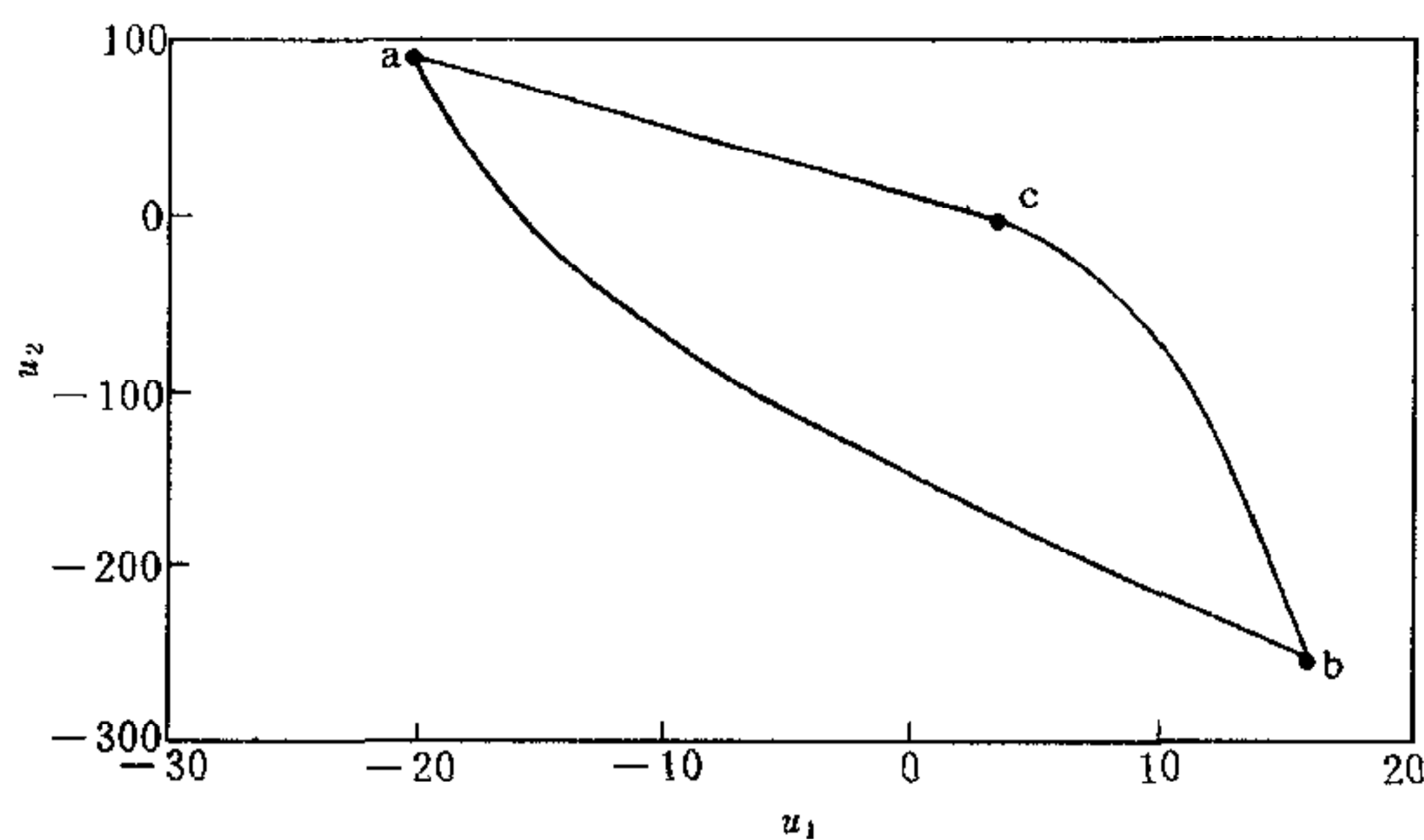


图1  $(u_1, u_2)$ 的允许域

图中两端点  $a$  与  $b$  的坐标分别为 $(-20.18, 88.72)$ 和 $(16, -256)$ ,从  $a$  到  $c$  点为直线,  $c$  点坐标为 $(3.5, -6)$ . 此时自由参数 $(u_1, u_2)$ 可以在图1中由过  $a, b, c$  点的曲线所包围的闭集中独立地取值.

构造子带编码中的正交小波,还有另外一种形式<sup>[1]</sup>. 记

$$H_M(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-M+1}^M h_k z^k, \quad G_M(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-M+1}^M g_k z^k.$$

它们对应支撑  $L=2M$  的正交小波,通过下式引进  $P_M(z), Q_M(z)$

$$\begin{bmatrix} H_M(z) \\ Q_M(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} z^{-M+1} \begin{bmatrix} P_M(z) \\ (-1)^M Q_M(z) \end{bmatrix}.$$

$P_M(z), Q_M(z)$  有下述递推关系

$$\begin{bmatrix} P_M(z) \\ Q_M(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{M-1} & \sin \alpha_{M-1} \\ -\sin \alpha_{M-1} & \cos \alpha_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{M-1}(z) \\ Q_{M-1}(z) \end{bmatrix}.$$

递推初值

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ Q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & \sin \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 & \cos \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix}.$$

不难验证,由此递推关系定义的  $H_M(z), G_M(z)$  满足正交小波的两个条件

$$H_M(z) = z G_M(-z^{-1}), \quad G_M(z) = -z H_M(-z^{-1}),$$

$$H_M(z) H_M(z^{-1}) + G_M(z) G_M(z^{-1}) = 1.$$

为了保证

$$\begin{bmatrix} H_M(1) \\ G_M(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

将要求  $\sum_{l=0}^{M-1} \alpha_l = \pi/4$ .

1)  $L=2M=4$  情形

$$h_{-1} = \cos \alpha_1 \cos \alpha_0, \quad h_0 = \cos \alpha_1 \sin \alpha_0, \tag{13}$$

$$h_1 = -\sin \alpha_1 \sin \alpha_0, \quad h_2 = \sin \alpha_1 \cos \alpha_0.$$

其中  $\alpha_0 = \pi/4 - \alpha_1, \alpha_1 \in [-\pi, \pi]$ . 这里  $\alpha_1$  为自由参数,它与  $u_1$  的关系为

$$u_1 = -8 \sin \theta_1 (1 + \sin \theta_1). \tag{14}$$



式中  $\theta_1 = 2\alpha_1$ . 当  $\theta_1 = \pi/2$  时,  $u_1$  取最小值  $-16$ ; 当  $\theta_1 = -\pi/4$  时,  $u_1$  取最大值  $2$ . 对于  $u_1 \in [-16, 2]$  的某个取值, 将有  $[0, 2\pi]$  中的多个  $\theta_1$  与之对应, 它们有相同的振幅响应  $|H(\omega)|^2$ , 但给出不同的小波, 分别是最小相位、最大相位和混合相位小波.

2)  $L = 2M = 6$  情形

$$\begin{aligned} h_{-2} &= \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_0, & h_{-1} &= \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_0, \\ h_0 &= -\sin\alpha_1 \sin(\alpha_2 + \alpha_0), & h_1 &= \sin\alpha_1 \cos(\alpha_2 + \alpha_0), \\ h_2 &= -\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_0, & h_3 &= \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_0. \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\alpha_0 = \pi/4 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in [-\pi, \pi]$ . 这里  $\alpha_1, \alpha_2$  为自由参数, 它们与  $u_1, u_2$  有关系

$$\begin{aligned} u_1/8 &= \sin\theta_2 - \sin^2\theta_1 + \sin(\theta_2 - \theta_1), \\ u_2/64 &= -\sin\theta_2(1 + \cos\theta_1)[1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\theta_1 = 2\alpha_1, \theta_2 = 2\alpha_2$ , 对于  $(u_1, u_2)$  允许域中的某个取值, 将有  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  中的几对  $(\theta_1, \theta_2)$  与之对应, 它们有相同的振幅响应  $|H(\omega)|^2$ , 但给出不同相位的小波. 对于子带编码, 为了降低假名误差, 应选择接近对称的混合相位小波.

### 3 子带编码中的最优小波

考虑平稳随机信号  $\{S_k\}$  情形, 记输入信号的谱密度为  $P(\omega)$ , 方差为  $\sigma_s^2$ , 假设小波分解三层, 产生四个子带, 记这四个子带输出的方差分别为  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$  和  $\sigma_0^2$ . 不难导出

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{2\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |G(\omega)|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_2^2 &= \frac{4\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 |G(\omega)|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_3^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 |H(2\omega)|^2 |G(4\omega)|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_0^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 |H(2\omega)|^2 |H(4\omega)|^2 P(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (17)$$

对于等带宽的子带编码, 采用最优 bit 分配的编码增益为各子带输出方差的算术平均与几何平均之比, 现在四个子带的带宽分别为  $2\pi/2, 2\pi/4, 2\pi/8$  和  $2\pi/8$ , 子带编码的增益为

$$G_{SBC} = \frac{1}{8} (4\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_0^2) / [(\sigma_1^2)^4 \cdot (\sigma_2^2)^2 \cdot (\sigma_3^2) \cdot (\sigma_0^2)]^{1/8} \quad (18)$$

不难看出, 分子为

$$\frac{1}{8} (4\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_0^2) = \sigma_s^2. \quad (19)$$

由(4)式知

$$|G(\omega)|^2 = |H(\omega + \pi)|^2$$

把(7)式代入(17), (18)式, 增益  $G_{SBC}$  将表为自由参数  $\{u_l\}_{1 \leq l \leq L/2-1}$  的函数, 最优小波的性能指标应使增益  $G_{SBC}$  达到极大.

求解最优小波的问题, 就是在  $(u_1, u_2, \dots, u_{L/2-1})$  的允许域—— $(L/2-1)$  维空间的闭集中搜索, 使  $G_{SBC}$  达到极大的最优点. 上节所述, 各层分解可以采用不同的小波, 因此一般地(17)式可写为

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{2\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_1(\omega + \pi)|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_2^2 &= \frac{4\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_1(\omega)|^2 |H_2(2(\omega + \pi))|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_3^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_1(\omega)|^2 |H_2(2\omega)|^2 |H_3(4\omega + \pi)|^2 P(\omega) d\omega, \\ \sigma_0^2 &= \frac{8\sigma_s^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_1(\omega)|^2 |H_2(2\omega)|^2 |H_3(4\omega)|^2 P(\omega) d\omega.\end{aligned}\tag{20}$$

其中  $H_1(\omega), H_2(\omega), H_3(\omega)$  分别依赖各层的自由参数  $\{u_i^1\}, \{u_i^2\}, \{u_i^3\}_{1 \leq i \leq L/2-1}$ ,  $L$  为小波支撑长度.

对于几种典型的谱密度分布: 均匀分布、截断的拉普拉斯分布和截断的高斯分布, 它们的谱密度分别为

$$\begin{aligned}P_1(\omega) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq |\omega| \leq \omega_0, (0 < \omega_0 < \pi), \\ 0, & \omega_0 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \\ P_2(\omega) &= e^{-C|\omega|} \cos \frac{\omega}{2}, \quad 0 \leq |\omega| \leq \pi, (C > 0), \\ P_3(\omega) &= e^{-C\omega^2} \cos \frac{\omega}{2}, \quad 0 \leq |\omega| \leq \pi, (C > 0),\end{aligned}\tag{21}$$

式中未对  $P(\omega)$  归一化. 下面给出部分计算结果.

### 1) $L=4$ 情形

表1中对应  $\max G_{SBC}$  的最优小波为  $u_1=2$ , 对应  $\min G_{SBC}$  的最劣小波  $-16 \leq u_1 \leq -12$ .

表1

均 匀 分 布 谱 密 度 $P_1(\omega)$						
$\omega_0$	$\frac{2}{16}\pi$	$\frac{3}{16}\pi$	$\frac{4}{16}\pi$	$\frac{5}{16}\pi$	$\frac{6}{16}\pi$	$\frac{8}{16}\pi$
$\max G_{SBC}$	16.05 dB	10.75 dB	7.46 dB	5.24 dB	3.68 dB	1.76 dB
$\min G_{SBC}$	2.22 dB	0.80 dB	0.20 dB	0.01 dB	0 dB	0 dB
拉 普 拉 斯 分 布 谱 密 度 $P_2(\omega)$						
$c$	0.15	0.3	0.5	0.8	1.5	3.0
$\max G_{SBC}$	0.50 dB	0.71 dB	1.03 dB	1.59 dB	3.15 dB	6.83 dB
$\min G_{SBC}$	0 dB	0 dB	0.01 dB	0.03 dB	0.16 dB	0.84 dB
高 斯 分 布 谱 密 度 $P_3(\omega)$						
$c$	0.2	0.5	1.0	2.0	4.0	10.0
$\max G_{SBC}$	0.98 dB	2.08 dB	3.73 dB	6.25 dB	9.57 dB	14.98 dB
$\min G_{SBC}$	0 dB	0 dB	0.04 dB	0.30 dB	0.97 dB	2.54 dB

### 2) $L=6$ 情形

表2中对应  $\max G_{SBC}$  的最优小波  $(u_1, u_2)$  取值在图1中  $c$  点到  $b$  点的弧段, 其中  $3.5 \leq u_1 \leq 7.0$ , 对应  $\min G_{SBC}$  的最劣小波  $(u_1, u_2)$  取值在图1中  $a$  点到  $b$  点沿允许域下部的弧段, 其中  $-20 \leq u_1 \leq 16$ .

表2

均匀分布谱密度 $P_1(\omega)$						
$\omega_0$	$\frac{2}{16}\pi$	$\frac{3}{16}\pi$	$\frac{4}{16}\pi$	$\frac{5}{16}\pi$	$\frac{6}{16}\pi$	$\frac{8}{16}\pi$
$\max G_{SBC}$	26.77 dB	18.54 dB	13.16 dB	9.30 dB	6.44 dB	2.96 dB
$\min G_{SBC}$	3.06 dB	0.54 dB	0.01 dB	0 dB	0 dB	0 dB
拉普拉斯分布谱密度 $P_2(\omega)$						
$c$	0.15	0.3	0.5	0.8	1.5	3.0
$\max G_{SBC}$	0.57 dB	0.81 dB	1.18 dB	1.83 dB	3.68 dB	8.20 dB
$\min G_{SBC}$	0 dB	0 dB	0 dB	0 dB	0.02 dB	0.22 dB
高斯分布谱密度 $P_3(\omega)$						
$c$	0.2	0.5	1.0	2.0	4.0	10.0
$\max G_{SBC}$	1.15 dB	2.55 dB	4.82 dB	8.46 dB	13.38 dB	21.36 dB
$\min G$	0 dB	0 dB	0 dB	0.01 dB	0.12 dB	0.81 dB

表中所列结果是对应小波分解三层取相同参数的情形,当三层参数分别独立选取时,最优性能指标  $\max G_{SBC}$  没有明显的提高。

从表中可看出:1)对所计算的三种谱密度分布,最优小波参数取值范围比较集中;2)谱的能量越集中于低频,最优小波带来的编码增益越高;3)小波的支撑  $L$  越长,最优小波带来的编码增益越高。

以上选择的几种典型谱密度分布,都是单调递减、谱能量较多地位于低频的情形。如果信号谱的能量较多地位于某个频带,比如说位于频带  $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  之中,此时  $\{a_1^2, a_2^2, \dots, a_{N/4}^2\}$  不再分解,而改为对  $\{b_1^2, b_2^2, \dots, b_{N/4}^2\}$  进行分解,寻优公式(17)~(19)式也将相应改变。

### 参 考 文 献

- [1] Desarte P, Macq B, Slock DTM. Signal-adapted multiresolution transform for image coding. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1992, **38**(2):897-904
- [2] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Commu. on Pure and Applied Mathe.*, 1988, **41**:909-996.
- [3] 贾沛璋. 正交小波变换的向量空间算法. *系统科学与数学*, 1995, **15**(1):75-82



## ON OPTIMAL ORTHONORMAL WAVELET IN SUBBAND CODING

JIA PEIZHANG LI HAITAO

(*Institute of Systems Science, The Chinese Academy of Science, Beijing 100080*)

**Abstract** As a new technique of image or signal compression, wavelet transform have recently been introduced in subband coding. The technique has the flexibility of a few freedoms in wavelet basis selection. This is one of its advantages over classical technique as the discrete cosine transform. It also poses a problem of the optimal wavelet which is adapted to given signal. The problem of the optimal orthonormal wavelet is investigated in the paper. The optimal objective measure is the coding gain  $G_{SBC}$ . For a stationary random signal the optimal wavelet only depend on the power spectral density (PSD) of the signal. The calculated results corresponding to three typical PSD are given.

**Key words** Optimal wavelet, orthonormal wavelet, subband coding.

**贾沛璋** 1964年毕业于南京大学,现任中国科学院系统科学所研究员.多年来从事卫星、导弹、飞机等运动目标的跟踪滤波,异常值判别与稳健估计,数字信号处理等科研工作.目前的研究兴趣为参数估计与小波分析在信号处理中的应用.已发表论文30余篇,专著三部.

**李海涛** 生于1970年,1991年7月毕业于山东大学数学系,1994年7月在中科院系统科学所获硕士学位.现在北京信息工程学院从事科研工作.研究方向为小波与分形在信号、图象压缩中的应用.